Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 533, 2024 г.

М. Н. Демченко

СУЩЕСТВОВАНИЕ РЕШЕНИЯ НЕОДНОРОДНОГО УЛЬТРАГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ

К юбилею Михаила Игоревича Белишева

§1. Введение

В работе рассматривается неоднородное ультрагиперболическое уравнение

$$(\Delta_y - \Delta_x)u = f, \quad (x,y) \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^n, \tag{1}$$
$$\Delta_x = \partial^2_{x_1} + \ldots + \partial^2_{x_d}, \quad \Delta_y = \partial^2_{y_1} + \ldots + \partial^2_{y_n},$$

которое является обобщением волнового уравнения, соответствующего случаю $d = 1$ или $n = 1$. Как известно, в гиперболическом случае единственность решения обеспечивается некоторым дополнительным условием, которое может предписывать поведение решения на нехарактеристической поверхности (задача Коши), на характеристической поверхности (характеристическая задача) или задавать асимптотику решения на бесконечности [1–6]. В данной работе мы предложим аналог последнего условия в ультрагиперболическом случае.

Корректных задач для ультрагиперболических уравнений известно значительно меньше, чем для эллиптических, параболических и гиперболических уравнений. В работе [7] доказана корректность характеристической задачи для однородного ультрагиперболического уравнения, а также получена формула в квадратурах для ее решения. Упомянем также работу [8], посвященную дифференциальным уравнениям достаточно общего вида на симметрических пространствах. Множество работ посвящено фундаментальным решениям для уравнения (1), среди которых одними из первых были [9,10] (упомянем также, например, работы [11–14] по этой тематике).

В работе [15] рассматривалось уравнение вида (1) с нулевой правой частью. В ней были построены решения, обладающие следующей

Ключевые слова: ультрагиперболическое уравнение, сингулярный интеграл, метод стационарной фазы, асимптотика решения на бесконечности.

асимптотикой на бесконечности:

$$u(t\theta, (t+p)\omega) = \frac{1}{t^{N/2-1}} F(\theta, \omega, p)(1 + o(1)), \quad t \to +\infty, \tag{2}$$

где

$$(\theta, \omega, p) \in Z = S^{d-1} \times S^{n-1} \times \mathbb{R}, \quad N = d + n.$$

Это соотношение, взятое в качестве дополнительного условия на решение уравнения (1), приводит к переопределенной задаче, поскольку функция $F(\theta, \omega, p)$ не может быть произвольной. В случае $f \equiv 0$ это продемонстрировано в работе [15], в которой был описан некоторый класс решений однородного уравнения, для которых асимптотический коэффициент $F(\theta, \omega, p)$ удовлетворяет соотношению

$$F(-\theta, -\omega, -p) = (H^{d-n} F(\theta, \omega, \cdot))(p),$$

где H – преобразование Гильберта по переменной p. Функции F, обладающие таким свойством (а также дополнительными свойствами регулярности, описанными в [15]), могут быть взяты в качестве данных в задаче для уравнения (1) с $f \equiv 0$. Однако, в случае $f \not\equiv 0$ соответствующих решений, вообще говоря, не существует.

Для того, чтобы избежать переопределенности в постановке задачи для уравнения (1), мы перейдем к векторнозначным решениям. А именно, мы будем предполагать, что функции $u(x, y)$ и $f(x, y)$ принимают значения в $\mathbb{C}^{2m}$, $m \geqslant 1$, а условие (2) заменим на следующее

$$P(\theta, \omega) u(t\theta, (t+p)\omega) = \frac{1}{t^{N/2-1}} \mathcal{F}(\theta, \omega, p)(1 + o(1)), \quad t \to +\infty, \tag{3}$$

где $P(\theta, \omega)$ – это C^∞-гладкое семейство ортогональных проекторов в $\mathbb{C}^{2m}$, такое что

$$\operatorname{rank} P(\theta, \omega) = m, \tag{4}$$

$$\operatorname{Ran}(P(\theta, \omega)) \perp \operatorname{Ran}(P(-\theta, -\omega)) \tag{5}$$

($\operatorname{Ran}(\cdot)$ – образ линейного оператора). Таким образом, в качестве дополнительных данных, определяющих решение уравнения (1), служит функция $\mathcal{F}$, которая, как следует из самого условия (3), должна удовлетворять соотношению

$$\mathcal{F}(\theta, \omega, p) \in \operatorname{Ran}(P(\theta, \omega)), \quad (\theta, \omega, p) \in Z. \tag{6}$$

Ввиду предположения (4) условие (3) задает, в некотором смысле, ровно половину компонент векторнозначного решения u на бесконечности. Именно благодаря этому удается избежать переопределенной задачи. Отметим также, что хотя уравнение (1) представляет собой систему независимых уравнений на компоненты решения u, эти компоненты входят зависимым образом в условие (3).

Соотношение (6) означает, что функция $\mathcal{F}$ должна быть сечением комплексного векторного расслоения над Z, образованного m-мерными пространствами

$$\mathrm{Ran}(P(\theta,\omega)) \subset \mathbb{C}^{2m}.$$

Однако, в этой работе мы ограничимся случаем $\mathcal{F} \equiv 0$, который соответствует однородному асимптотическому условию. Кроме того, мы будем предполагать, что

$$N \geqslant 5. \tag{7}$$

Существование семейства проекторов со свойствами (4), (5), зависит от размерностей d, n, m. Мы оставляем этот вопрос за рамками данной статьи. Отметим лишь, что в работе [16] описан пример такого семейства в случае, когда одна из размерностей d, n равна трем, $m = 1$, в котором проекторы P зависят только от одной из переменных θ, ω.

Теорема 1. *Пусть функция $f(x, y)$ принадлежит классу Шварца $\mathcal{S}(\mathbb{R}^N; \mathbb{C}^{2m})$ и выполнено* (7). *Тогда существует решение*

$$u \in C^\infty(\mathbb{R}^N) \cap \mathcal{S}'(\mathbb{R}^N)$$

уравнения (1), *для которого выполнено асимптотическое соотношение вида* (2) *с функцией $F(\theta,\omega,p)$, удовлетворяющей равенству*

$$P(\theta,\omega)F(\theta,\omega,p) = 0. \tag{8}$$

Отметим, что в доказательстве данной теоремы будет установлено, что остаток в асимптотике (2) равен $O(t^{-N/2})$.

Автор благодарен А. С. Благовещенскому и А. Ф. Вакуленко за полезные обсуждения, связанные с тематикой ультрагиперболических уравнений и задачи рассеяния.

§2. Преобразование Фурье решения задачи (1), (8)

В работе используется следующее определение преобразования Фурье

$$\hat{v}(\xi) = \int\limits_{\mathbb{R}^d} e^{-i\langle x,\xi\rangle} v(x)dx, \quad v(x) = (2\pi)^{-d} \int\limits_{\mathbb{R}^d} e^{i\langle x,\xi\rangle} \hat{v}(\xi)d\xi$$

(здесь и далее $\langle \cdot, \cdot \rangle$ – стандартное скалярное произведение в вещественном евклидовом пространстве; в дальнейшем угловыми скобками мы также будем обозначать значение распределения на пробной функции). Для функции $v(x, y)$, определенной в "пространстве-времени" $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^n \simeq \mathbb{R}^N$, преобразование Фурье удобно определить формулой

$$\hat{v}(\xi, \eta) = \int\limits_{\mathbb{R}^N} e^{i(-\langle x,\xi\rangle + \langle y,\eta\rangle)} v(x, y) dx dy.$$

Тогда обратное преобразование Фурье имеет вид

$$v(x, y) = (2\pi)^{-N} \int\limits_{\mathbb{R}^N} e^{i(\langle x,\xi\rangle - \langle y,\eta\rangle)} \hat{v}(\xi, \eta)\, d\xi d\eta.$$

