Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 533, 2024 г.

М. И. Белишев, А. Ф. Вакуленко

ТРЕХМЕРНАЯ ОБРАТНАЯ ЗАДАЧА АКУСТИЧЕСКОГО РАССЕЯНИЯ (BC-МЕТОД)

§1. Введение

О работе. Метод граничного управления (*BC-метод*) это один из подходов к обратным задачам математической физики [2–4, 8, 9]. Он имеет междисциплинарный характер и использует разнообразные связи обратных задач с теорией систем и теорией управления, функциональным анализом (функциональные модели операторов, банаховы алгебры), асимптотическими методами (геометрической оптикой), комплексным анализом. В данной работе предлагается версия BC-метода для трехмерной обратной задачи рассеяния для локально возмущенного волнового (акустического) уравнения. Ее особенность и преимущество состоят в локальном (оптимальном по времени) восстановлении подлежащих определению параметров. Это свойство востребовано в актуальных приложениях, таких как акустика и геофизика.

Постановки и результаты.

• Обозначим $B_R(x):=\{x'\in\mathbb{R}^3 \mid |x-x'|<R\}$, $S^2:=\{\theta\in\mathbb{R}^3 \mid |\theta|=1\}$, $\Sigma:=[0,\infty)\times S^2$. Пусть $q\in L_\infty(\mathbb{R}^3)$ есть вещественная финитная функция (*потенциал*) и выполнено $\operatorname{supp} q\subset B_a(0)$.

Рассматривается система

$$u_{tt}-\Delta u+qu=0, \qquad (x,t)\in\mathbb{R}^3\times(-\infty,0); \tag{1}$$

$$u\,|_{|x|<-t}=0, \qquad t<0; \tag{2}$$

$$\lim_{s\to-\infty} s\,u((-s+\tau)\,\omega,s)=f(\tau,\omega), \qquad (\tau,\omega)\in\Sigma; \tag{3}$$

Ключевые слова: трехмерная динамическая система, описываемая локально возмущенным волновым уравнением, определение потенциала по данным рассеяния, метод граничного управления.

в которой $f \in L_2(\Sigma)$ есть *управление*, $u = u^f(x,t)$ – решение (*волна*); значение $t = 0$ считается финальным моментом. В силу гиперболичности системы, ее расширение

$$u_{tt} - \Delta u + qu = 0 \qquad \text{в} \ \ \{(x,t) \mid x \in \mathbb{R}^3, \ -\infty < t < |x|\}; \tag{4}$$

$$u\,|_{|x|<-t} = 0, \qquad t < 0; \tag{5}$$

$$\lim_{s\to-\infty} s\,u((-s+\tau)\,\omega, s) = f(\tau,\omega), \qquad (\tau,\omega) \in \Sigma; \tag{6}$$

корректно определено. Расширенной системе приписывается *оператор реакции*

$$(Rf)(\tau,\omega) := \lim_{s\to+\infty} s\,u^f((s+\tau)\,\omega, s), \quad (\tau,\omega) \in \Sigma.$$

Обратная задача, постановка которой уточняется ниже, состоит в определении q по заданному R.

• Для формулировки результата введем пространства $\mathscr{F} := L_2(\Sigma)$ и $\mathscr{H} := L_2(\mathbb{R}^3)$ вместе с семействами их подпространств $\mathscr{F}^\xi := \{f \in \mathscr{F} \mid f|_{\tau<\xi} = 0\}$ и $\mathscr{H}^\xi := \{y \in \mathscr{H} \mid \ y\,|_{B_\xi(0)} = 0\}$ при $\xi > 0$. Пусть X^ξ есть проектор в $\mathscr{F}$ на $\mathscr{F}^\xi$, срезающий управления на $\Sigma^\xi := \{(\tau,\omega) \in \Sigma \mid \tau \geqslant \xi\}$.

Оператор $W : \mathscr{F} \to \mathscr{H}$, $Wf := u^f(\,\cdot\,,0)$ ограничен (см., например, [11]). По гиперболичности системы, из $f \in \mathscr{F}^\xi$ следует $u^f(\,\cdot\,,0) \in \mathscr{H}^\xi$, а значения волны $u^f(\,\cdot\,,0)$ определяются частью $q\big|_{|x|\geqslant\xi}$ потенциала (не зависят от $q\big|_{|x|<\xi}$). По той же причине, значения $(Rf)|_{\tau\geqslant\xi}$ также определяются значениями $q\big|_{|x|\geqslant\xi}$. Такая локальность соответствия $q \Rightarrow R$ мотивирует следующую постановку *обратной задачи*: для произвольно выбранного $\xi > 0$, определить $q\ \big|_{|x|\geqslant\xi}$ по оператору $X^\xi R \restriction \mathscr{F}^\xi$, действующему в подпространстве "запаздывающих" управлений $\mathscr{F}^\xi$.

