Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 533, 2024 г.

Г. Л. Заворохин, А.А. Мацковский

ОБ АНАЛИТИЧЕСКИХ СВОЙСТВАХ РЕШЕНИЙ ДИСПЕРСИОННОГО УРАВНЕНИЯ СРЕДЫ ЭЙРИ

§1. Введение

В данной работе мы предлагаем альтернативу волноводу Х. Л. Пекериса [1], которую можно считать несколько более удобной и гибкой базовой моделью распространения волн в геоакустических волноводах мелкого моря. Точнее, мы предлагаем теперь считать нижнее полупространство средой Эйри, где квадрат волнового числа $(\varkappa(z))^2 = \omega^2/(c(z))^2$ является линейной функцией z (здесь $\omega = 2\pi f$ — угловая частота звука, а $c(z)$ — скорость звука). Такая среда также называется псевдолинейной, или n^2-линейной, и решение уравнения глубины в этом случае записывается в терминах функций Эйри [2, 3]. В дальнейшем эта модель именуется волноводом Эйри.

Представление морского дна средой Эйри является более общим и реалистичным, поскольку большинство типичных морских отложений демонстрирует увеличение скорости звука с глубиной. Похожая, но существенно более простая модель, состоящая из полупространства среды Эйри с акустически мягкой границей сверху, была рассмотрена Л. М. Бреховских в его книге [4] (первое издание на русском языке вышло в 1957 г.). Она служила моделью приповерхностного канала (типичного для океана в зимних условиях), и, вероятно, замечательная связь такого волновода с шепчущей галереей была впервые обнаружена в этой работе. Другой подобный волновод рассматривался В. С. Булдыревым [5, 6], хотя в его работах верхний слой представляет собой изоскоростное полупространство, как и в настоящей работе (т. е. акустически мягкая граница отсутствует). Позднее асимптотическое поведение головных волн в такой среде также изучалось в [7, 8]. Предлагаемая альтернатива волноводу Х. Л. Пекериса моделирует не только распространение волн в окрестности дна океана, но также описывает

Ключевые слова: волновод мелкого моря, нормальные моды, среда Эйри, дисперсионное уравнение, асимптотические решения.

Работа выполнена при поддержке гранта РНФ 22-11-00171.

волновые процессы, имеющие место в известной в авиации и метеорологии окрестности так называемой тропопаузы – слое атмосферы, в котором температурный градиент с увеличением высоты меняется очень медленно.

Эта работа посвящена изучению дисперсионного соотношения для волновода Эйри – геоакустического волновода мелкого моря с градиентом скорости звука в дне и прилегающим к нему изоскоростным водным слоем неограниченной глубины. На границе раздела водной и донной сред выполняются краевые условия жесткого контакта, вдали от границы раздела – условия излучения. Установлено дисперсионное соотношение, представляющее собой трансцендентное уравнение, содержащее функции Эйри, исследованы аналитические свойства его решений (горизонтальных волновых чисел нормальных мод). Построены асимптотические решения дисперсионного уравнения, исследована структура римановых поверхностей и описано множество этих решений: при любом значении частоты ω, отличном от нуля и ω_n^* (13), $n = 1, 2, \ldots$, где n зафиксировано и ω_n^* однозначно соответствует решению $\varkappa_n$, найдутся диапазоны значений материальных параметров в волноводе Эйри такие, что множество решений $\varkappa_n$ счетно. Зависимость горизонтальных волновых чисел нормальных мод от частоты звука, глубины водного слоя, геоакустических параметров дна в такого рода волноводах изучалась в [10].

§2. Постановка задачи

Рассматривается задача об установившихся собственных звуковых колебаниях заданной частоты ω в геоакустическом волноводе мелкого моря [2, 11]

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}^2\phi}{\mathrm{d}z^2} + \dfrac{\omega^2}{c^2(z)}\phi = \varkappa^2\phi\,, \quad z \in (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)\,, \\ \dfrac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}z} - i\varkappa\phi = o\left(\dfrac{1}{z}\right)\,, \quad z \to \pm\infty\,, \\ \phi|_{z=0^-} = \phi|_{z=0^+}\,, \\ \left.\dfrac{1}{\rho}\dfrac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}z}\right|_{z=0^-} = \left.\dfrac{1}{\rho}\dfrac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}z}\right|_{z=0^+}\,, \end{cases} \tag{1}$$

где $\phi(z) \not\equiv 0$ – искомая собственная функция волноводной моды, $\varkappa$ – горизонтальное волновое число этой моды ($\varkappa^2$ – спектральный параметр), z – вертикальная координата глубины, $c = c(z)$ – профиль скорости звука, и $\rho = \rho(z)$ – профиль плотности. Предполагается, что функции $c(z)$ и $\rho(z)$ имеют разрывы первого рода в точке $z = 0$, а также $\rho(z)$ – кусочно-постоянная функция (именно, ρ_1 в воде и ρ_2 в донной среде).