Введем $\mathbb{C}^{2m}$-значный функционал $\mathcal{R}$ на $\mathbb{C}^{2m}$-значных функциях ψ

$$\mathcal{R}(\psi) = \int\limits_{\mathbb{R}^N} \left((\xi^2 - \eta^2)I + i0R(\xi, \eta)\right)^{-1} \psi(\xi, \eta)\, d\xi d\eta, \tag{9}$$

где I – единичная матрица в $\mathbb{C}^{2m}$,

$$R(\xi, \eta) = P(\xi/|\xi|, \eta/|\eta|) - P(-\xi/|\xi|, -\eta/|\eta|).$$

Выражение в правой части (9) является сингулярным интегралом с особенностью на конусе $\{|\xi| = |\eta|\}$. Мы покажем, что $\mathcal{R}$ задает матричнозначное распределение из $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^N)$. После этого мы определим обобщенную функцию $\hat{u}$ по формуле

$$\hat{u} = \mathcal{R}\hat{f}, \tag{10}$$

правая часть которой понимается как произведение распределения $\mathcal{R}$ и функции $\hat{f}$ из класса Шварца. Приведем запись этого равенства в эквивалентной форме:

$$\langle \hat{u}, \varphi \rangle = \mathcal{R}(\hat{f}\varphi), \quad \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N).$$

В данном случае под $\langle \hat{u}, \varphi \rangle$ мы понимаем действие $\mathbb{C}^{2m}$-значного распределения $\hat{u}$ на *скалярную* пробную функцию φ, результатом которого является элемент $\mathbb{C}^{2m}$. После оправдания приведенных формул мы покажем, что u является решением уравнения (1).

Сначала мы определим правую часть в (9) в случае, когда ψ имеет компактный носитель в $\mathbb{R}^N \setminus \{0\}$. Заметим, что матричнозначная функция $R(\xi, \eta)$ обладает свойствами

$$R^\dagger = R, \quad \mathrm{Ker}(R) = \{0\} \tag{11}$$

(первое из которых означает условие эрмитовости). Второе свойство следует из предположений (4), (5). Имеет место следующее равенство распределений на $\mathbb{R}$

$$(zI + i0R)^{-1} = \frac{\Theta(R)}{z + i0} + \frac{\Theta(-R)}{z - i0}. \tag{12}$$

Отметим, что функция Хевисайда от эрмитовой матрицы в правой части есть не что иное, как ортогональный проектор на подпространство, натянутое на собственные векторы матрицы, отвечающие ее положительным собственным значениям.

С помощью тождества (12) мы можем записать правую часть в (9) в виде

$$\sum_{\pm} \int\limits_{\mathbb{R}^N} \frac{\Theta(\pm R(\xi,\eta))\psi(\xi,\eta)}{\xi^2 - \eta^2 \pm i0}\, d\xi d\eta. \tag{13}$$

Так как носитель пробной функции ψ отделен от начала координат, в окрестности этого носителя матрица $R(\xi,\eta)$ является C^∞-гладкой функцией. Кроме того, ее спектр отделен от нуля. Поэтому числитель дроби в последнем выражении является C^∞-гладкой функцией. С помощью гладкого разбиения единицы и введения локальных координат можно представить это выражение как сумму интегралов вида

$$\int\limits_{\mathbb{R}^N} \frac{\tilde{\psi}(\zeta)}{\zeta_N \pm i0}\, d\zeta$$

с гладкими финитными функциями $\tilde{\psi}(\zeta)$. Такое представление правой части в (9) показывает, что $\mathcal{R}(\psi)$ можно оценить по абсолютной величине через норму $\|\psi\|_{H^{1/2+\gamma}}$ для любого $\gamma > 0$ (определения функциональных пространств и соответствующих норм даны в п. 5). А именно, для любых $a, b > 0$ и пробной функции ψ, удовлетворяющей условию

$$\operatorname{supp}\psi \subset \{a^2 \leqslant \xi^2 + \eta^2 \leqslant b^2\},$$

справедлива оценка

$$|\mathcal{R}(\psi)| \leqslant C_{a,b,\gamma}\|\psi\|_{H^{1/2+\gamma}}. \tag{14}$$

Запишем еще одно равенство, которое понадобится нам в дальнейшем

$$\mathcal{R}(\psi) = 2^{k(-N+2)}\mathcal{R}(\psi_k), \tag{15}$$

$$\psi_k(\xi,\eta) = \psi(2^{-k}\xi, 2^{-k}\eta), \quad k \in \mathbb{Z}. \tag{16}$$

Оно получено заменой переменной интегрирования в (9).

Теперь мы покажем, что функционал $\mathcal{R}(\psi)$ может быть продолжен на пробные функции $\psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$. Пусть $\tilde{\chi} \in C_0^\infty(\mathbb{R}_+)$ – произвольная функция, такая что

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} \tilde{\chi}(2^k\rho) = 1, \quad \rho > 0 \tag{17}$$

(в левую часть равенства входит сумма конечного числа слагаемых при любом $\rho > 0$). Введем функции

$$\chi(\xi,\eta) = \tilde{\chi}\left(\sqrt{\xi^2+\eta^2}\right), \quad \chi_k(\xi,\eta) = \chi(2^k\xi, 2^k\eta), \quad k \in \mathbb{Z},$$

и положим по определению

$$\mathcal{R}(\psi) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \mathcal{R}(\chi_k\psi). \tag{18}$$

Так как $\chi_k\psi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N \setminus \{0\}; \mathbb{C}^{2m})$, слагаемые ряда в правой части имеют смысл. Далее мы покажем, что этот ряд является абсолютно сходящимся.

Применив к слагаемым ряда в (18) соотношение (15), а затем неравенство (14), мы получим

$$|\mathcal{R}(\chi_k\psi)| = 2^{k(-N+2)}|\mathcal{R}(\chi\psi_k)| \lesssim 2^{k(-N+2)}\|\chi\psi_k\|_{H^{1/2+\gamma}}. \tag{19}$$

Норма в полученном выражении не превосходит

$$C_{\chi,\gamma}\|\psi_k\|_{H^{1/2+\gamma}} \leqslant C_{\chi,\gamma}\, 2^{kN/2}\left(1+2^{-k}\right)^{1/2+\gamma}\|\psi\|_{H^{1/2+\gamma}}$$

(в последнем неравенстве мы применили (36)). Это дает оценку

$$|\mathcal{R}(\chi_k\psi)| \leqslant C_{\chi,\gamma}\, 2^{k(-N/2+2)}(1+2^{-k})^{1/2+\gamma}\|\psi\|_{H^{1/2+\gamma}}. \tag{20}$$

С другой стороны, для $\gamma = 1/2$ справедлива оценка

$$\|\chi\psi_k\|_{H^{1/2+\gamma}} = \|\chi\psi_k\|_{H^1} \leqslant C_\chi|\chi\psi_k|_1,$$

в которой C_χ зависит от размера носителя функции χ. Поэтому из (19) мы получаем, что

$$|\mathcal{R}(\chi_k\psi)| \leqslant C_\chi 2^{k(-N+2)}|\chi\psi_k|_1. \tag{21}$$

Применив теперь неравенство (37), мы получим оценку для целого $J \geqslant 0$

$$|\mathcal{R}(\chi_k\psi)| \leqslant \frac{C_{\chi,\psi,J}\, 2^{k(-N+2)}}{(1+2^{-k})^J}. \tag{22}$$

Применив к членам ряда (18) оценку (20) при $k \geqslant 0$ и оценку (22) при $k < 0$, мы получим, что ряд оценивается через одну из полунорм функции ψ, задающих топологию в пространстве $\mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$ (мы воспользовались предположением (7)). Поэтому функционал $\mathcal{R}$ задает распределение из $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^N)$. Более того, это распределение принадлежит $H^{-1/2-\gamma}_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^N)$. А именно, для пробных функций ψ, имеющих компактный носитель в шаре радиуса L с центром в начале координат, справедливо

$$|\mathcal{R}(\psi)| \leqslant C_{L,\gamma} \|\psi\|_{H^{1/2+\gamma}}. \tag{23}$$

Действительно, в этом случае члены ряда (18) обращаются в нуль при достаточно больших отрицательных k. Тогда этот ряд можно оценить с помощью неравенства (20), которое зависит от нормы функции ψ в $H^{1/2+\gamma}(\mathbb{R}^N)$.