Наш главный результат состоит в следующем. Для произвольного $\xi > 0$, по заданному оператору $R^\xi := X^\xi R \restriction \mathscr{F}^\xi$, действующему в $\mathscr{F}^\xi$, мы восстанавливаем оператор $W^\xi := W \restriction \mathscr{F}^\xi$, который действует из $\mathscr{F}^\xi$ в $\mathscr{H}^\xi$. Соответствующая процедура интерпретируется как *визуализация волн*. Знание W^ξ дает возможность восстановить график оператора $(\Delta - q) \restriction \mathscr{H}^\xi$. График очевидным образом определяет часть $q\,|_{\mathbb{R}^3\setminus B_\xi(0)}$ потенциала. Локальность (оптимальность по времени) восстановления $R^\xi \Rightarrow q|_{\mathbb{R}^3\setminus B_\xi(0)}$ является специфической чертой и главным преимуществом BC-метода.

Комментарии.

• Рассматриваемая задача – "давний долг" BC-метода. Ее решение подготовлено работами [10–13]. Заключительный шаг сделан в недавней работе [15], которая прояснила характер управляемости системы (1)–(3). Это соответствует тезису теории систем, которым руководствуется BC-метод: чем лучше система управляема, тем богаче информация, которую можно извлечь о системе из внешних наблюдений над ней [18]. Удачным оказалось то, что установленный характер управляемости позволил использовать BC-технику [15].

• Еще один тезис философского плана из теории систем [18], которому следует BC-метод, состоит в следующем. Наблюдатель, проводящий внешние измерения над системой, не имеет возможности оперировать с ее (невидимыми) внутренними состояниями. Для восстановления системы наблюдатель создает и использует "копии" внутренних состояний, извлекая их из данных измерений. Создание копий недоступных внутренних состояний интерпретируется как их *визуализация*. Во всех версиях BC-метода такие копии присутствуют и используются в явной или неявной форме. В данной работе эту роль играет пространство $\widetilde{\mathscr{H}^\xi}$, элементы которого доставляют копии $\widetilde{u}^f$ невидимых наблюдателю волн u^f из $\mathscr{H}^\xi$. Пространство $\widetilde{\mathscr{H}^\xi}$ конструируется по оператору R^ξ.

Заметим, что визуализация волн по динамическим данным рассеяния использовалась и ранее в работах других авторов: [22].

• Основным инструментом решения класса обратных задач BC - методом является *амплитудный интеграл* (АИ), обобщающий конструкцию операторного интеграла треугольного усечения М.С.Бродского и М.Г.Крейна [4, 7, 16, 17]. Мы приводим версию АИ, адекватную задаче рассеяния. Теоретико-операторная схема BC-метода, основанная на треугольной факторизации, представлена в работе [9], в которой АИ интерпретируется как *диагональ* оператора W.

§2. Прямая задача

Пространства и операторы. Опишем стандартные атрибуты теории систем для системы (1)–(3).

• *Внешнее пространство* управлений есть $\mathscr{F} := L_2(\Sigma)$. Оно содержит подпространства

$$\mathscr{F}^\xi := \{f \in \mathscr{F} \mid \ f|_{\tau<\xi} = 0\}\,, \quad \xi > 0,$$

образованные задержанными управлениями (ξ – величина задержки).

• *Внутреннее пространство* состояний есть $\mathscr{H} := L_2(\mathbb{R}^3)$; волны $u^f(\,\cdot\,,t)$ суть зависящие от времени элементы $\mathscr{H}$. Оно содержит подпространства

$$\mathscr{H}^\xi := \left\{y \in \mathscr{H} \mid \operatorname{supp} y \subset \mathbb{R}^3 \setminus B_\xi(0)\right\}, \quad \xi > 0.$$

Внутреннее пространство также содержит *достижимые множества*

$$\mathscr{U}^\xi := \left\{u^f(\,\cdot\,,0) \mid f \in \mathscr{F}^\xi\right\}, \quad \xi > 0.$$

Они замкнуты и, по гиперболичности задачи (1)–(3), имеет место вложение $\mathscr{U}^\xi \subset \mathscr{H}^\xi$ (см., например, [11]).