Скорость звука в воде $z \in (0, +\infty)$ предполагается постоянной $c(z) = c_1$, а в донной среде $z \in (-\infty, 0)$ – увеличивающейся с глубиной в соответствии с n^2-линейным законом (таким образом, что ω^2/c^2 линейна по z)

$$c(z) = c_2(z) = \frac{c_1}{\sqrt{\alpha_1 + \alpha_2 z}}\,, \quad z \in (-\infty, 0)\,, \quad 0 < \alpha_1 \leqslant 1\,, \quad \alpha_2 > 0\,. \tag{2}$$

Ограничения в (2) на коэффициенты α_1, α_2 обеспечивают положительность эффективной кривизны (термин введен В. С. Булдыревым, см. [5, 13]) границы раздела сред. При выполнении условия положительности эффективной кривизны границы имеют место волновые процессы, порождающие головную волну интерференционного типа [5, 6, 13].

Отметим, что знаменатель выражения для скорости звука в донной среде (2) обращается в ноль при определенном значении глубины $z = H = -\alpha_1/\alpha_2$, откуда следует, что в этой точке скорость звука в дне стремится к бесконечности при $z \to H + 0$. Более того, для $z < H$ скорость звука становится комплексной и физический смысл этого обстоятельства не ясен. Дополним, что в классических работах В. А. Фока, Л. М. Бреховских и В. С. Булдырева [4, 5] поведение поля ниже точки, где скорость звука стремится к бесконечности, также не рассматривалось.

§3. Дисперсионное соотношение. Нормальные моды

Собственные функции задачи (1) в водной среде $z \in (0, +\infty)$ имеют вид

$$\phi = e^{i\sqrt{\mu} z}\,, \quad \mu = \frac{\omega^2}{c_1^2} - \varkappa^2\,. \tag{3}$$

Для однозначности радикала $\sqrt{\mu}$ в (3) проведем на плоскости комплексной переменной μ из точки ветвления $\mu = 0$ разрез в верхнюю полуплоскость вдоль мнимой оси, фиксируем основной лист условием

$$\sqrt{\mu} > 0 \text{ при } \mu > 0. \tag{4}$$

В донной среде $z \in (-\infty, 0)$ собственные функции могут быть выражены в терминах функций Эйри Ai [3, 2, 12]

$$\phi = a\mathrm{Ai}(\tau)\,, \quad \tau = -\left(\frac{c_1^2}{\omega^2\alpha_2}\right)^{\frac{2}{3}}\left(\frac{\omega^2}{c_1^2}\alpha_1 - \varkappa^2\right) + \left(\frac{\omega^2}{c_1^2}\alpha_2\right)^{\frac{1}{3}} z\,, \tag{5}$$

где a – некоторая константа, получаемая согласованием выражений (3) и (5) в точке $z = 0$ в соответствии с граничным условием $\phi_1|_{z=0^-} = \phi_2|_{z=0^+}$

$$a = \frac{1}{\mathrm{Ai}(g)}\,, \quad g = -\left(\frac{c_1^2}{\omega^2\alpha_2}\right)^{\frac{2}{3}}\left(\frac{\omega^2}{c_1^2}\alpha_1 - \varkappa^2\right). \tag{6}$$

Для однозначности радикала $\left(\frac{\omega^2}{c_1^2}\alpha_2\right)^{\frac{1}{3}}$ в (5) проведем на плоскости комплексной переменной ω из точки ветвления $\omega = 0$ разрез в верхнюю полуплоскость вдоль мнимой оси, фиксируем основной лист условием

$$\left(\frac{\omega^2}{c_1^2}\alpha_2\right)^{\frac{1}{3}} > 0 \text{ при } \omega > 0.$$

Тогда для функции ϕ в донной среде $z \in (-\infty, 0)$ мы имеем выражение

$$\phi = \frac{\mathrm{Ai}(\tau)}{\mathrm{Ai}(g)}\,. \tag{7}$$

Из второго граничного условия (непрерывность нормальной компоненты колебательной скорости) в точке $z = 0$ мы получаем дисперсионное соотношение

$$D(\varkappa, \omega) = 0, \tag{8}$$

где

$$D(\varkappa, \omega) = i\sqrt{\mu}\frac{\mathrm{Ai}(g)}{\rho_1} - \left(\frac{\omega^2}{c_1^2}\alpha_2\right)^{\frac{1}{3}}\frac{\mathrm{Ai}'(g)}{\rho_2}\,. \tag{9}$$

Здесь штрих означает дифференцирование по аргументу.