Отметим, что определение (18) не зависит от выбора функции χ. Это немедленно следует из требования (17) в случае, когда ψ принадлежит $C_0^\infty(\mathbb{R}^N \setminus \{0\})$. В общем случае это вытекает из оценки (23) и того факта, что функции класса $C_0^\infty(\mathbb{R}^N \setminus \{0\})$ плотны в $H^{1/2+\gamma}(\mathbb{R}^N)$, например, при $\gamma = 1/2$.

Покажем теперь, что распределение (10) является решением уравнения (1). В силу определения (18) имеем

$$\langle \hat{u}, (\xi^2 - \eta^2)\varphi \rangle = \mathcal{R}((\xi^2 - \eta^2)\hat{f}\varphi) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \mathcal{R}((\xi^2 - \eta^2)\chi_k \hat{f}\varphi).$$

Поскольку

$$\mathcal{R}((\xi^2 - \eta^2)\chi_k \hat{f}\varphi) = \langle \hat{f}, \chi_k \varphi \rangle,$$

полученный выше ряд равен $\langle \hat{f}, \varphi \rangle$, что эквивалентно требуемому утверждению.

§3. Решение задачи (1), (8) в координатном представлении

Обратное преобразование Фурье $u(x, y)$ функции, определенной равенством (10), является C^∞-гладкой функцией в $\mathbb{R}^N$. Это следует из того, что оно является сверткой обратного преобразования Фурье распределения $\mathcal{R}$ и функции из класса Шварца f.

Далее мы установим равенство

$$u(x, y) = \mathcal{R}(\hat{f} e^{x,y}), \tag{24}$$

в котором
$$e^{x,y}(\xi,\eta) = (2\pi)^{-N} e^{i(\langle x,\xi\rangle - \langle y,\eta\rangle)}.$$
Для вывода данного соотношения рассмотрим произвольную функцию $\varphi(\xi,\eta)$, такую что $\hat\varphi(x,y)$ принадлежит $C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$. Имеем
$$\mathcal{R}(\chi_k \hat f \varphi) = \int\limits_{\mathbb{R}^N} \hat\varphi(x,y)\mathcal{R}(\chi_k \hat f e^{x,y})\,dxdy.$$
Заметим, что ряд
$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} |\mathcal{R}(\chi_k \hat f e^{x,y})|$$
сходится локально равномерно по (x,y). Это следует из оценок (20) и (22) для функции $\psi = \hat f e^{x,y}$, поскольку
$$\begin{aligned}\sum_{k\geqslant 0} |\mathcal{R}(\chi_k \hat f e^{x,y})| &\leqslant C_\chi \|\hat f e^{x,y}\|_{H^{1/2+\gamma}} \sum_{k\geqslant 0} 2^{k(-N/2+2)}(1+2^{-k})^{1/2+\gamma}\\ &\leqslant C_\chi \|\hat f e^{x,y}\|_{H^{1/2+\gamma}},\\ \sum_{k<0} |\mathcal{R}(\chi_k \hat f e^{x,y})| &\leqslant C_{\chi,\hat f e^{x,y},J} \sum_{k<0} \frac{2^{k(-N+2)}}{(1+2^{-k})^J} \leqslant C_{\chi,\hat f e^{x,y},J}.\end{aligned}$$
Тогда ввиду финитности функции $\hat\varphi(x,y)$ мы можем переставить операции суммирования по k и интегрирования по x, y в следующей выкладке
$$\begin{aligned}\langle \hat u, \varphi\rangle = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \mathcal{R}(\chi_k \hat f \varphi) &= \sum_{k\in\mathbb{Z}} \int\limits_{\mathbb{R}^N} \hat\varphi(x,y)\mathcal{R}(\chi_k \hat f e^{x,y})\,dxdy\\ &= \int\limits_{\mathbb{R}^N} \hat\varphi(x,y) \sum_{k\in\mathbb{Z}} \mathcal{R}(\chi_k \hat f e^{x,y})\,dxdy.\end{aligned}$$
Так как полученное равенство выполнено для произвольной функции φ, справедливо соотношение (24).

§4. Асимптотическое поведение решения $u(x,y)$

В этом параграфе мы исследуем асимптотику решения $u(x,y)$ при
$$x = t\theta, \quad y = (t+p)\omega, \tag{25}$$

где $(\theta, \omega, p) \in Z$, когда $t \to +\infty$. Для этого мы воспользуемся представлением (24), правая часть в котором определяется как ряд вида (18). Мы разобьем его на сумму двух:

$$u(x, y) = \sum_{k\,:\,2^k > t} + \sum_{k\,:\,2^k \leqslant t} \mathcal{R}(\chi_k \hat{f} e^{x,y}). \tag{26}$$

Согласно (21) первое слагаемое в правой части по абсолютной величине не превосходит

$$C_\chi \sum_{k\,:\,2^k > t} 2^{k(-N+2)} |\chi \hat{f}_k e_k^{x,y}|_1, \tag{27}$$

где функции $\hat{f}_k$, $e_k^{x,y}$ связаны соответственно с $\hat{f}$, $e^{x,y}$ соотношением вида (16). Для нормы в полученном выражении имеем

$$|\chi \hat{f}_k e_k^{x,y}|_1 \lesssim |\chi \hat{f}_k|_1 \cdot |e_k^{x,y}|_1.$$

Первый сомножитель в правой части не зависит от t и ограничен при всех $k \in \mathbb{Z}$ согласно (37). Для x, y, удовлетворяющих (25), имеем

$$e^{x,y}(\xi, \eta) = (2\pi)^{-N} e^{it(\langle \theta, \xi \rangle - \langle \omega, \eta \rangle)} e^{-ip\langle \omega, \eta \rangle},$$
$$e_k^{x,y}(\xi, \eta) = (2\pi)^{-N} e^{it2^{-k}(\langle \theta, \xi \rangle - \langle \omega, \eta \rangle)} e^{-ip2^{-k}\langle \omega, \eta \rangle}.$$

Из последней формулы вытекает, что

$$|e_k^{x,y}|_1 \lesssim 1 + 2^{-k}(1 + t).$$

Тогда в предположении $2^k > t \geqslant 1$, эта норма также ограничена. Таким образом, ряд (27) не превосходит

$$C \sum_{k\,:\,2^k > t} 2^{k(-N+2)} \lesssim t^{-N+2} = O(t^{-N/2})$$

(последнее равенство следует из предположения (7)), а значит, первое слагаемое в правой части (26) не дает вклада в старший член асимптотики решения.

Перейдем ко второму слагаемому в правой части (26), которое с помощью (15) можно привести к виду

$$\sum_{k\,:\,2^k \leqslant t} 2^{k(-N+2)} \mathcal{R}(\chi \hat{f}_k e_k^{x,y}).$$

Выберем функцию $\varkappa(\xi, \eta)$ из $C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$, равную единице в окрестности множества

$$\{|\xi| = |\eta|\} \cap \operatorname{supp}\chi,$$

и удовлетворяющую условию

$$(\{\xi = 0\} \cup \{\eta = 0\}) \cap \operatorname{supp} \varkappa = \emptyset. \tag{28}$$

Имеем

$$\mathcal{R}((1-\varkappa)\chi \hat{f}_k e_k^{x,y}) = \int\limits_{\mathbb{R}^N} (\tilde{\varkappa}\psi_k e^{it2^{-k}\Phi})(\xi,\eta)\, d\xi d\eta,$$

где

$$\tilde{\varkappa}(\xi,\eta) = \frac{((1-\varkappa)\chi)(\xi,\eta)}{(2\pi)^N(\xi^2-\eta^2)}, \quad \psi(\xi,\eta) = \hat{f}(\xi,\eta)\, e^{-ip\langle\omega,\eta\rangle},$$
$$\Phi(\xi,\eta) = \langle\theta,\xi\rangle - \langle\omega,\eta\rangle,$$