Подпространства (недостижимые множества)

$$\mathscr{D}^\xi := \mathscr{H}^\xi \ominus \mathscr{U}^\xi, \quad \xi > 0$$

называются *дефектными*. Следующий важный факт недавно установлен в [15]. Скажем, что $y \in \mathscr{H}^\xi$ есть *полигармоническая* функция порядка $n \in \mathbb{N}$, если она удовлетворяет уравнению $(-\Delta + q)^n\, y = 0$ в $\mathbb{R}^3 \setminus \overline{B_\xi(0)}$, и будем писать $y \in \mathscr{A}^\xi_n$. Обозначим $\mathscr{A}^\xi := \overline{\operatorname{span}\,\{\mathscr{A}^\xi_n \mid n \geqslant 1\}}$ (замыкание в $\mathscr{H}$).

Предложение 1. *Справедливо соотношение*

$$\mathscr{A}^\xi = \mathscr{D}^\xi, \qquad \xi > 0. \tag{7}$$

Соотношение (7) усиливает вложение $\mathscr{A}^\xi \subset \mathscr{D}^\xi$, установленное в [11]

• *Оператор управления* системы есть $W : \mathscr{F} \to \mathscr{H}$

$$Wf := u^f(\,\cdot\,,0).$$

Он ограничен [11, 19] и справедливо представление

$$W = W_0 + K$$

с компактным оператором K, где W_0 – оператор управления (невозмущенной) системы (1)–(3) с $q = 0$. Отметим, что компактность K установлена в [11] в предположении, что потенциал q финитен. В дальнейшем через u_0^f мы обозначаем волны в невозмущенной системе.

Напомним, что $\operatorname{supp} q \subset B_a(0)$. Область влияния потенциала есть

$$D := \{(x,t) \mid t > -a,\ t < |x| < t + 2a\}.$$

Вне ее, волны возмущенной и невозмущенной систем совпадают:

$$u^f = u_0^f \qquad \text{в } \mathbb{R}^3 \setminus D. \tag{8}$$

Оператор W_0 унитарен: выполнено $W_0^* = W_0^{-1}$. Ниже мы рассматриваем W_0 и W более подробно.

- *Оператор реакции* $R : \mathscr{F} \to \mathscr{F}$

$$(Rf)(\tau, \omega) := \lim_{s \to +\infty} s\, u^f((s+\tau)\,\omega, s), \quad (\tau, \omega) \in \Sigma$$

определен в расширенной системе (4)–(6). Он компактен и самосопряжен [11]. Соотношение (8) легко ведет к

$$Rf\,|_{\tau > 2a} = 0, \qquad f \in \mathscr{F}. \tag{9}$$

Так как оператор $\Delta - q$, определяющий эволюцию системы, не зависит от времени, выполняется соотношение

$$u^f(\,\cdot\,, t-h) = u^{T_h f}(\,\cdot\,, t), \qquad -\infty < t < \infty,\ h \geqslant 0, \tag{10}$$

в котором T_h есть оператор задержки (сдвига), действующий в $\mathscr{F}$ по правилу $(T_h f)(\,\cdot\,, t) := f(\,\cdot\,, t-h)$ (в предположении $f\,|_{\tau<0} = 0$). Как следствие, можно вывести соотношение $RT_h = T_h^* R$.

Если потенциал достаточно гладкий, то оператор реакции допускает представление вида

$$(Rf)(\tau, \omega) = \int_\Sigma p\,(t+s;\, \omega, \theta)\, d\tau\, d\theta, \qquad (\tau, \omega) \in \Sigma. \tag{11}$$

Зависимость ядра от суммы $t+s$ соответствует сплетению со сдвигом, отмеченному выше. В то же время, в силу (9), ядро p подчинено условию $\operatorname{supp} p \subset [0, 2a] \times S^2 \times S^2$.