Пусть $\alpha_1 = 1$ и $\rho_2 = \rho_1$ (отсутствие скачков скорости и плотности на границе раздела сред) в (8) и $\omega \in \mathbb{C},\ \omega \neq 0$. Тогда

$$\sqrt{\mu} = i\left(\frac{\omega^2}{c_1^2}\alpha_2\right)^{\frac{1}{3}}\sqrt{g}$$

и уравнение (8) запишется в виде

$$\sqrt{g}\mathrm{Ai}(g) + \mathrm{Ai}^{'}(g) = 0, \tag{10}$$

где значение радикала $\sqrt{g}$ фиксируется в соответствии с (4).

Утверждение 1. *Множество корней уравнения (10)* $\{S_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{C}$ *счетно и не имеет предельных точек в* $\mathbb{C}$.

Доказательство. Пусть $M = \{S_n\}_{n=1}^{\infty}$. Поскольку $\mathrm{Ai}(g)$ аналитична в окрестности $g = 0$ и $\mathrm{Ai}^{'}(g)|_{g=0} \neq 0$, то $0 \notin M$, т. е. ноль не является решением (10). Пусть $f(g)$ – левая часть уравнения (10) и Ω – ограниченная область в $\mathbb{C}$, $0 \notin \Omega$. Тогда $f(g)$ является аналитической функцией в области Ω, откуда следует, что множество ее нулей M не имеет предельных точек в $\mathbb{C}$. Тогда $f(g)$ имеет лишь конечное число нулей в Ω. Отсюда, уравнение (10) может иметь не более, чем счетное множество корней.

Выведем асимптотические формулы, описывающие положение корней уравнения (10) в $\mathbb{C}$. Пусть ζ_n – корень функции Эйри: $\mathrm{Ai}(\zeta_n) = 0$. Положим $n >> 1$, т. е. $|\zeta_n| >> 1$. Найдем положение ближайшего к ζ_n корня уравнения (10) в метрике $\mathbb{C}$.

Пусть $S_n = \zeta_n + \Delta\zeta_n,\ S_n \in M$. Тогда

$$\sqrt{\zeta_n + \Delta\zeta_n}\mathrm{Ai}(\zeta_n + \Delta\zeta_n) + \mathrm{Ai}^{'}(\zeta_n + \Delta\zeta_n) = 0. \tag{11}$$

С учетом формул

$$\sqrt{\zeta_n}\sqrt{1 + \frac{\Delta\zeta_n}{\zeta_n}} = \sqrt{\zeta_n}\left(1 + \frac{1}{2\zeta_n}\Delta\zeta_n + o(\Delta\zeta_n)\right),$$

$$\mathrm{Ai}(\zeta_n + \Delta\zeta_n) = \mathrm{Ai}(\zeta_n) + \mathrm{Ai}^{'}(\zeta_n)\Delta\zeta_n + o(\Delta\zeta_n),$$

$$\mathrm{Ai}^{'}(\zeta_n + \Delta\zeta_n) = \mathrm{Ai}^{'}(\zeta_n) + \zeta_n\mathrm{Ai}(\zeta_n)\Delta\zeta_n + o(\Delta\zeta_n),$$

из (11) выводим

$$\sqrt{\zeta_n}\mathrm{Ai}^{'}(\zeta_n)\Delta\zeta_n + \mathrm{Ai}^{'}(\zeta_n) + o(\Delta\zeta_n) = 0.$$

Поскольку $\mathrm{Ai}^{'}(\zeta_n) \neq 0$, то имеем

$$\Delta\zeta_n = \frac{1}{i\sqrt{|\zeta_n|}} + o\left(\frac{1}{\sqrt{|\zeta_n|}}\right).$$

Из аналитических свойств функции Эйри известно [14], что при больших n

$$\zeta_n = -\left(\frac{3}{2}\pi\left(n-\frac{1}{4}\right)+o\left(\frac{1}{n}\right)\right)^{\frac{2}{3}},$$

Тогда получаем

$$S_n = \zeta_n - i\left(\frac{3}{2}\pi\left(n-\frac{1}{4}\right)\right)^{-\frac{1}{3}} + o(n^{-\frac{2}{3}}).$$