а функции ψ_k связаны с ψ соотношением вида (16). Заметим, что $\tilde{\varkappa} \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$. Поскольку $\partial_{\xi,\eta}\Phi \neq 0$, мы можем применить к интегралу в последнем выражении лемму 2, взяв произвольное μ, получив тем самым, что по абсолютной величине он не превосходит

$$(t2^{-k})^{-\mu}|\tilde{\varkappa}\psi_k|_\mu \lesssim (t2^{-k})^{-\mu}(1+2^{-k})^{-J}|\psi|_\mu.$$

Здесь для оценки нормы $|\tilde{\varkappa}\psi_k|_\mu$ мы применили неравенство (37), взяв в качестве гладкой срезки функцию $\tilde{\varkappa}$. Положим $\mu = [(N+1)/2] \geqslant N/2$, тогда для $2^k \leqslant t$ полученная мажоранта не превосходит

$$\frac{1}{t^{N/2}} 2^{kN/2}(1+2^{-k})^{-J}|\psi|_\mu.$$

Таким образом,

$$\sum_{k\,:\,2^k\leqslant t} 2^{k(-N+2)}|\mathcal{R}((1-\varkappa)\chi\hat{f}_k e_k^{x,y})| \lesssim \frac{1}{t^{N/2}} \sum_{k\in\mathbb{Z}} 2^{k(-N/2+2)}(1+2^{-k})^{-J}$$
$$\lesssim \frac{1}{t^{N/2}},$$

поэтому данный ряд не дает вклада в старший член асимптотики решения.

Далее нам нужно рассмотреть ряд

$$\sum_{k\,:\,2^k\leqslant t} 2^{k(-N+2)}\mathcal{R}(\varkappa\chi\hat{f}_k e_k^{x,y}). \tag{29}$$

Подставим в формулу (9) в качестве ψ функцию $\varkappa\chi\hat{f}_k e_k^{x,y}$ и перейдем в интеграле к сферическим координатам

$$\xi = r\zeta, \quad \eta = s\sigma, \quad \zeta \in S^{d-1}, \quad \sigma \in S^{n-1}, \quad r,s > 0.$$

Мы получим следующее подинтегральное выражение (множитель $(2\pi)^{-N}$ мы опускаем)

$$\frac{s^{n-1}r^{d-1}}{r+s}\left((r-s)I+i0R(\zeta,\sigma)\right)^{-1}(\varkappa\chi\hat{f}_k)(r\zeta,s\sigma)e^{-i2^{-k}ps\langle\omega,\sigma\rangle} \\ \times e^{it2^{-k}(r\langle\theta,\zeta\rangle-s\langle\omega,\sigma\rangle)}.$$

Множитель $(\varkappa\chi)(r\zeta,s\sigma)$ может быть отличен от нуля лишь при

$$r,s\in[a,b]\subset(0,\infty).$$

Здесь условие $r,s\leqslant b$ следует из финитности функций $\varkappa$, χ, а условие $r,s\geqslant a$ – из свойства (28). Далее заменим переменную интегрирования r на $\rho=r/s$. Тогда подинтегральное выражение примет вид

$$\begin{aligned}&\left((\rho-1)I+i0R(\zeta,\sigma)\right)^{-1}\tilde{\varkappa}^s\psi_k^s e^{ist2^{-k}\Phi(\zeta,\sigma,\rho)},\\&\tilde{\varkappa}^s(\zeta,\sigma,\rho)=\frac{s^{N-3}\rho^{d-1}(\varkappa\chi)(s\rho\zeta,s\sigma)}{\rho+1},\\&\psi_k^s(\zeta,\sigma,\rho)=e^{-i2^{-k}ps\langle\omega,\sigma\rangle}\hat{f}_k(s\rho\zeta,s\sigma),\\&\Phi(\zeta,\sigma,\rho)=\rho\langle\theta,\zeta\rangle-\langle\omega,\sigma\rangle.\end{aligned}\tag{30}$$

Ввиду сказанного выше, функция $\tilde{\varkappa}^s$ может быть отлична от нуля лишь при

$$\rho,s\in[a,b]\subset(0,\infty),\tag{31}$$

где интервал $[a,b]$ может отличаться от соответствующего интервала для переменных r,s.

Рассмотрим интеграл от выражения (30) по переменным ζ,σ,ρ (к интегрированию по переменной s мы перейдем позже). Мы опишем его асимптотику при больших t с помощью соотношений (49), (50) основанных на методе стационарной фазы. В качестве большого параметра выступает произведение $st2^{-k}$. Эта асимптотика, как будет показано ниже, определяется поведением подинтегральной функции в окрестности точек (ζ,σ,ρ), таких что $\rho=1$ и имеет место включение

$$(\zeta,\sigma)\in\{(\theta,\omega),(-\theta,-\omega),(-\theta,\omega),(\theta,-\omega)\}.\tag{32}$$

Интересующий нас интеграл можно привести к виду (48) с помощью разбиения единицы и введения локальных координат $\zeta'(\zeta)\in\mathbb{R}^{d-1}$, $\sigma'(\sigma)\in\mathbb{R}^{n-1}$ на сферах S^{d-1}, S^{n-1}. Роль переменной x_n в (48) играет переменная ρ. Если выбранные карты на сферах накрывают какую-либо из точек (32), применяется соотношение (50), в противном случае – оценка (49).

Покажем, что точки (32) полностью определяют асимптотику интеграла. Функции $\tilde{\varkappa}^s$, ψ_k^s, Φ, R рассматриваются как функции локальных координат ζ', σ', ρ. Заметим, что функция Φ удовлетворяет условию (41) леммы 4, поскольку равенство $\partial_{\zeta'}\Phi = 0$ выполнено только если $\zeta(\zeta') = \pm\theta$, а в этом случае

$$\partial_\rho \Phi = \langle \zeta, \theta \rangle = \pm 1.$$

Обратимся к условиям (42), (43), которые в данном контексте касаются поведения функции Φ при $\rho = 1$. Производная $\partial_{\zeta',\sigma'}\Phi|_{\rho=1}$ обращается в нуль лишь в точках (ζ', σ'), таких что соответствующие (ζ, σ) принадлежат набору (32). Легко показать (см. [15]), что в этих точках выполнено

$$\det \partial^2_{\zeta',\sigma'}\Phi \neq 0,$$

причем в первых двух точках в (32) справедливо равенство

$$\operatorname{sgn}\left(\partial^2_{\zeta',\sigma'}\Phi(\zeta'(\pm\theta), \sigma'(\pm\omega), 1)\right) = \pm(n-d).$$

Заметим еще, что

$$\partial_\rho \Phi(\zeta'(\pm\theta), \sigma', \rho) = \pm 1.$$

Опуская некоторые другие детали, связанные с переходом к локальным координатам ζ', σ' (которые также можно найти в [15]), мы приведем вклады в асимптотику точек стационарной фазы в (32), найденные с помощью (50). Вклад первых двух точек равен

$$\begin{aligned} &\frac{i(2\pi)^{N/2}}{(st2^{-k})^{N/2-1}} \sum_{\pm} e^{\pm i\pi(n-d)/4} (\tilde{\varkappa}^s \Theta(\mp R)\psi_k^s)(\zeta'(\pm\theta), \sigma'(\pm\omega), 1) \\ &\quad = \frac{i(2\pi)^{N/2}}{(st2^{-k})^{N/2-1}} P(-\theta, -\omega) \sum_{\pm} e^{\pm i\pi(n-d)/4} (\tilde{\varkappa}^s \psi_k^s)(\pm\theta, \pm\omega, 1). \end{aligned} \tag{33}$$

Здесь мы учли равенство

$$\Theta(-R(\theta,\omega)) = \Theta(R(-\theta,-\omega)) = \Theta(P(-\theta,-\omega) - P(\theta,\omega)) = P(-\theta,-\omega).$$

Вклад последних двух точек в (32) в асимптотику равен

$$\frac{1}{(st2^{-k})^{N/2-1}} \sum_{\pm} C^{\pm}_{d,n} e^{\mp ist2^{-k+1}} (\tilde{\varkappa}^s \Theta(\pm R)\psi_k^s)(\zeta'(\mp\theta), \sigma'(\pm\omega), 1) \tag{34}$$

где $C^{\pm}_{d,n}$ – некоторые постоянные. Это выражение отличается от (33), в том числе, множителями $e^{\mp ist2^{-k+1}}$. Благодаря этому, как будет показано ниже, интеграл от данного выражения по переменной s не дает вклад в главный член асимптотики.

