Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 533, 2024 г.

М. М. Кабардов, О. В. Сарафанов

ЧИСЛЕННЫЙ ПОИСК ПОВЕРХНОСТНЫХ ВОЛН В ПЕРИОДИЧЕСКОЙ РЕШЕТКЕ

Мы рассматриваем решетку, полученную присоединением к полуплоскости периодической последовательности прямоугольников. В решетке ставится однородная задача Неймана для уравнения Гельмгольца. Процесс рассеяния плоских волн в решетке характеризуется матрицей конечного размера, которую мы называем матрицей рассеяния. Метод приближенного вычисления этой матрицы был предложен в работе [1] и обоснован в [2]. В [1] этот метод применялся для вычисления так называемой "расширенной" матрицы рассеяния (см. точное определение в п. 2). В терминах расширенной матрицы рассеяния формулируется достаточное условие для существования в решетке поверхностных волн (см. п. 3). Вычисляя приближенно расширенную матрицу рассеяния, можно проверить выполнение этого условия и, в случае его выполнения, сделать вывод о наличии в решетке поверхностной волны. Информация, получаемая в процессе вычисления расширенной матрицы рассеяния, позволяет найти и профиль поверхностной волны, точнее говоря, распределение ее интенсивности в ячейке периодичности рассматриваемой решетки.

В настоящей работе мы реализуем метод поиска поверхностных волн для конкретной решетки, исследуем сходимость численной процедуры и описываем порядок действий при реализации метода с учетом информации о его сходимости.

§1. Метод вычисления матрицы рассеяния

Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ – область, полученная из верхней полуплоскости $\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_2 > 0\}$ добавлением к ней последовательности прямоугольников $\{(x_1, x_2) : -a/2 + 2\pi n < x_1 < a/2 + 2\pi n, -b < x_2 \leqslant 0\}$, где $n \in \mathbb{Z}$ и a, b – положительные числа (рис. 1). В Ω рассмотрим задачу

Ключевые слова: дифракционная решетка, уравнение Гельмгольца, поверхностная волна, расширенная матрица рассеяния, метод приближенного вычисления.

Работа выполнена при поддержке гранта Российского Научного Фонда No. 22-21-00136. Численные результаты получены с использованием оборудования Научного парка СПбГУ, проект 110-29723.

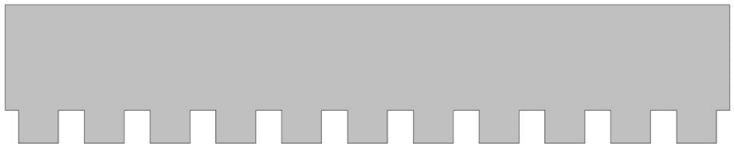

Рис. 1. Решетка Ω.

Неймана для уравнения Гельмгольца:

$$-\Delta u(x) = \mu u(x), \quad x \in \Omega; \qquad\qquad \partial_\nu u(x) = 0, \quad x \in \partial\Omega, \tag{1.1}$$

где ν – единичный вектор внешней нормали к $\partial\Omega$.

Разделением переменных нетрудно убедиться, что при фиксированном значении спектрального параметра μ плоские волны в такой решетке имеют вид

$$V_n^\pm(x_1, x_2; \mu) = c_n e^{i(\alpha+n)x_1} e^{\mp i(\mu-(\alpha+n)^2)^{1/2} x_2},$$

где $\alpha \in [-1/2, 1/2)$; n пробегает множество целых чисел, удовлетворяющих неравенству $(\alpha+n)^2 < \mu$; $c_n = (4(\mu - (\alpha+n)^2))^{-1/4}$ – нормировочный множитель, его выбор поясняется ниже, при обсуждении задачи во вспомогательном волноводе. Значения $\mu = (\alpha+n)^2$ называются пороговыми, при таких μ к списку волн добавляются решения $v_0^\pm(x_1, x_2) = e^{i(\alpha+n)x_1}(1 \mp ix_2)/\sqrt{2}$.