- Отображение $C : \mathscr{F} \to \mathscr{F}$,

$$C := W^* W$$

называется *связывающим оператором.* Это ограниченный положительный оператор. По его определению, для $f, g \in \mathscr{F}$ имеем

$$(Cf, g)_{\mathscr{F}} = (Wf, Wg)_{\mathscr{H}} = \big(u^f(\,\cdot\,, 0), u^g(\,\cdot\,, 0)\big)_{\mathscr{H}}\ , \tag{12}$$

т.е. C связывает гильбертовы метрики внешнего и внутреннего подпространств. Как показано в [11], справедливо соотношение

$$C = I + R. \tag{13}$$

Невозмущенная система. Невозмущенная система имеет вид

$$u_{tt} - \Delta u = 0, \qquad (x,t) \in \mathbb{R}^3 \times (-\infty, 0); \qquad (14)$$

$$u\big|_{|x|<-t} = 0, \qquad t < 0; \qquad (15)$$

$$\lim_{s\to-\infty} s\, u((-s+\tau)\,\omega, s) = f(\tau,\omega), \qquad (\tau,\omega) \in \Sigma; \qquad (16)$$

волны в ней суть $u_0^f(x,t)$. Приведем некоторые известные факты о ней, взятые из работ [10, 11, 19].

• Решение u_0^f допускает явное представление. Фиксируем $\omega \in S^2$ и определим

$$\pi_b(\omega) := \begin{cases} \left\{\theta \in S^2 \mid \omega\,\cdot\,\theta = b\right\}, & b \in [-1,1]; \\ \emptyset, & |b| > 1; \end{cases}.$$

Множество $\pi_b(\omega)$ есть параллель единичной сферы с Северным полюсом ω; ее длина равна $2\pi\sqrt{1-b^2}$; $\pi_0(\omega)$ – экватор; $\pi_{\pm1}(\omega) = \pm\omega$. Для функции g на S^2 обозначим через

$$[g]_b(\omega) := \begin{cases} \frac{1}{2\pi\sqrt{1-b^2}} \int\limits_{\pi_b(\omega)} g(\theta)\, d\theta, & b \in (-1,1); \\ g(-\omega), & b = -1; \\ g(\omega), & b = 1; \\ 0, & |b| > 1; \end{cases} \qquad (17)$$

среднее значение g на параллели. Следующий результат установлен в [11].

Лемма 1. *Пусть управление f и его производная f_τ принадлежат $\mathscr{F}$. Тогда справедливо представление*

$$u_0^f(x,t) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{S^2} f_\tau(t + r\,\omega\cdot\theta, \theta)\, d\theta + \frac{1}{r}\, [f(0,\,\cdot\,)]_{-\frac{t}{r}}(\omega), \qquad x \in \mathbb{R}^3,\ \ t \leqslant 0, \qquad (18)$$

в котором $r = |x|$, $\omega = \frac{x}{|x|}$; $a \cdot b$ – стандартное скалярное произведение в $\mathbb{R}^3$, и f_τ продолжена на $\tau < 0$ нулем.

Отметим особенность этого представления: слагаемые в (18) могут не быть квадратично суммируемыми в $\mathbb{R}^3$, но сумма обязательно принадлежит $\mathscr{H}$ [11]. В то же время, каждое из слагаемых является решением волнового уравнения (14).

• Важный используемый в дальнейшем факт состоит в том, что гиперболическая задача (14)–(16) корректна для *любого* управления при условии $f, f_\tau \in L_2^{\rm loc}(\Sigma)$, безотносительно его поведения при $\tau \to \infty$, в то время как соответствующее решение $u_0^f(\,\cdot\,,t) \in L_2^{\rm loc}(\mathbb{R}^3)$, $t \leqslant 0$ дается той же формулой (18).Мы называем такие f *допустимыми* и, если не оговорено противное, имеем дело с управлениями этого класса.

В частности, решения u_0^f корректно определены для *полиномиальных управлений*

$$\mathscr{P} := \left\{ p_{jm}^l(\tau,\omega) = \tau^{l-2j}\, Y_l^m(\omega) \,\middle|\, l = 0,1,\ldots;\ 0 \leqslant j \leqslant \left[\frac{l}{2}\right];\ -l \leqslant m \leqslant l \right\},$$

где Y_l^m суть стандартные сферические гармоники, [...] – целая часть. По контрасту с ними, управления из $\mathscr{F}$ мы называем *обычными*. Ниже мы работаем с управлениями класса $\mathscr{F} \dot{+} \mathscr{P}$.

Есть два свойства, выделяющие класс $\mathscr{P}$. Во-первых, для $p \in \mathscr{P}$ волна u_0^p выражается через p явно [10,12]. Во-вторых, эти волны исчезают при $t = 0$ и нечетны по времени: справедливы соотношения

$$u_0^p(\,\cdot\,,0) \,=\, 0, \quad u_0^p(\,\cdot\,,t) = -u_0^p(\,\cdot\,,-t), \qquad p \in \mathscr{P} \tag{19}$$

[10, 11]. Заметим, что в силу унитарности оператора из $\mathscr{F}$ в $\mathscr{H}$, для обычных f соотношения (19) невозможны.