В результате применения соотношений (49), (50) к "локализованному" интегралу выражения (30), записанному в каких-либо локальных координатах ζ', σ', мы получим следующую мажоранту для остатка

$$\frac{C|\tilde{\varkappa}^s \psi_k^s|_{N+2}}{(st2^{-k})^{N/2}}. \tag{35}$$

Здесь норма $|\cdot|_{N+2}$ понимается как норма функции переменных ζ', σ', ρ. Мы можем оценить ее следующим образом. Для любых ζ', σ', ρ, s имеем

$$\begin{aligned}\max|\partial^{\alpha}_{\zeta',\sigma',\rho}(\tilde{\varkappa}^s\psi^s_k)| &\lesssim (1+2^{-k})^{N+2}\max|\partial^{\alpha}_{\zeta',\sigma',\rho}(\hat{f}_k(s\rho\zeta, s\sigma))| \\ &\lesssim (1+2^{-k})^{2(N+2)}\max|(\partial^{\alpha}_{\xi,\eta}\hat{f})(2^{-k}s\rho\zeta, 2^{-k}s\sigma))|.\end{aligned}$$

Здесь максимум берется по $|\alpha| \leqslant N+2$, а ζ и σ рассматриваются как функции переменных ζ' и σ' соответственно. В этой выкладке мы учли, что значения переменных ρ, s можно считать ограниченными ввиду условия (31). В силу этого же условия $\rho, s \geqslant a$, а потому максимум в полученной мажоранте быстро убывает при $k \to -\infty$, так как функция $\hat{f}$ из класса Шварца. Поэтому для любого целого $J \geqslant 0$ справедливо

$$|\tilde{\varkappa}^s\psi^s_k|_{N+2} \lesssim (1+2^{-k})^{-J}.$$

Теперь мы можем показать, что остаток (35) не дает вклад в асимптотику функции $u(x,y)$. Для этого мы должны оценить интеграл от него по переменной s. В силу включения (31) имеем

$$\int\limits_0^{\infty}\frac{|\tilde{\varkappa}^s\psi^s_k|_{N+2}}{(st2^{-k})^{N/2}}\,ds \lesssim \frac{2^{kN/2}(1+2^{-k})^{-J}}{t^{N/2}}.$$

Тогда вклад остатка в ряд (29) по абсолютной величине не превосходит

$$\frac{1}{t^{N/2}}\sum_{k\,:\,2^k\leqslant t}\frac{2^{k(-N/2+2)}}{(1+2^{-k})^J} \lesssim \frac{1}{t^{N/2}}$$

(мы воспользовались предположением (7)).

Оценим теперь вклад выражения (34) в ряд (29). Рассмотрим, для примера, слагаемое со знаком "+". Нам удобно перейти от локальных координат ζ', σ' обратно к исходным координатам ζ, σ. Ввиду включения (31) имеем

$$\int_0^\infty e^{-ist2^{-k+1}}(\tilde{\varkappa}^s\psi_k^s)(-\theta,\omega,1)ds = \frac{1}{2}\int_a^b e^{-ist2^{-k+1}}s^{N-3}(\varkappa\chi\hat{f}_k)(-s\theta,s\omega)ds$$
$$= \frac{1}{it2^{-k+2}}\int_a^b e^{-ist2^{-k+1}}\partial_s\left(s^{N-3}(\varkappa\chi\hat{f}_k)(-s\theta,s\omega)\right)ds.$$

Производная по s под интегралом по абсолютной величине не превосходит

$$C|\varkappa\chi\hat{f}_k|_1 \leqslant C(1+2^{-k})^{-J}$$

(мы применили (37)). Поэтому вклад слагаемых (34) в ряд (29) можно оценить величиной

$$\frac{C}{t^{N/2}}\sum_{k\in\mathbb{Z}}\frac{2^{k(-N/2+2)}}{(1+2^{-k})^J} \lesssim \frac{1}{t^{N/2}}.$$

Обратимся, наконец, к выражению (33). Интеграл от него по переменной s, умноженный на $(2\pi)^{-N}$ (ранее мы отбрасывали этот множитель для краткости), равен

$$\frac{i(2\pi)^{-N/2}}{(t2^{-k})^{N/2-1}}P_0\sum_{\pm}e^{\pm i\pi(n-d)/4}\int_0^\infty s^{-N/2+1}(\tilde{\varkappa}^s\psi_k^s)(\pm\theta,\pm\omega,1)ds,$$

где используется обозначение $P_0 = P(-\theta,-\omega)$. Подставим сюда определения функций $\tilde{\varkappa}^s$ и ψ_k^s и учтем, что наш выбор функции $\varkappa$ обеспечивает равенство

$$(\varkappa\chi)(\pm s\theta,\pm s\omega) = \chi(\pm s\theta,\pm s\omega).$$

Тогда интеграл в предыдущем выражении может быть записан в виде

$$\frac{1}{2}\int_0^\infty s^{N/2-2}(\chi\hat{f}_k)(\pm s\theta,\pm s\omega)e^{\mp i2^{-k}ps}ds$$
$$= 2^{k(N/2-1)-1}\int_0^\infty s^{N/2-2}(\chi_k\hat{f})(\pm s\theta,\pm s\omega)e^{\mp ips}ds,$$

поэтому предыдущее выражение равно

$$2^{k(N-2)}\frac{i(2\pi)^{-N/2}}{2t^{N/2-1}}P_0\sum_{\pm}e^{\pm i\pi(n-d)/4}\int\limits_0^\infty s^{N/2-2}(\chi_k\hat{f})(\pm s\theta,\pm s\omega)e^{\mp ips}ds.$$

Подставив это выражение в ряд (29), мы получим

$$\frac{i(2\pi)^{-N/2}}{2t^{N/2-1}}P_0\sum_{\pm}e^{\pm i\pi(n-d)/4}\int\limits_0^\infty s^{N/2-2}(\chi^t\hat{f})(\pm s\theta,\pm s\omega)e^{\mp ips}ds,$$

где

$$\chi^t=\sum_{k\,:\,2^k\leqslant t}\chi_k.$$

Ввиду условия (17) имеем

$$\chi^t(\pm s\theta,\pm s\omega)=1-\sum_{k\,:\,2^k>t}\tilde{\chi}\left(2^{k+1/2}s\right),$$

откуда

$$\chi^t(\pm s\theta,\pm s\omega)=1,\quad s\geqslant\frac{1}{t\sqrt{2}}\max\operatorname{supp}\tilde{\chi}.$$

Поэтому интеграл в предыдущем выражении равен

$$\int\limits_0^\infty s^{N/2-2}e^{\mp ips}\hat{f}(\pm s\theta,\pm s\omega)ds+O\left(\frac{1}{t^{N/2-1}}\right).$$

А тогда все выражение с точностью до $O(t^{-N+2})=O(t^{-N/2})$ равно

$$\frac{i(2\pi)^{-N/2}}{2t^{N/2-1}}P_0\sum_{\pm}e^{\pm i\pi(n-d)/4}\int\limits_0^\infty s^{N/2-2}e^{\mp ips}\hat{f}(\pm s\theta,\pm s\omega)ds.$$

Итак, мы установили асимптотику (2) с асимптотическим коэффициентом

$$F(\theta,\omega,p)=\frac{i}{2}(2\pi)^{-N/2}P_0\sum_{\pm}e^{\pm i\pi(n-d)/4}\int\limits_0^\infty s^{N/2-2}e^{\mp ips}\hat{f}(\pm s\theta,\pm s\omega)ds$$

и оценкой остатка $O(t^{-N/2})$. Найденный коэффициент удовлетворяет условию (8), поскольку ввиду (5) справедливо

$$P(\theta,\omega)P_0=P(\theta,\omega)P(-\theta,-\omega)=0.$$

§5. Вспомогательные утверждения

В этом параграфе n – произвольная размерность, не связанная с размерностью переменной y в уравнении (1).