Пусть параметр α фиксирован, а μ не является порогом. Перенумеруем пары $V_n^\pm$ в произвольном порядке и обозначим через $v_l^\pm$, используя натуральный индекс $l = 1, \dots, L$. Рассеяние волны v_l^+ описывается решением задачи (1.1), определяемым своей асимптотикой

$$Y_l(x_1, x_2; \mu) = v_l^+(x_1, x_2; \mu) + \sum_{m=1}^{L} S_{lm}(\mu) v_k^-(x_1, x_2; \mu) + O(e^{-\delta x_2})$$

при $x_2 \to \infty$, где δ – некоторое положительное число. Коэффициенты S_{lm} полностью характеризуют процесс рассеяния. Для их вычисления заменим задачу в решетке задачей в “полуполосе” $\Pi := \{x \in \Omega : -\pi \leqslant$

$x_1 \leqslant \pi\}$:

$$\begin{gathered} -\Delta v(x) = \mu v(x), \quad x \in \Pi; \quad \partial_\nu v(x) = 0, \quad x \in \Gamma_0; \\ \partial_1^j v|_{\Gamma_+} = e^{i\alpha} \partial_1^j v|_{\Gamma_-}, \quad j = 0, 1; \end{gathered} \tag{1.2}$$

где $\Gamma_0 = \partial\Pi \cap \partial\Omega$, $\Gamma_\pm = \partial\Pi \cap \{x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1 = \pm\pi\}$. Мы рассматриваем область Π как волновод с одним цилиндрическим выходом на бесконечность. Сужение на Π решения Y_l задачи (1.1) удовлетворяет задаче (1.2). Нормировочный множитель c_n в выражении для волн был выбран так, чтобы поток энергии, переносимый каждой волной через сечение этого волновода, был равен единице. Коэффициенты S_{lm} являются элементами волноводной матрицы рассеяния задачи в Π. Метод вычисления матрицы рассеяния для такой задачи был предложен в работе [1] и обоснован в [2]. Опишем краевые задачи, которые необхожимо численно решить, для того чтобы реализовать этот метод.

При $R > 0$ положим $\Pi^R = \Pi \cap \{x \in \mathbb{R}^2 : x_2 < R\}$, $\Gamma_\pm^R = \Gamma_\pm \cap \{x \in \mathbb{R}^2 : x_2 < R\}$ и $\Gamma^R = \partial\Pi^R \setminus \partial\Pi$. Рассмотрим вспомогательную задачу

$$\mathcal{A}w(x,\mu) = \mu w(x,\mu), \quad x \in \Pi^R; \tag{1.3}$$

$$\mathcal{B}w(x,\mu) = 0, \quad x \in \Gamma_0; \qquad \partial_1^k w|_{\Gamma_+^R} = e^{i\alpha}\partial_1^k w|_{\Gamma_-^R}, \quad k = 0, 1; \tag{1.4}$$

$$(\partial_\nu + i\zeta) w(x,\mu) = h, \quad x \in \Gamma^R; \tag{1.5}$$

здесь $\zeta \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $h \in L_2(\Gamma^R)$. Пусть $Z_{k,\pm}^R$ – решения этой задачи при $h = (\partial_\nu + i\zeta) v_k^\pm$. Введем $M \times M$–матрицы с элементами

$$\begin{gathered} E_{ij}^R = \big((Z_{i,-}^R - v_i^-), (Z_{j,-}^R - v_j^-)\big)_{\Gamma^R}, \\ F_{ij}^R = \big((Z_{i,+}^R - v_i^+), (Z_{j,-}^R - v_j^-)\big)_{\Gamma^R} \end{gathered} \tag{1.6}$$

и положим

$$G_i^R = \big((Z_{i,+}^R - v_i^+), (Z_{i,+}^R - v_i^+)\big)_{\Gamma^R}.$$

Аппроксимацией $S^R(\mu)$ для матрицы рассеяния $S(\mu)$ является решение уравнения $S^R E^R + F^R = 0$.

Таким образом, для того чтобы приближенно вычислить матрицу рассеяния, необходимо численно решить задачу (1.3), полагая $h = (\partial_\nu + i\zeta) v_k^\pm$, затем составить матрицы E^R и F^R и найти решение линейной системы $S^R E^R + F^R = 0$.