Замечание 1. Заметим наперед, что по свойству (8), возмущенные решения u^f также корректно определены для управлений $f \in \mathscr{F} \dot{+} \mathscr{P}$. Этот факт существенным образом используется ниже при доказательстве леммы 4.

• Хорошо известный в теории гиперболических уравнений факт состоит в том, что сингулярные управления инициируют сингулярные волны, причем сингулярности распространяются вдоль характеристик. Соотношения, выражающие сингулярности волн через сингулярности управлений описываются формулами геометрической оптики (ГО).
Следующий результат – этого типа. Обозначим $S_R^2 := \{x \in \mathbb{R}^3 \mid |x| = R\}$ и напомним, что $B_R(x) = \{y \in \mathbb{R}^3 \mid |x-y| < R\}$.

Выберем допустимое управление f с условием $f(0,\,\cdot\,) \neq 0$. тем самым, будучи продолженным на $\tau < 0$ нулем, f имеет разрыв амплитуды в $\tau = 0$. Как следствие, волна u_0^f, локализованная в области $\{(x,t) \mid |x| \geqslant -t\}$, оказывается разрывной вблизи характеристического конуса $\{(x,t)\,|\,t<0,\ |x|=-t\}$. Другими словами, при каждом $t<0$ волна $u_0^f(\,\cdot\,,t)$ несет разрыв амплитуды на своем переднем фронте S^2_{-t}. Величины разрывов связаны следующим образом. Обозначим

$$s^p_+ := \begin{cases} 0, & s<0; \\ s^p, & s\geqslant 0; \end{cases}; \qquad p\geqslant 0,$$

так что, s^0_+ есть функция Хевисайда.

Лемма 2. *Пусть $f\in C^2_{\rm loc}(\Sigma)$; выберем произвольно $t<0$ и (малое) $\delta>0$. Справедливо представление геометрической оптики*

$$u_0^f(x,t) \,=\, \frac{f(0,\omega)}{r}\,(r+t)^0_+ \,+\, w_0(x,t,\delta)\,(r+t)^1_+, \qquad 0\leqslant r+t\leqslant\delta, \tag{20}$$

в котором $r=|x|$, $\omega=\frac{x}{|x|}$, и выполнена оценка $|w_0|\leqslant c_0\,\|f\|_{C^2([0,\delta]\times S^2)}$, равномерная по x и t.

Доказательство. 1. Возьмем $g\in C^2(S^2)$ и $b=1-\delta$ с малым $\delta>0$. Представляя по Тейлору–Лагранжу

$$g(\theta) \,=\, g(\omega)+\nabla_\theta\, g\,(\omega)\,\cdot\,(\theta-\omega)+(B(\omega,\theta)(\theta-\omega))\,\cdot\,(\theta-\omega) \tag{21}$$

(здесь θ и ω рассматриваются как векторы в $\mathbb{R}^3\supset S^2$) и интегрируя по (малой) параллели $\pi_{1-\delta}(\omega)$, в соответствии с (17), получим

$$[g]_{1-\delta}(\omega)=\frac{1}{|\pi_{1-\delta}(\omega)|}\int\limits_{\pi_{1-\delta}(\omega)} g(\theta)\,d\theta \ \overset{\text{см. (21)}}{=}\ g(\omega)+h(\omega,\delta)\,\delta \tag{22}$$

с h удовлетворяющим оценке $|h|\leqslant c\,\|g\|_{C^2(S^2)}$. Заметим, что члены первого порядка с $\nabla_\theta\, g$ аннулируются при интегрировании по параллели.

2. Применяя (22) ко второму слагаемому в (18), имеем

$$\begin{aligned}\frac{1}{r}\,[f(0,\,\cdot\,)]_{-\frac{t}{r}}\,(\omega)&=\frac{1}{r}\,[f(0,\,\cdot\,)]_{1-\frac{r+t}{r}}\,(\omega)=\frac{f(0,\omega)+h(r,\omega,t,\delta)(r+t)}{r}\\ &=\frac{f(0,\omega)}{r}\,(r+t)^0_+ + w_1(r,t,\omega,\delta)\,(r+t)^1_+, \qquad 0\leqslant r+t\leqslant\delta\end{aligned} \tag{23}$$

с $|w_1|\leqslant c_1\,\|f(0,\,\cdot\,)\|_{C^2(S^2)}$.