Через H^μ, $\mu \in \mathbb{R}$, мы обозначим пространство Соболева в $\mathbb{R}^n$ с нормой

$$\|\psi\|_{H^\mu} = \left(\int\limits_{\mathbb{R}^n} |\hat{\psi}(\xi)|^2 \left(1+\xi^2\right)^\mu d\xi \right)^{1/2}.$$

Для целого $\mu \geqslant 0$ через $|\psi|_\mu$ мы будем обозначать норму $\|\psi\|_{C^\mu(\mathbb{R}^n)}$.

Покажем, что для $\mu \geqslant 0$, $k \in \mathbb{Z}$, $\psi \in H^\mu(\mathbb{R}^n)$, справедливо

$$\|\psi_k\|_{H^\mu} \leqslant 2^{kn/2} \left(1+2^{-k}\right)^\mu \|\psi\|_{H^\mu}, \tag{36}$$

где $\psi_k(x) = \psi(2^{-k}x)$. Имеем

$$\hat{\psi}_k(\xi) = 2^{kn}\hat{\psi}(2^k\xi).$$

Поэтому

$$\|\psi_k\|^2_{H^\mu} = \int\limits_{\mathbb{R}^n} |\hat{\psi}_k(\xi)|^2 \left(1+\xi^2\right)^\mu d\xi = 2^{2kn} \int\limits_{\mathbb{R}^n} |\hat{\psi}(2^k\xi)|^2 \left(1+\xi^2\right)^\mu d\xi$$
$$= 2^{kn} \int\limits_{\mathbb{R}^n} |\hat{\psi}(\xi)|^2 \left(1+2^{-2k}\xi^2\right)^\mu d\xi.$$

Поскольку

$$1+2^{-2k}\xi^2 \leqslant (1+2^{-2k})(1+\xi^2),$$

мы получаем оценку

$$\|\psi_k\|^2_{H^\mu(\mathbb{R}^n)} \leqslant 2^{kn} \left(1+2^{-2k}\right)^\mu \|\psi\|^2_{H^\mu},$$

из которой следует (36).

Пусть $\chi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n \setminus \{0\})$, $\psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Покажем, что для любых целых $\mu \geqslant 0$, $J \geqslant 0$ и $k \in \mathbb{Z}$, выполнено

$$|\chi\psi_k|_\mu \leqslant \frac{C_{\chi,\psi,J,\mu}}{(1+2^{-k})^J}, \tag{37}$$

где $C_{\chi,\psi,J,\mu}$ при фиксированных χ, J, μ оценивается через одну из полунорм функции ψ, задающих топологию в пространстве $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Так как носитель функции χ отделен от нуля, для некоторого $a > 0$ имеем

$$\max_{x\in\mathbb{R}^n,|\alpha|\leqslant\mu} |\partial^\alpha(\chi(x)\psi_k(x))| = \max_{|x|\geqslant a,|\alpha|\leqslant\mu} |\partial^\alpha(\chi(x)\psi(2^{-k}x))|$$
$$\leqslant C_{\chi,\mu}(1+2^{-k})^\mu \max_{|x|\geqslant a,|\alpha|\leqslant\mu} |(\partial^\alpha\psi)(2^{-k}x)|$$
$$= C_{\chi,\mu}(1+2^{-k})^\mu \max_{|x|\geqslant 2^{-k}a,|\alpha|\leqslant\mu} |\partial^\alpha\psi(x)| \leqslant \frac{C_{\chi,\psi,J,\mu}(1+2^{-k})^\mu}{(1+2^{-k}a)^J}.$$

А так как

$$(1+2^{-k}a)^{-J} \leqslant C_{a,J}(1+2^{-k})^{-J},$$

мы получаем (37).

Далее в этом параграфе мы будем рассматривать поведение при $t\to\infty$ сингулярного интеграла вида

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} \frac{\psi(x)e^{it\Phi(x)}}{x_n \pm i0}\,dx,$$

а также его “матричного” аналога (48). Здесь мы во многом повторяем схему вывода вспомогательных утверждений работы [18], в которой рассматривался только скалярный случай. Еще одно отличие состоит в том, что мы приводим оценки остатков в асимптотиках, которые необходимы для анализа решения (10).

Лемма 1. *Пусть $\psi \in C_0^\infty(a,b)$. Тогда для любого целого $\mu \geqslant 0$ и вещественного $t \neq 0$ справедливо*

$$\left|\int\limits_{\mathbb{R}} \frac{\psi(z)e^{itz}}{z\pm i0}\,dz \pm 2\pi i\,\Theta(\mp t)\psi(0)\right| \leqslant C_{\mu,a,b}|\psi|_{\mu+1}\,|t|^{-\mu}. \qquad (38)$$

Доказательство. Мы рассмотрим случай, когда левая часть в (38) содержит распределение $1/(z+i0)$. Соответствующий интеграл равен значению этого распределения на пробной функции $\psi(z)e^{itz}$ переменной z:

$$\int\limits_{\mathbb{R}} \frac{\psi(z)e^{itz}}{z+i0}\,dz = \left\langle \frac{1}{z+i0}, \psi(z)e^{itz}\right\rangle_z.$$

Полученное выражение равно значению преобразования Фурье указанного распределения, которое равно $-2\pi i\,\Theta(\xi)$, на обратном преобразовании Фурье пробной функции. Последнее (как функция переменной ξ) равно $\check{\psi}(\xi+t)$. Поэтому

$$\left\langle \frac{1}{z+i0}, \psi(z)e^{itz} \right\rangle_z = -2\pi i \int\limits_{\mathbb{R}} \check{\psi}(\xi+t)\,\Theta(\xi)\,d\xi = -2\pi i \int\limits_t^{\infty} \check{\psi}(\xi)d\xi. \quad (39)$$

Полученное выражение равно

$$-2\pi i \int\limits_{\mathbb{R}} \check{\psi}(\xi)d\xi + 2\pi i \int\limits_{-\infty}^{t} \check{\psi}(\xi)d\xi = -2\pi i\psi(0) + 2\pi i \int\limits_{-\infty}^{t} \check{\psi}(\xi)d\xi.$$

Интеграл в данном выражении в случае $t<0$, также как и интеграл в итоговом выражении в (39) в случае $t>0$, легко можно оценить через правую часть (38). $\square$

Лемма 2. *Пусть V – ограниченное открытое множество в $\mathbb{R}^n$, $\psi \in C_0^\infty(V)$, а для функции $\Phi \in C^\infty(\mathbb{R}^n;\mathbb{R})$ выполнено*

$$\partial\Phi(x) \neq 0, \quad x \in \overline{V}.$$

Тогда для любого целого $\mu \geqslant 0$ и вещественного $t \neq 0$ справедливо

$$\left| \int\limits_{\mathbb{R}^n} \psi(x)e^{it\Phi(x)}dx \right| \leqslant C_{\mu,\Phi,V}|\psi|_\mu\,|t|^{-\mu}.$$

Доказательство. Применим формулу интегрирования по частям

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} \psi(x)e^{it\Phi(x)}dx = -it^{-1} \int\limits_{\mathbb{R}^n} \frac{\psi(x)}{|\partial\Phi(x)|^2}\langle\partial\Phi(x),\partial\rangle e^{it\Phi(x)}\,dx$$
$$= it^{-1} \int\limits_{\mathbb{R}^n} (\langle\partial\Phi(x),\partial\rangle + \Delta\Phi(x)) \left(\frac{\psi(x)}{|\partial\Phi(x)|^2}\right) e^{it\Phi(x)}\,dx.$$

Повторив это действие нужное число раз, можно получить требуемую оценку. $\square$

Далее используется обозначение $x' = (x_1, \dots, x_{n-1})$.