§2. Расширенная матрица рассеяния

Пусть числа μ и μ' не являются порогами, причем $\mu < \mu'$. Рассмотрим все такие функции

$$V_n^{\pm}(x_1, x_2; \mu) = d_n e^{i(\alpha+n)x_1} e^{\pm((\alpha+n)^2-\mu)^{1/2}x_2},$$

что целое число n удовлетворяет неравенствам $\mu < (\alpha+n)^2 < \mu'$; здесь $\alpha \in (-\pi, \pi)$ фиксировано, $d_n = (4((\alpha+n)^2-\mu))^{-1/4}$. Пронумеруем пары $V_n^{\pm}$ в произвольном порядке и обозначим через $v_l^{\pm}$, $l = L+1, \dots, L+M$. Положим

$$\mathcal{V}_l^{\pm} = v_l^{\pm}, \qquad l = 1, \dots L;$$
$$\mathcal{V}_l^{\pm} = \frac{v_l^{-} \mp i v_l^{+}}{\sqrt{2}}, \quad l = L+1, \dots L+M.$$

Существуют решения $\mathcal{Y}_l$, $l = 1, \dots, L+M$, однородной задачи (1.2), допускающие асимптотические разложения

$$\begin{aligned} \mathcal{Y}_l(x_1, x_2; \mu) = \mathcal{V}_l^{+}(x_1, x_2; \mu) \\ + \sum_{m=1}^{L+M} \mathcal{S}_{lm}(\mu) \mathcal{V}_m^{-}(x_1, x_2; \mu) + O(e^{-(\Lambda+\delta)x_2}), \end{aligned} \tag{2.1}$$

где $\Lambda = \max\{\varkappa_l : l = L+1, \dots, L+M\}$, а δ – достаточно малое положительное число. Матрица $\mathcal{S}$ с элементами $\mathcal{S}_{lm}$, $l, m = 1, \dots, L+M$, унитарна и называется расширенной матрицей рассеяния.

Метод, описанный в предыдущем пункте, может применяться и для вычисления матрицы $\mathcal{S}$. Однако его сходимость может нарушаться при больших R в связи с тем, что волны $\mathcal{V}_k^{\pm}$ при $k > L$ растут на бесконечности с экспоненциальной скоростью. На рисунке 2 показана зависимость от R величины $\|(\mathcal{S}^R)^*\mathcal{S}^R - I\|$, характеризующей отклонение от унитарности результата вычисления $\mathcal{S}^R$ расширенной матрицы рассеяния нашим методом. При $M = 0$ не добавлено ни одного канала с экспоненциально растущими волнами, а значит вычисляется обычная матрица рассеяния; на всем показанном интервале изменения R наблюдается экспоненциальное стремление величины $\|(\mathcal{S}^R)^*\mathcal{S}^R - I\|$ к нулю. С добавлением одного канала ($M = 1$) экспоненциальный характер поведения $\|(\mathcal{S}^R)^*\mathcal{S}^R - I\|$ сохраняется, но скорость стремления к нулю увеличивается (показатель экспоненты уменьшается). Улучшение сходимости вполне согласуется с теоретическими оценками, поскольку скорость сходимости равна скорости убывания остаточного

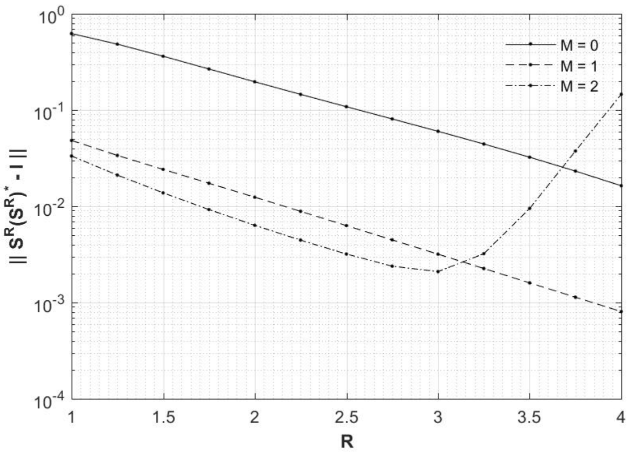

Рис. 2. Зависимость $\|(\mathcal{S}^R)^*\mathcal{S}^R - I\|$ от R; $a/2\pi = 0.3$, $b/2\pi = 0.6$, $k = 1$, $\alpha = 0.25$.