3. Как легко следует из (18), значения $u_0^f\,|_{0\leqslant r+t\leqslant\delta}$ определяются значениями $f\,|_{0\leqslant\tau\leqslant\delta}$ (не зависят от $f\,|_{\tau>\delta}$). Оценивая первое слагаемое в

(18) для $0 \leqslant r+t \leqslant \delta$, имеем:

$$\left|\int\limits_{S^2} f_\tau(t+r\omega\cdot\theta,\theta)\,d\theta\right| \leqslant \|f\|_{C^1([0,\delta]\times S^2)}\,\mathrm{mes}\,\{\theta\in S^2 \mid t+r\omega\cdot\theta\geqslant 0\}$$

$$= \|f\|_{C^1([0,\delta]\times S^2))}\,\mathrm{mes}\left\{\theta\in S^2 \mid \cos\theta\geqslant 1-\frac{r+t}{r}\right\}.$$

Легко проверить, что эта мера есть бесконечно-малая порядка $r+t$, что ведет к

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_{S^2} f_\tau(t+r\omega\cdot\theta,\theta)\,d\theta = w_2(r,t,\omega,\delta)\,(r+t)_+^1, \quad 0\leqslant r+t\leqslant\delta, \quad (24)$$

с $|w_2| \leqslant c_2\,\|f\|_{C^1([0,\delta]\times S^2)}$.

4. Сопоставляя (23) с (24), мы приходим к (20). □

Возмущенная система. • Обратимся к системе (4)–(6) и напомним, что выполнено $q\in L_\infty(\mathbb{R}^3)$ и $\mathrm{supp}\,q\subset B_a(0)$. Вспомним о совпадении решений (8) вне облсти влияния потенциала D. В частности, равенство $u^f = u_0^f$ имеет место при $t\leqslant -a$. Последнее позволяет представить задачу (4)–(6) в эквивалентной форме

$$(u-u_0)_{tt} - \Delta(u-u_0) = -\,qu \qquad \text{в } \mathbb{R}^3\times(-a,0);$$
$$(u-u_0)\,|_{t<-a} = 0,$$

и затем свести ее к интегральному уравнению по формуле Кирхгофа

$$u^f(x,t) = u_0^f(x,t) - \frac{1}{4\pi}\int\limits_{B_{t+a}(x)} \frac{q(y)\,u^f(y,t+a-|x-y|)}{|x-y|}\,dy$$
$$= u_0^f(x,t) - (Iu^f)(x,t), \qquad (x,t)\in D. \quad (25)$$

Это уравнение, в свою очередь, сводится к семейству уравнений того же вида в пространствах $L_2(D^b)$, где $D^b := \{(x,t)\in D \mid t\leqslant b\}$, $a<b<\infty$.

Фиксируем $b>a$. В предположении $q\in L_\infty(\mathbb{R}^3)$, оператор I действует в $L_2(D^b)$, является компактным (см. [11], (2.4)), и обладает непрерывной цепочкой инвариантных подпространств, состоящих из функций, локализованных в D^η с $\eta\leqslant b$. Как таковой, I является вольтерровым оператором [16]. Следовательно, оператор $\mathbb{I}-I$ ограниченно обратим в каждом $L_2(D^b)$ и мы имеем $u^f = (\mathbb{I}-I)^{-1}u_0^f\in L_2(D^b)$. Для локльно квадратично-суммируемых решений u^f, интеграл Iu^f зависит от $(x,t)\in D$ непрерывно. Поэтому, если $f, f_\tau \in C_{\rm loc}(\Sigma)$, то $u_0^f \in C(D^b)$ выполнено в силу (18). Таким образом, справедливо $u^f = u_0^f - Iu^f \in C(D^b)$.

В силу произвольности b, приходим к $u^f \in C_{\rm loc}(D)$.

• Формула Кирхгофа – адекватный инструмент анализа геометрической оптики. Исследуя поведение волны u^f вблизи ее переднего фронта, мы уже располагаем ГО-представлением (20) для слагаемого u_0^f в (25) и, таким образом, остается оценить вклад второго слагаемого. Сделаем это.

Напомним предположение $f\in C^2_{\rm loc}(\Sigma)$, которое обеспечивает непрерывность u_0^f и, затем, непрерывность u^f. Как и выше, мы обозначаем $r=|x|,\ \omega=\frac{x}{|x|}$.