Утверждение доказано. □

Следствие 1. *Множество всех решений $\varkappa(\omega)$ дисперсионного уравнения* (8) *при $\alpha_1 = 1$ и $\rho_2 = \rho_1$ представляет собой счетный набор функций $\{\varkappa_n(\omega)\}_{n=1}^{\infty}$:*

$$\varkappa_n(\omega) = \sqrt{\frac{\omega^2}{c_1^2} + \left(\frac{\omega^2}{c_1^2}\alpha_2\right)^{\frac{2}{3}} S_n}, \tag{12}$$

где $\{S_n \in \mathbb{C}\}_{n=1}^{\infty}$ – множество корней уравнения (10).

Теперь зафиксируем $\omega \in \mathbb{C},\ \omega \neq 0,\ \omega_n^*$, где

$$\omega_n^* = i\alpha_2 c_1 S_n^{\frac{3}{2}},\ n = 1, 2, \ldots, \tag{13}$$

– точки ветвления функций $\varkappa_n(\omega)$ (12). Исследуем множество решений $\varkappa$ уравнения (8) при $\rho_2 = \rho_1$, как функций $\varkappa = \varkappa(\alpha_1),\ \alpha_1 \in \mathbb{C}$, в окрестности точки $\alpha_1 = 1$.

Теорема. *Пусть для фиксированного $n = 1, 2, \ldots, \omega \in \mathbb{C},\ \omega \neq 0,\ \omega_n^*$, где ω_n^* однозначно соответствует решению $\varkappa_n$ уравнения* (8), *и $\rho_2 = \rho_1$. Тогда решение $\varkappa = \varkappa(\omega, \alpha_1)$ уравнения* (8) *– аналитическая функция комплексного переменного α_1 в некоторой окрестности точки $\alpha_1 = 1$.*

Доказательство. Пусть $g_1 = g(\omega, \varkappa(\omega, \alpha_1))|_{\alpha_1=1}$, тогда из *утверждения 1* следует, что найдется $n_1 \in \mathbb{N}:\ g_1 = S_{n_1}$, где S_{n_1} – один из множества корней уравнения (10). Следовательно, $\mathrm{Ai}(g_1) \neq 0$. Разделим обе части уравнения (8) на $\mathrm{Ai}(g)$, полагая, что $g \in U_\varepsilon(g_1),\ \varepsilon > 0$, где $U_\varepsilon(g_1)$ – некоторая ε–окрестность точки g_1, и возведем в квадрат обе части уравнения, тогда

$$\left(\frac{\mathrm{Ai}'(g)}{\mathrm{Ai}(g)}\right)^2 - g = \left(\frac{\omega}{\alpha_2 c_1}\right)^{\frac{2}{3}}(\alpha_1 - 1). \tag{14}$$

Пусть $\Psi(g) = \left(\frac{\mathrm{Ai}'(g)}{\mathrm{Ai}(g)}\right)^2 - g$ – функция комплексного переменного $g \in \mathbb{C}$. Исследуем свойства $\Psi(g)$ в $U_\varepsilon(g_1)$. □

Утверждение 2. $\Psi'(g_1) = \frac{d\Psi}{dg}|_{g=g_1} \neq 0$.

Доказательство. Пусть $\Psi'(g_1) = 0$, тогда

$$2\frac{\mathrm{Ai}'(g_1)}{\mathrm{Ai}(g_1)}\frac{g_1\mathrm{Ai}^2(g_1) - (\mathrm{Ai}'(g_1))^2}{\mathrm{Ai}^2(g_1)} - 1 = 0. \tag{15}$$

Кроме того, $g_1 = g(\omega, \varkappa(\omega, \alpha_1))|_{\alpha_1=1}$, где $\varkappa$ – решение дисперсионного уравнения (8), и $\frac{\mathrm{Ai}'(g_1)}{\mathrm{Ai}(g_1)} = -\sqrt{g_1}$, отсюда получаем

$$\frac{2i\sqrt{\mu}}{\left(\frac{\omega^2}{c_1^2}\alpha_2\right)^{\frac{1}{3}}}\left(g_1 + \frac{\frac{\omega^2}{c_1^2} - \varkappa_0^2}{\left(\frac{\omega^2}{c_1^2}\alpha_2\right)^{\frac{2}{3}}}\right) = 1, \tag{16}$$

где $\varkappa_0 = \varkappa(\omega, \alpha_1)|_{\alpha_1=1}$.