слагаемого в асимптотике (2.1) решений однородной задачи, определяющих расширенную матрицу рассеяния. При $M = 2$, то есть при добавлении двух экспоненциально растущих каналов, поначалу поведение $\|(\mathcal{S}^R)^*\mathcal{S}^R - I\|$ экспоненциальное, показатель экспоненты еще меньше, чем при $M = 1$. Однако при достаточно больших R отклонение $\mathcal{S}^R$ от унитарности начинает нарастать. В случае $M = 1$ такой эффект тоже наступает, но при настолько больших R, что раньше сказывается накопление ошибок метода конечных элементов.

§3. Поиск поверхностных волн

Поверхностной волной в решетке называется решение задачи (1.1), затухающее с экспоненциальной скоростью при удалении от границы $\partial\Omega$. Термин "волна" в данной ситуации объясняется тем обстоятельством, что всякое такое решение имеет вид $e^{i\alpha x_1}\varphi(x_1, x_2)$ при некотором вещественном α, где функция φ периодична по переменной x_1. Параметр α характеризует поток энергии, переносимый волной вдоль поверхности; знак α указывает направление переноса. Сужение этого решения на ячейку периодичности Π является собственной функцией задачи (1.2). Обратно, продолжая на всю решетку собственную функцию задачи на ячейке периодичности, получим решение задачи в решетке, сосредоточенное вблизи границы.

Собственные функции в волноводе можно обнаружить при помощи расширенной матрицы рассеяния. Пусть $\mathcal{S}$ – расширенная матрица рессеяния, определенная в п. 2 для пары чисел μ и μ', $\mu < \mu'$. Запишем матрицу $\mathcal{S}$ в блочном виде

$$\mathcal{S} = \begin{pmatrix} \mathcal{S}_{(11)} & \mathcal{S}_{(12)} \\ \mathcal{S}_{(21)} & \mathcal{S}_{(22)} \end{pmatrix},$$

где блоки $\mathcal{S}_{(11)}$ и $\mathcal{S}_{(22)}$ имеют размер $L\times L$ и $M\times M$, соответственно. Известно [3], что число μ является собственным для задачи в волноводе Π, а отвечающая ему собственная функция убывает на бесконечности медленнее, чем $\exp(-\mu' x_2)$, тогда и только тогда, когда число 1 является собственным числом блока $\mathcal{S}_{(22)}(\mu)$. Таким образом, приближенно вычислив расширенную матрицу рассеяния и обнаружив, что среди собственных чисел блока $\mathcal{S}_{(22)}(\mu)$ присутствует 1, мы можем заключить, что в решетке при данном μ имеется поверхностная волна. Отметим, что если 1 не является собственным числом $\mathcal{S}_{(22)}(\mu)$, то нельзя сделать вывод, будто поверхностной волны нет. Может так случиться, что поверхностная волна есть, но соответствующая собственная функция в волноводе убывает на бесконечности быстрее, чем $\exp(-\mu' x_2)$.

Пусть $u = (u_1, \dots, u_M)$ – собственный вектор матрицы $\mathcal{S}_{(22)}(\mu)$, отвечающий собственному числу 1. Тогда линейная комбинация $\mathcal{Y} = \sum_{j=1}^{M} u_j \mathcal{Y}_{L+j}$ экспоненциально затухает на бесконечности [3] и не равна тождественно нулю (поскольку функции $\mathcal{Y}_{L+j}$ линейно независимы), а потому является собственной функцией задачи в волноводе. Реализуя описанную в п. 1 процедуру для вычисления расширенной матрицы рассеяния $\mathcal{S}$, мы попутно получаем приближение для собственной функции $\mathcal{Y}$. Поясним, как это приближение находить. Обозначим через $\mathcal{Z}^R_{k,\pm}$ решения задачи (1.3)–(1.5) при $h = (\partial_\nu + i\zeta)\mathcal{V}^{\pm}_k$. Линейная комбинация $\mathcal{Z}_l = \mathcal{Z}^R_{l,+} + \sum_{m=1}^{L+M} \mathcal{S}^R_{lm} \mathcal{Z}^R_{m,-}$ является приближением для функции $\mathcal{Y}_l$ (ср. с (2.1)) в области Π^R, а комбинация $\mathcal{Z} = \sum_{j=1}^{M} u_j \mathcal{Z}_{L+j}$ – соответственно, для функции $\mathcal{Y}$.