Лемма 3. *Пусть $n \geqslant 2$, V – ограниченное открытое множество в $\mathbb{R}^n$, $\psi \in C_0^\infty(V)$, а для функции $\Phi \in C^\infty(\mathbb{R}^n;\mathbb{R})$ выполнено*

$$\partial_{x'}\Phi(x) \neq 0, \quad x \in \overline{V}.$$

Тогда для любого целого $\mu \geqslant 0$ и вещественного $t \neq 0$ справедливо

$$\left|\int\limits_{\mathbb{R}^n} \frac{\psi(x)e^{it\Phi(x)}}{x_n \pm i0}\,dx\right| \leqslant C_{\mu,\Phi,V}|\psi|_{\mu+2}|t|^{-\mu}. \tag{40}$$

Доказательство. Для произвольного $\varepsilon > 0$ имеем

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} \frac{\psi(x)e^{it\Phi(x)}}{x_n \pm i\varepsilon}\,dx$$
$$= -it^{-1}\int\limits_{\mathbb{R}^n} \frac{\psi(x)}{(x_n \pm i\varepsilon)|\partial_{x'}\Phi(x)|^2}\langle\partial_{x'}\Phi(x),\partial_{x'}\rangle e^{it\Phi(x)}\,dx$$
$$= it^{-1}\int\limits_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{x_n \pm i\varepsilon}(\langle\partial_{x'}\Phi(x),\partial_{x'}\rangle + \Delta_{x'}\Phi(x))\left(\frac{\psi(x)}{|\partial_{x'}\Phi(x)|^2}\right)e^{it\Phi(x)}\,dx.$$

Повторив это действие μ раз, мы получим выражение вида

$$t^{-\mu-1}\int\limits_{\mathbb{R}^n} \frac{\psi_{\mu+1}(x)e^{it\Phi(x)}}{x_n \pm i\varepsilon}\,dx.$$

Устремив ε к нулю, мы получим, что

$$\left|\int\limits_{\mathbb{R}^n} \frac{\psi(x)e^{it\Phi(x)}}{x_n \pm i0}\,dx\right| = |t|^{-\mu-1}\left|\int\limits_{\mathbb{R}^n} \frac{\psi_{\mu+1}(x)e^{it\Phi(x)}}{x_n \pm i0}\,dx\right|$$
$$\leqslant C|t|^{-\mu-1}\|\psi_{\mu+1}e^{it\Phi}\|_{H^{1/2+\gamma}}$$

для $\gamma > 0$. Выберем $\gamma = 1/2$ и заметим, что

$$\|\psi_{\mu+1}e^{it\Phi}\|_{H^{1/2+\gamma}} \leqslant C_V|\psi_{\mu+1}e^{it\Phi}|_1 \leqslant C_{\mu,\Phi,V}|\psi|_{\mu+2}|t|,$$

откуда вытекает (40). □

Лемма 4. *Пусть $n \geqslant 2$, V – ограниченное открытое множество в $\mathbb{R}^n$, содержащее начало координат, $\psi \in C_0^\infty(V)$, а функция $\Phi \in$*

$C^\infty(\mathbb{R}^n;\mathbb{R})$ *удовлетворяет условиям*

$$\partial\Phi(x) \neq 0, \quad x \in \overline{V}, \tag{41}$$

$$\partial_{x'}\Phi(x',0) \neq 0, \quad (x',0) \in \overline{V} \setminus \{0\}, \tag{42}$$

$$\partial_{x'}\Phi(0) = 0, \quad \det \partial^2_{x'}\Phi(0) \neq 0. \tag{43}$$

Тогда выполнено соотношение

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} \frac{\psi(x)e^{it\Phi(x)}}{x_n \pm i0}\,dx$$

$$= \frac{\mp i(2\pi)^{\frac{n+1}{2}}}{t^{\frac{n-1}{2}}} \,|\det \partial^2_{x'}\Phi(0)|^{-1/2} e^{i\pi\,\mathrm{sgn}(\partial^2_{x'}\Phi(0))/4} e^{it\Phi(0)}\Theta(\mp\partial_{x_n}\Phi(0))\psi(0)$$

$$+ O(t^{-(n+1)/2}), \quad t \to +\infty, \tag{44}$$

где $\mathrm{sgn}(\partial^2_{x'}\Phi(0))$ *равно разности количества положительных и отрицательных собственных чисел матрицы* $\partial^2_{x'}\Phi(0)$. *При этом для любого* $t \geqslant 1$ *остаток в правой части* (44) *оценивается величиной*

$$Ct^{-(n+1)/2}|\psi|_{n+3}, \tag{45}$$

где C *не зависит от* t *и* ψ.

Доказательство. Из условия (41) и первого условия в (43) следует, что $\partial_{x_n}\Phi(0) \neq 0$. Пусть гладкая функция $\chi(x)$ имеет носитель в окрестности нуля, в которой выполнено $\partial_{x_n}\Phi \neq 0$. Пусть также $\chi(x) = 1$ при малых x. Интеграл в (44) можно представить в виде суммы

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} \frac{(\chi\psi e^{it\Phi})(x)}{x_n \pm i0}\,dx + \int\limits_{\mathbb{R}^n} \frac{((1-\chi)\psi e^{it\Phi})(x)}{x_n \pm i0}\,dx. \tag{46}$$

Покажем, что второе слагаемое оценивается величиной (45) при $t \geqslant 1$. Разобьем его на сумму двух слагаемых

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} \frac{\zeta(x_n)((1-\chi)\psi e^{it\Phi})(x)}{x_n \pm i0}\,dx + \int\limits_{\mathbb{R}^n} \frac{(1-\zeta(x_n))((1-\chi)\psi e^{it\Phi})(x)}{x_n}\,dx,$$

где ζ – функция из $C_0^\infty(\mathbb{R})$, равная единице в окрестности нуля. Ввиду условия (41) и компактности носителя функции $\psi(x)$ ко второму слагаемому применима лемма 2. В качестве функции $\psi(x)$ в лемме 2 следует взять выражение

$$(1-\zeta(x_n))(1-\chi(x))\psi(x)/x_n$$

и положить $\mu = n + 1$. Ввиду условия (42) к первому слагаемому в предыдущем выражении применима лемма 3, если функция ζ сосредоточена в достаточно малой окрестности нуля. Как и в предыдущем случае, здесь следует положить $\mu = n + 1$.

Обратимся к первому слагаемому в (46). Его можно записать в виде

$$\int\limits_{\mathbb{R}^{n-1}} dx' \int\limits_{\mathbb{R}} \frac{(\chi\psi e^{it\Phi})(x)}{x_n \pm i0}\, dx_n. \tag{47}$$

Найдем асимптотику внутреннего интеграла. В силу нашего выбора функции χ на носителе подинтегральной функции выполнено условие $\partial_{x_n}\Phi \neq 0$, поэтому знак этой производной можно считать постоянным. Рассмотрим сначала случай $\partial_{x_n}\Phi > 0$. Сделав замену переменной интегрирования $x_n \mapsto z = \Phi(x', x_n) - \Phi(x', 0)$ (обратное отображение мы обозначим $x_n(x', z)$) во внутреннем интеграле в (47), мы получим

$$e^{it\Phi(x',0)} \int\limits_{\mathbb{R}} \frac{1}{z \pm i0}\, \frac{z}{x_n(x', z)} \partial_z x_n(x', z)\, \chi(x)\psi(x) e^{itz}\, dz.$$

К полученному интегралу применима лемма 1. Поскольку

$$\frac{z}{x_n}\Big|_{z=0} = \partial_{x_n}\Phi(x', 0),$$

имеем

$$\frac{z}{x_n(x', z)} \partial_z x_n(x', z)\, \chi(x)\psi(x)\big|_{z=0} = (\chi\psi)(x', 0).$$