Поскольку

$$\left(\frac{\omega^2}{c_1^2}\alpha_2\right)^{\frac{2}{3}} g_1 = \varkappa_0^2 - \frac{\omega^2}{c_1^2},$$

то равенство (16) не может быть выполнено. Утверждение доказано. □

В силу того, что $\mathrm{Ai}(g)$ и $\mathrm{Ai}'(g)$ аналитичны, имеем аналитичность $\Psi(g)$ в области $U_\varepsilon(g_1)$, и вместе с утверждением 2 получаем, что существует функция $\varphi(W): \ \varphi(\Psi(g)) = g$ – обратная функция к Ψ, определенная в некоторой окрестности точки $W_1 = \Psi(g_1)$, и аналитична в ней. Из (14) следует $\Psi(g) = \left(\frac{\omega}{c_1\alpha_2}\right)^{\frac{2}{3}}(\alpha_1 - 1)$, откуда

$$g = \varphi\left(\left(\frac{\omega}{c_1\alpha_2}\right)^{\frac{2}{3}}(\alpha_1 - 1)\right). \tag{17}$$

Ввиду того, что аргумент аналитической функции φ в равенстве (17) является аналитической функцией переменного $\alpha_1 \in \mathbb{C}$, получаем, что $g = g(\alpha_1)$ и $\varkappa = \varkappa(\alpha_1)$ – аналитические функции α_1 в окрестности точки $\alpha_1 = 1$. Теорема доказана.

Замечание. Аналитичность функции $\varkappa = \varkappa(\omega, s)$ по $s = \rho_2 - \rho_1$ в некоторой окрестности точки $s = 0$ доказывается аналогично.

Далее, не умаляя общности, положим $c_1 = 1$. Введем обозначения

$$\rho_1 = \rho, \qquad \rho_2 = \rho + s,$$

тогда (9) запишется в виде

$$D(\varkappa, \omega) = i\sqrt{\omega^2 - \varkappa^2}\frac{\mathrm{Ai}(g)}{\rho} - \left(\alpha_2\omega^2\right)^{\frac{1}{3}}\frac{\mathrm{Ai}'(g)}{\rho + s}.$$

Пусть $\varkappa(\omega)$ – решение дисперсионного уравнения (8). Тогда полная производная $D(\varkappa(\omega), \omega)$ по параметру s тождественно равна нулю:

$$\frac{dD(\varkappa(\omega), \omega)}{ds} \equiv 0. \tag{18}$$

Используем процедуру, описанную в [9], для системы линейных уравнений (8), (18) относительно неизвестных $Ai(g)$ и $Ai'(g)$, получим условие разрешимости указанной системы в виде

$$\rho\left(\alpha_2\omega^2\right)^{\frac{1}{3}}\left[i(\rho + s)\frac{\varkappa\varkappa_s'}{\sqrt{\omega^2 - \varkappa^2}} - i\sqrt{\omega^2 - \varkappa^2} - \rho(\alpha_2\omega^2)^{\frac{1}{3}}gg_s^{'}\right]$$

$$-(\rho + s)^2(\omega^2 - \varkappa^2)g_s^{'} = 0, \tag{19}$$

где

$$g_s^{'} = \frac{dg}{ds} = 2\varkappa\varkappa_s'(\alpha_2\omega^2)^{-\frac{2}{3}}.$$

Выполняя несложные преобразования, выводим

$$\varkappa_s'|_{s=0} = \frac{i(\omega^2 - \varkappa^2)}{\rho\varkappa\left[i + \frac{2}{\alpha_2}(\alpha_1 - 1)\sqrt{\omega^2 - \varkappa^2}\right]}. \tag{20}$$

Следовательно, при $\alpha_1 = 1$ имеем

$$(\varkappa_n)_s'|_{s=0,\ \alpha_1=1} = \frac{\omega^2 - \varkappa_n^2}{\rho\varkappa_n}, \tag{21}$$

где $\varkappa_n$ – решения (12) дисперсионного уравнения (8) при $\alpha_1 = 1$ и $s = 0$.

Находим

$$(\varkappa_n)_s'|_{s=0,\ \alpha_1=1} = -\frac{\alpha_2^{\frac{2}{3}}S_n\omega^{\frac{4}{3}}}{\rho_1\sqrt{\omega^2 + \alpha_2^{\frac{2}{3}}S_n\omega^{\frac{4}{3}}}},\ n = 1, 2, \ldots \tag{22}$$

Далее процесс нахождения производных функции $\varkappa(\omega)$ по параметрам задачи α_1, s итерируется и мы опустим громоздкие выкладки. Отметим, что при вычислениях используется дифференцирование дисперсионного уравнения (8) по параметрам $\alpha_1,\ s$ и процедура из [9]. В результате мы построим разложение решений дисперсионного уравнения (8) в ряд Тейлора по двум переменным α_1 и s в окрестности точки $\alpha_1 = 1$ и $s = 0$.