На рисунке 3 показан результат вычисления блока $\mathcal{S}^R_{(22)}$ в ситуации, когда $M = 1$, то есть блок $\mathcal{S}^R_{(22)}$ содержит единственный элемент, который обозначается через S_{11}. Изображены точки $S_{11}(k^2)$ на комплексной плоскости для некоторых дискретных значений параметра $k = \sqrt{\mu}$

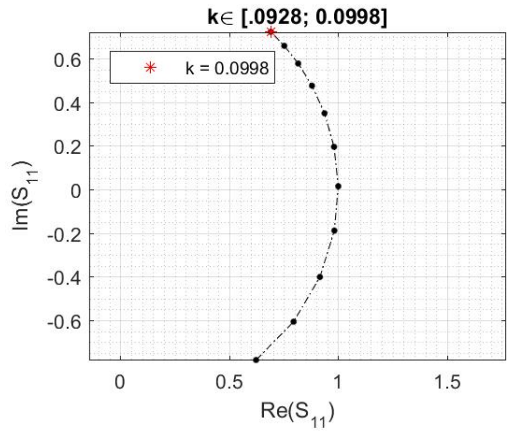

Рис. 3. Блок $\mathcal{S}^R_{(22)} = S_{11}$ при $k = \sqrt{\mu} \in [0.0928; 0.0998]$; $a/2\pi = 0.5$, $b/2\pi = 0.6$, $\alpha = 0.1$.

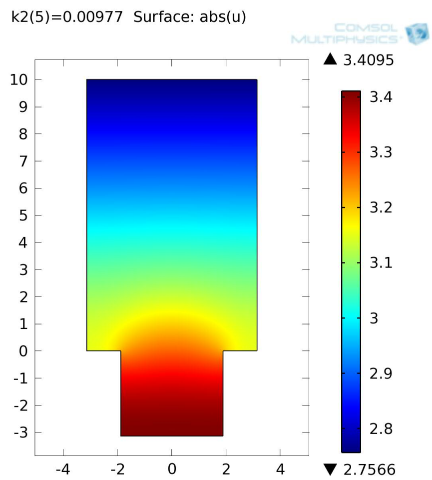

Рис. 4. Абсолютная величина собственной функции на ячейке периодичности Π; $k = \sqrt{\mu} = 0.09884$.

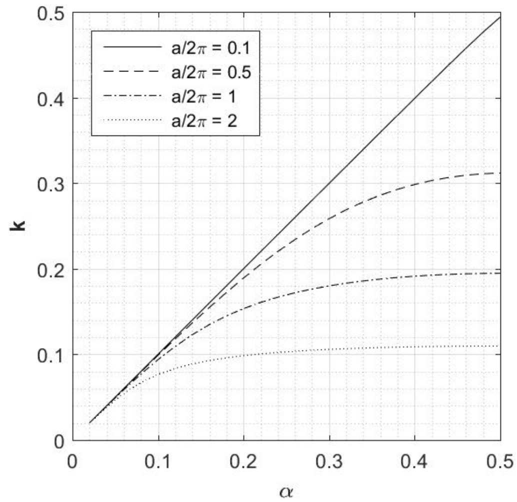

Рис. 5. Пары (α, k), при которых в решетке имеется поверхностная волна, для различных значений параметра a; $b/2\pi = 0.6$.