Применив лемму 1 с $\mu = [n/2] + 1$, мы получим, что внутренний интеграл в (47) в случае $\partial_{x_n}\Phi > 0$ при $t \to +\infty$ имеет асимптотику

$$\mp 2\pi i \Theta(\mp 1)\, (\chi\psi e^{it\Phi})(x', 0),$$

а остаток оценивается величиной

$$C|\psi|_{[n/2]+2}\, t^{-[n/2]-1},$$

которая не превосходит (45) при $t \geqslant 1$. Предыдущее выражение очевидным образом обобщается на случай произвольного знака $\partial_{x_n}\Phi$ в виде

$$\mp 2\pi i \Theta(\mp \partial_{x_n}\Phi(0))\, (\chi\psi e^{it\Phi})(x', 0).$$

Мы получаем, что интеграл (47) при $t \to +\infty$ равен

$$\mp 2\pi i \Theta(\mp \partial_{x_n}\Phi(0)) \int\limits_{\mathbb{R}^{n-1}} (\chi\psi e^{it\Phi})(x', 0)\, dx'$$

с точностью до остатка, который можно оценить величиной (45). Ввиду (43) к интегралу в полученном выражении применим стандартный метод стационарной фазы (если носитель функции $\chi(x)$ сосредоточен в достаточно малой окрестности нуля), который дает следующую асимптотику:

$$\left(\frac{2\pi}{t}\right)^{(n-1)/2} |\det \partial^2_{x'}\Phi(0)|^{-1/2} e^{i\pi\,\mathrm{sgn}(\partial^2_{x'}\Phi(0))/4} e^{it\Phi(0)}\psi(0).$$

Остаток в этой асимптотике оценивается мажорантой [17, теорема 7.7.5]

$$C|\psi|_{n+3}\, t^{-(n+1)/2}$$

(в случае нечетного n можно взять $|\psi|_{n+2}$). Таким образом, мы получаем (44). $\square$

Нам понадобится оценка вида (40) и асимптотика вида (44) для интеграла

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} (x_n I + i0R(x))^{-1}\psi(x)e^{it\Phi(x)}dx, \tag{48}$$

где $\psi \in C_0^\infty(V;\mathbb{C}^q)$, R – функция со значениями в $\mathrm{Mat}(q\times q,\mathbb{C})$, обладающая свойствами (11) на множестве $\overline{V}$. Мы используем представление интеграла (48), аналогичное (13). А именно, с помощью равенства (12) мы можем представить его в виде

$$\sum_{\pm}\int\limits_{\mathbb{R}^n} \frac{\psi_\pm(x)e^{it\Phi(x)}}{x_n \pm i0}\,dx, \quad \psi_\pm(x) = \Theta\left(\pm R(x)\right)\psi(x).$$

Функции $\Theta(\pm R(x))$ являются C^∞-гладкими в окрестности носителя функции ψ, так как это выполнено для матрицы $R(x)$, и ее спектр отделен от нуля. Из данного представления следует, что при выполнении условий леммы 3 имеет место оценка

$$\left|\int\limits_{\mathbb{R}^n} (x_n I + i0R(x))^{-1}\psi(x)e^{it\Phi(x)}dx\right| \leqslant C_{\mu,\Phi,R,V}|\psi|_{\mu+2}|t|^{-\mu}, \tag{49}$$

а при выполнении условий леммы 4 имеет место асимптотика

$$\int_{\mathbb{R}^n} (x_n I + i0R(x))^{-1}\psi(x)e^{it\Phi(x)}dx$$

$$= \frac{i(2\pi)^{\frac{n+1}{2}}}{t^{\frac{n-1}{2}}} |\det \partial^2_{x'}\Phi(0)|^{-1/2} e^{i\pi \operatorname{sgn}(\partial^2_{x'}\Phi(0))/4} e^{it\Phi(0)}$$

$$\times \left[\Theta(\partial_{x_n}\Phi(0))\Theta(-R(0)) - \Theta(-\partial_{x_n}\Phi(0))\Theta(R(0))\right]\psi(0) + O(t^{-(n+1)/2}),$$

$$t \to +\infty, \quad (50)$$

остаток в которой при $t \geqslant 1$ оценивается мажорантой (45).

Список литературы

1. А. С. Благовещенский, *О некоторых новых корректных задачах для волнового уравнения.* — Труды V Всесоюзного симпозиума по дифракции и распространению волн (1970), Ленинград, Наука (1971), pp. 29–35.
2. П. Лакс, Р. Филлипс, *Теория рассеяния*, Москва, Мир (1971).
3. H. E. Moses, R. T. Prosser, *Acoustic and Electromagnetic Bullets: Derivation of New Exact Solutions of the Acoustic and Maxwell's Equations.* — SIAM J. Appl. Math. **50**, No. 5 (1990), 1325–1340.
4. А. П. Киселев, *Локализованные световые волны: параксиальные и точные решения волнового уравнения (обзор).* — Оптика и спектроскопия **102**, No. 4 (2007), 661–681.
5. А. Б. Плаченов, *Выражение энергии акустического, электромагнитного и упругого волнового поля через его асимптотику на больших временах и расстояниях.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **493** (2020), 269–287.
6. М. И. Белишев, А. Ф. Вакуленко, *Об одной задаче управления для волнового уравнения в $\mathbb{R}^3$.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **332** (2006), 19–37.
7. А. С. Благовещенский, *О характеристической задаче для ультрагиперболического уравнения.* — Матем. сб. **63:105** (1964), No. 1, 137–168.
8. М. А. Семенов-Тян-Шанский, *Гармонический анализ на римановых симметрических пространствах отрицательной кривизны и теория рассеяния.* — ДАН СССР **219**, No. 6 (1974), 1330–1333.
9. Georges de Rham, *Solution élémentaire d'opérateurs différentiels du second ordre.* — Annales de l'institut Fourier **8** (1958), 337–366.
10. И. М. Гельфанд, Г. Е. Шилов, *Обобщенные функции и действия над ними*, Москва (1959).
11. A. Melin, *Intertwining methods in the problem of inverse scattering.* — Journées Équations aux dérivées partielles (1986), 1–8.
12. A. Holst, A. Melin, 2004, *Intertwining Operators in Inverse Scattering.* — In: Bingham, K., Kurylev, Y.V., Somersalo, E. (eds) *New Analytic and Geometric Methods in Inverse Problems*, Springer, Berlin, Heidelberg (2004).

13. M. N. Demchenko, *The analogues of advanced and retarded fundamental solutions for ultrahyperbolic equation.* — Proceedings of the International Conference Days on Diffraction 2023, 36–39.
14. N. Ortner, P. Wagner, *Fourier transformation of O(p, q)-invariant distributions. Fundamental solutions of ultra-hyperbolic operators.* — J. Math. Anal. Appl. **450** (2017), 262–292.
15. М. Н. Демченко, *Существование решения задачи рассеяния для ультрагиперболического уравнения.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **521** (2023), 79–94.
16. M. N. Demchenko, *On the scattering problem for the nonhomogeneous ultrahyperbolic equation.* — Proceedings of the International Conference Days on Diffraction 2024 (готовится к печати).
17. Л. Хёрмандер, *Анализ линейных дифференциальных операторов с частными производными*, том 1: Теория распределений и анализ Фурье, М. Мир (1986).
18. М. Н. Демченко, *Асимптотические свойства решений одного ультрагиперболического уравнения.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **516** (2022), 40–64.

Demchenko M. N. Existence of a solution to the nonhomogeneous ultrahyperbolic equation.

The nonhomogeneous ultrahyperbolic equation in $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^n$ is considered. An additional condition prescribing the behavior of a solution to the equation at the infinity is proposed. It is proved that the problem for the equation in consideration with such a condition is not overdetermined. The solution is given in a form of a singular integral, and the corresponding asymptotics is found with the use of the stationary phase method.

С.-Петербургское отделение
Математического института
им. В. А. Стеклова РАН,
Фонтанка 27, 191023 Санкт-Петербург, Россия
E-mail: demchenko@pdmi.ras.ru

Поступило 1 октября 2024 г.