Получаем следующие разложения решений $\varkappa_n(\omega)$ дисперсионного уравнения (8) для волновода Эйри при любой фиксированной частоте ω

$$\begin{aligned}\varkappa_n(\omega) = {} & \sqrt{\left(\frac{\omega}{c_1}\right)^2 + \alpha_2^{\frac{2}{3}} S_n \left(\frac{\omega}{c_1}\right)^{4/3}} - \frac{\alpha_2^{\frac{2}{3}} S_n \left(\frac{\omega}{c_1}\right)^{\frac{4}{3}}}{\rho_1 \sqrt{\left(\frac{\omega}{c_1}\right)^2 + \alpha_2^{\frac{2}{3}} S_n \left(\frac{\omega}{c_1}\right)^{\frac{4}{3}}}} (\rho_2 - \rho_1) \\ & + \frac{2\alpha_2 S_n^{\frac{3}{2}}}{\rho_1 \left(\alpha_2^{\frac{2}{3}} S_n + \left(\frac{\omega}{c_1}\right)^{\frac{2}{3}}\right)} (\rho_2 - \rho_1)(\alpha_1 - 1) \\ & + \left(\frac{\omega}{c_1}\right)^{8/3} \frac{i\alpha_2^{\frac{1}{3}} S_n^{\frac{1}{2}}}{i\sqrt{\left(\frac{\omega}{c_1}\right)^2 + \alpha_2^{\frac{2}{3}} S_n \left(\frac{\omega}{c_1}\right)^{4/3}}} \frac{(\alpha_1 - 1)^2}{2} \\ & - \frac{\alpha_2^{\frac{2}{3}} S_n \omega^{\frac{4}{3}}}{\rho_1^2 \sqrt{\omega^2 + \alpha_2^{\frac{2}{3}} S_n \omega^{\frac{4}{3}}}} \left(2 - \frac{\alpha_2^{\frac{2}{3}} S_n \left(\frac{\omega}{c_1}\right)^{4/3}}{\left(\frac{\omega}{c_1}\right)^2 + \alpha_2^{\frac{2}{3}} S_n \left(\frac{\omega}{c_1}\right)^{4/3}} + i\alpha_2^{\frac{1}{3}} \sqrt{S_n} \left(\frac{\omega}{c_1}\right)^{2/3} \right. \\ & \left. - \frac{4\alpha_2 S_n^{3/2}}{\alpha_2}\right) \frac{(\rho_2 - \rho_1)^2}{2} + o\left((\alpha_1 - 1)^2 (\rho_2 - \rho_1)^2\right), \end{aligned} \tag{23}$$

где $S_n,\ n = 1, 2, \ldots$ – решения (8).

Запишем выражения для собственных функций в однородном водном слое со скоростью звука c_1:

$$\Phi_n = e^{-i\omega t + i\varkappa_n(\omega)x} e^{i\sqrt{\mu(\varkappa_n(\omega))} z}, \quad z \in (0, +\infty), \tag{24}$$

а также – в донной градиентой среде Эйри со скоростью звука $c_2(z)$ (2):

$$\Phi_n = e^{-i\omega t + i\varkappa_n(\omega)x} \frac{\mathrm{Ai}(\tau(\varkappa_n(\omega)))}{\mathrm{Ai}(g(\varkappa_n(\omega)))}, \quad z \in (-\infty, 0). \tag{25}$$

Здесь $n = 1, 2, \ldots$ – номер нормальной моды, t – время, x – горизонтальная координата, $\varkappa_n(\omega)$ находится для каждой заданной частоты ω из формулы (23). Функции (24), (25), имеющие вид

$$\Phi_n = e^{-i\omega t + i\varkappa_n(\omega)x}\phi(z),$$

где $\phi(z)$ – решение задачи (1), называются нормальными модами. Выражения (24), (25) соответствуют нормальным модам, распространяющимся в положительном направлении оси x.