из интервала $[0.0928; 0.0998]$. Значение $S_{11}(k^2)$ при $k = 0.0998$ отмечено звездочкой, а значение $S_{11}(k^2) = 1$ достигается при $k = 0.09884$. При таком значении k функция $\mathcal{Y}_{L+1}$ из (2.1) оказывается искомой собственной функцией. График абсолютной величины собственной функции изображен на рисунке 4.

Рис. 5 демонстрирует значения величины $k = \sqrt{\mu}$, при которой в решетке может распространяться поверхностная волна, как функцию от α. Зависимость k от α показана при нескольких значениях параметра a. На рисунке 6 параметр a фиксирован; для данного α наблюдается две волны, отвечающих разным значениям энергии $\mu = k^2$.

§4. Заключение

При реализации метода вычисления расширенной матрицы рассеяния следует иметь в виду, что с ростом расстояния R, на котором

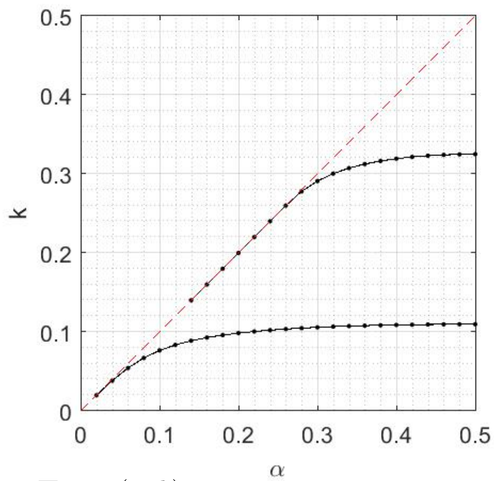

Рис. 6. Пары (α, k), при которых в решетке имеется поверхностная волна; $a/2\pi = 2$ $b/2\pi = 0.6$.

отсечен цилиндрический выход волновода, точность получаемого приближения растет только до определенного предела. Начиная с некоторого значения R_0, наблюдается рост ошибки приближения, связанный с экспоненциальным ростом рассматриваемых волн. Оптимальное значение параметра R можно выбрать, например, с помощью графика величины $\|(\mathcal{S}^R)^* \mathcal{S}^R - I\|$, характеризующего отклонение приближения $\mathcal{S}^R$ от унитарности.

График зависимости энергии k^2 поверхностной волны от параметра квазипериодичности α представляет собой непрерывную кривую. Множество значений k^2, заметаемое при изменении α на всем интервале возможных значений $[-1/2, 1/2)$, является зоной в непрерывном спектре задачи в решетке, отвечающей поверхностной волне. Одному значению α может отвечать несколько волн с различными значениями полной энергии k^2.

Список литературы

1. V. Grikurov, E. Heikkola, P. Neittaanmäki, B. Plamenevskii, *On computation of scattering matrices and on surface waves for diffraction gratings.* — Numerische Mathematik **94**, No. 2 (2003), 269–288.

2. Б. А. Пламеневский, А. С. Порецкий, О. В. Сарафанов, *Метод вычисления матрицы рассеяния для акустических дифракционных решеток.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **516** (2022), 238–252.
3. И. В. Камоцкий, С. А. Назаров, *Аномалии Вуда и поверхностные волны в задаче рассеяния на периодической границе.* I. — Матем. сб. **190**, No. 1 (1999) 109–138.

Kabardov M. M., Sarafanov O. V. Numerical search of surface waves in a periodic grating.

A two-dimensional reflection grating described by the Neumann problem for the Helmhotz equation is considered. The grating is obtained by adding a periodic sequence of rectangles to the upper half-plane. A method for approximate computation of the scattering matrix in the grating is implemented and its convergence is studied. A modification of the method is used for the numerical search of surface waves.

Поступило 30 сентября 2024 г.

Санкт-Петербургский
государственный университет телекоммуникаций
им. проф. М. А. Бонч-Бруевича,
пр. Большевиков, д. 22, к. 1,
193232, г. Санкт-Петербург, Россия
E-mail: kabardov@bk.ru

Санкт-Петербургский
государственный университет,
Университетская набережная, д. 7/9,
199034, г. Санкт-Петербург, Россия
E-mail: o.sarafanov@spbu.ru