Выберем $t<0$. По (25), интеграл Iu^f берется по (трехмерному) конусу $C_{x,t}:=\{(y,s)\,|\,-a\leqslant s\leqslant t,\ |x-y|=t-s\}$. В то же время, u^f исчезает при $r<-t$. Поэтому фактически интеграл берется по части $\dot C_{x,t}:=C_{x,t}\cap\{(y,s)\,|\,|y|\geqslant -t\}$. Когда вершина $(r\omega,t)$ конуса $C_{x,t}$ приближается к точке $(|t|\,\omega,t)$, лежащей на переднем фронте волны $u^f(\,\cdot\,,t)$ (т.е. при $r+t\to 0$), эта часть стягивается к отрезку $l_{x,t}$ прямой, который соединяет точку $(|t|\,\omega,t)$ с точкой $(a\,\omega,-a)$ в $\mathbb{R}^4$.

Затем мы представляем $\dot C_{x,t}=\dot C'_{x,t}\cup\dot C''_{x,t}$, где $\dot C'_{x,t}:=\{(x',t')\in\dot C_{x,t}\,|\,t-(r+t)\leqslant t'\leqslant t\}$ есть (малый) конус высоты $\frac{r+t}{2}$, и $\dot C''_{x,t}=\dot C_{x,t}\setminus\dot C'_{x,t}$ – остальная часть. Часть $\dot C'_{x,t}$ содержит вершину (x,t), в которой интегрант в Iu^f имеет сингулярность $\frac{1}{|x-y|}$.Как легко проверить, $\int\limits_{\dot C'_{x,t}}$ имеет порядок малости $r+t$.

В то же время, часть $\dot C''_{x,t}$ проектируется вдоль образующих конуса $C_{x,t}$ на область $B_{t+a}(x)\setminus B_a(0)\subset\mathbb{R}^3$, имеющую поперечный размер $|\,r\omega-|t|\,\omega\,|=r+t\to 0$. В силу последнего, имеем ${\rm mes}\,[B_{t+a}(x)\setminus B_a(0)]\sim r+t\to 0$. Таким образом, мера части $\dot C''_{x,t}$ есть бесконечно-малая порядка $r+t$. В итоге, интеграл $\int\limits_{\dot C''_{x,t}}$ стремится к нулю как $r+t$.

Резюмируя приведенные выше рассмотрения, мы получаем представление

$$(Iu^f)(x,t)\;=\;\dot w(x,t,\delta)\,(r+t)^1_+,\qquad 0\leqslant r+t\leqslant\delta, \tag{26}$$

в котором $\dot{w}$ подчиняется оценке

$$\begin{aligned}|\dot{w}| \leqslant c_1 \|q\|_{L_\infty(\mathbb{R}^3)} \|u^f\|_{C(D^a)} &\leqslant c_2 \|q\|_{L_\infty(\mathbb{R}^3)} \|u_0^f\|_{C(D^a)} \\ &\leqslant c_3 \|q\|_{L_\infty(\mathbb{R}^3)} \|f\|_{C^1([0,\delta]\times S^2)}\end{aligned}$$

с соответствующими постоянными. Последнее неравенство следует из того, что $u_0^f|_{0\leqslant r+t\leqslant\delta}$ определяется значениями $f|_{0\leqslant\tau\leqslant\delta}$.

Добавим, что, рассматривая стягивание $\dot{C}_{x,t} \to l_{x,t}$ более детально и предполагая дополнительную гладкость потенциала q, можно вывести более точные классические ГО-формулы (см., например, Appendix в [7]).

• Объединяя (20) с (25) и (26) и обозначиая $w := w_0 - \dot{w}$, мы приходим к следующему ГО-представлению возмущенных волн.

Лемма 3. *Пусть* $f \in C^2_{\mathrm{loc}}(\Sigma)$*; фиксируем* $t < 0$ *и (малое)* $\delta > 0$*. Справедливо представление*

$$u^f(x,t) \;=\; \frac{f(0,\omega)}{r}\,(r+t)^0_+ \,+\, w(x,t,\delta)\,(r+t)^1_+, \quad 0 \leqslant r+t \leqslant \delta, \tag{27}$$

в котором $r = |x|$, $\omega = \frac{x}{|x|}$, *и выполнена равномерная по* x *и* t *оценка* $|w| \leqslant c\,\|q\|_{L_\infty(\mathbb{R}^3)}\,\|f\|_{C^2([0,\delta]\times S^2)}$.