§4. Результаты численных расчетов

Для численного анализа полученных результатов мы резервируем пять первых членов асимптотического разложения $\varkappa_n(\omega)$ в (23) и исследуем зависимость вещественной $\operatorname{Re}\varkappa_n$ и мнимой $\operatorname{Im}\varkappa_n$ частей волновых чисел этих мод, а также их групповых скоростей v_n^{gr}, от частоты ω. По определению

$$v_n^{gr} = \frac{d\omega}{d\varkappa_n}$$

– это групповая скорость n-ой моды. При поиске зависимостей групповых скоростей от частоты мы находим вещественную часть от производной волнового числа по частоте:

$$v_n^{gr} = \operatorname{Re}\left(\frac{d\varkappa_n}{d\omega}\right)^{-1}, \tag{26}$$

где $n = 1, 2, \ldots$ – номер волноводной моды, взаимно однозначно соответствующий номеру корня ζ_n функции Эйри $\operatorname{Ai}(\zeta)$.

В качестве входных данных для расчета волнового поля взяты типичные для шельфа Японского моря параметры верхних слоев дна.

$$c_1 = 1471\ m/s,$$

c_1 – скорость звука в воде. Параметры, характеризующие скачок скорости звука на границе раздела и ее изменение с глубиной в дне:

$$\alpha_1 = 0.737, \quad \alpha_2 = 2.000,$$

плотность воды и дна:

$$\rho_1 = 1023\ kg/m^3, \quad \rho_2 = 1600\ kg/m^3.$$

Из графика на рис.1 видно, что имеют место моды, чьи групповые скорости v_n^{gr} превышают скорость распространения звука c_1 в воде. Эти моды называются волнами-предвестниками.

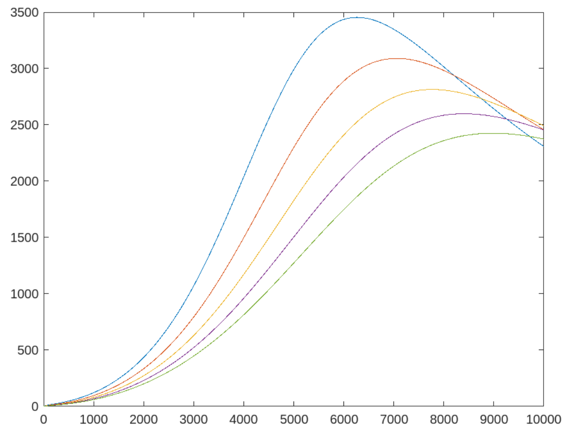

Рис. 1. График зависимости групповых скоростей v_n^{gr} мод от частоты ω. По оси ординат - v_n^{gr} (m/s), по оси абсцисс - ω (rad/s) .

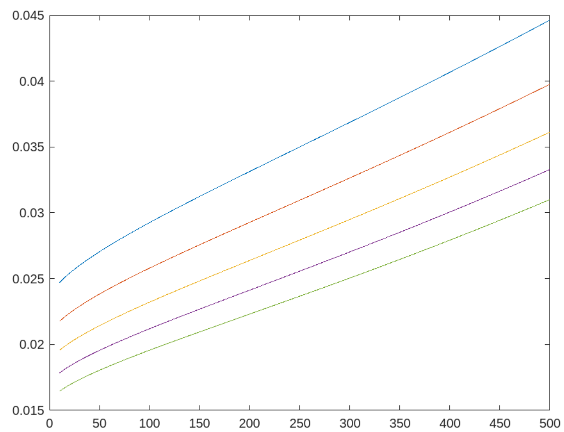

Рис. 2. График зависимости $\mathrm{Re}\,\varkappa_n$ мод от частоты ω. По оси ординат - $\mathrm{Re}\,\varkappa_n$ (m^{-1}), по оси абсцисс - ω (rad/s).

На графиках, изображенных на рис.2 и рис.3, представлена зависимость вещественной $\mathrm{Re}\,\varkappa_n$ и мнимой $\mathrm{Im}\,\varkappa_n$ частей волновых чисел

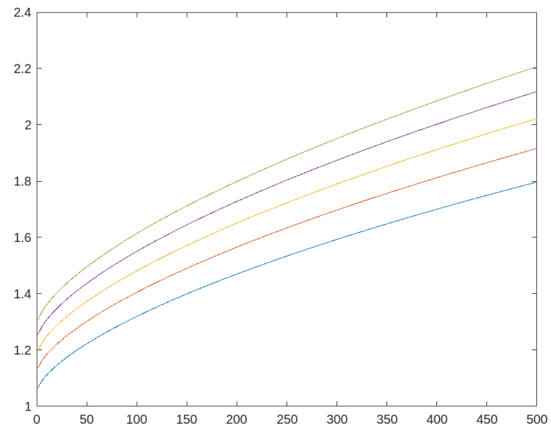

Рис. 3. График зависимости $\operatorname{Im}\varkappa_n$ мод от частоты ω. По оси ординат - $\operatorname{Im}\varkappa_n$ (m^{-1}), по оси абсцисс - ω (rad/s).

$\varkappa_n$ мод от частоты ω. Из асимптотической формулы (23) находим, что $\varkappa_n(\omega)$ являются многозначными функциями комплексного переменного ω. Одной из точек ветвления является $\omega = 0$, общая для всех мод. Положение второй точки ветвления ω_n^* зависит от номера моды, с увеличением номера n оно сдвигается вправо. Несложно получить формулу, описывающую асимптотическую оценку для ω_n^* в зависимости от номера моды n:

$$\omega_n^* \simeq c_1\alpha_2|\zeta_n|^{3/2},\ n = 1, 2, \dots .$$

Список литературы

1. C. L. Pekeris, *Theory of propagation of explosive sound in shallow water*ю — Geol. Soc. Am., Memoir **27** (1948).
2. F. B. Jensen, W. A. Kuperman, M. B. Porter, H. Schmidt, *Computational Ocean Acoustics*, Springer Science & Business Media (2011).
3. L. M. Brekhovskikh, Yu. P. Lysanov, *Fundamentals of ocean acoustics*, Spring-Verlag, Berlin (2003).
4. L. M. Brekhovskikh, *Waves in layered media*, Academic Press, New York (1980).
5. V. S. Buldyrev, *Investigation of the Green's function in a problem of diffraction by a transparent circular cylinder.* I. — Zhurnal Vychislitel'noi Matematiki i Matematicheskoi Fiziki **4**, No. 14 (1964), 275–286.

6. V. S. Buldyrev, A. I. Lanin, *Investigation of Green's function in the problem of diffraction at a transparent circular cylinder*. II. — USSR Computational Mathematics and Mathematical Physics **6**, No. 1 (1966), 128–149.
7. A. A. Matskovskiy, *Interference head wave in diffraction of waves from a point source by an inhomogeneous half-plane*. — Computational Mathematics and Mathematical Physics **55** (2015), 1867–1883.
8. A. A. Matskovskiy, *Wave front sets of the Buldyrev head wave and whispering gallery waves*. — J. Math. Sci. **214**, No. 3 (2016), 337–344.
9. A. Matskovskiy, G. Zavorokhin, P. Petrov, *A Method for reducing transcendental dispersion relations to nonlinear ordinary differential equations in a wide class of wave propagation problems*. — Mathematics **10**, No. 20 (2022), 3866.
10. P. Petrov, A. Zakharenko, A. Matskovskiy, G. Zavorokhin, S. Dosso, *On the dependence of acoustic modes on media parameters in the Pekeris–Airy waveguide*. — J. Theor. Comp. Acoustics **4** (2024).
11. B. Katsnelson, V. Petnikov, J. Lynch, *Fundamentals of Shallow Water Acoustics*, Springer Science & Business Media (2012).
12. L.D. Landau, L.E. Lifshitz, *Quantum mechanics: non-relativistic theory*, Elsevier (2013).
13. V. S. Buldyrev, *Interference of short waves in the problem of diffraction by an inhomogeneous cylinder of arbitrary cross section*. — Izv. Vyssh. Uchebn. Zaved. Radiofiz., **10**, No. 1 (1967), 699–711.
14. V. M. Babich, V.S. Buldyrev, *Short-Wavelength Diffraction Theory*, Springer-Verlag (1991).

Zavorokhin G. L., Matskovskiy A. A. On the analytical properties of solutions of the dispersion equation of the Airy medium.

A problem of wave propagation near the interface between an isospeed water layer overlying a halfspace with a sound speed gradient, known as an Airy medium, characterized by a linear variation of the squared refractive index with depth is considered. A dispersion relation is derived, which is a transcendental equation containing Airy functions. For certain values of the problem parameters, it is proved that the dispersion equation has a countable set of solutions (horizontal wave numbers of normal modes). Asymptotic solutions of the dispersion equation for a geoacoustic shallow-water waveguide, consisting of an unbounded homogeneous water layer and a bottom Airy halfspace, have been constructed and analyzed.

Поступило 3 октября 2024 г.

Санкт-Петербургское отделение
Математического института
им. В. А. Стеклова РАН;
Тихоокеанский океанологический
институт им. В. И. Ильичева ДВО РАН,
Владивосток, Россия

E-mail: germanzavorokhin@rambler.ru, amatskovskiy@gmail.com