Таким образом, если управление имеет вступление $f(0,\,\cdot\,) \neq 0$ при $\tau = 0$, то волна u^f имеет разрыв на переднем фронте, причем амплитуда разрыва равна $\frac{f(0,\,\cdot\,)}{r}$. Амплитуда растет при $r \to 0$, что соответствует эффекту фокусировки.

Совпадение форм (20) и (27) отражает известный факт: присутствие члена нулевого порядка q в операторе $\Delta - q$, управляющем эволюцией системы, не влияет на главные члены в ГО-формулах.

§3. Обратная задача

Амплитудный интеграл. Амплитудный интеграл (АИ) это опреаторная конструкция, являющаяся основным инструментом решения динамических обратных задач BC-методом [2, 4, 7, 9]. Она обобщает классический операторный интеграл треугольного усечения [16, 17]. Здесь мы представляем версию АИ, адекватную задаче акустического рассеяния.

• Выберем $\xi > 0$. Напомним, что X^ξ есть проектор в $\mathscr{F}$ на $\mathscr{F}^\xi$, который срезает управления на Σ^ξ. Символом Y^ξ мы обозначаем проектор в $\mathscr{H}$ на $\mathscr{H}^\xi$, срезающий функции на внешность шара $B_\xi(0)$.

Пусть $\Pi^\delta := \{\tau_k\}_{k\geqslant 0}$, $0=\tau_0<\tau_1<\tau_2<\dots\to\infty$ есть разбиение полуоси $0\leqslant\tau<\infty$ с условием $0<\tau_k-\tau_{k-1}\leqslant\delta$. Разность $\Delta X^{\tau_k} := X^{\tau_k}-X^{\tau_{k-1}}$ проектирует в $\mathscr{F}$ на $\mathscr{F}^{\tau_k}\ominus\mathscr{F}^{\tau_{k-1}}$ и, таким образом, срезает управления на $\Sigma^{\tau_k}\setminus\Sigma^{\tau_{k-1}}$. Разность $\Delta Y^{\tau_k}:=Y^{\tau_{k-1}}-Y^{\tau_k}$ проектирует в $\mathscr{H}$ на $\mathscr{H}^{\tau_{k-1}}\ominus\mathscr{H}^{\tau_k}$, т.е. срезает функции на сферический слой $B_{\tau_k}(0)\setminus B_{\tau_{k-1}}(0)$. Отметим очевидные соотношения ортогональности:

$$\begin{gathered}\Delta X^{\tau_k}\Delta X^{\tau_l}=\mathbb{O}_{\mathscr{F}},\ \ \Delta Y^{\tau_k}\Delta Y^{\tau_l}=\mathbb{O}_{\mathscr{H}},\quad k\neq l;\\ \Delta X^{\tau_k}X^{\tau_l}=\mathbb{O}_{\mathscr{F}},\ \ \Delta Y^{\tau_k}Y^{\tau_l}=\mathbb{O}_{\mathscr{H}},\quad l\leqslant k-1.\end{gathered}\tag{28}$$

Напомним, что W это оператор управления возмущенной системы (1)–(3) и определим сумму

$$A_{\Pi^\delta} := \sum_{k\geqslant 1}\Delta Y^{\tau_k}W\,\Delta X^{\tau_k},\tag{29}$$

являющуюся оператором из $\mathscr{F}$ в $\mathscr{H}$, который корректно определен на финитных управлениях. В силу ортогональности (28) имеем

$$\begin{aligned}\|A_{\Pi^\delta}f\|^2_{\mathscr{H}}&=\left\|\sum_{k\geqslant 1}\Delta Y^{\tau_k}W\,\Delta X^{\tau_k}f\right\|^2_{\mathscr{H}}=\sum_{k\geqslant 1}\|W\,\Delta X^{\tau_k}f\|^2_{\mathscr{H}}\\ &\leqslant\|W\|^2\sum_{k\geqslant 1}\|\Delta X^{\tau_k}f\|^2_{\mathscr{F}}=\|W\|^2\,\|f\|^2_{\mathscr{F}},\end{aligned}$$

так что сумма (29) удовлетворяет оценке $\|A_{\Pi^\delta}\|\leqslant\|W\|$ и, следовательно, является ограниченным оператором.

- Как нетрудно проверить, отображение $A:\mathscr{F}\to\mathscr{H}$,

$$(Af)(x) := \frac{f(r,\omega)}{r},\qquad x=r\omega\in\mathbb{R}^3$$

есть унитарный оператор. Сопряженный к нему $A^*=A^{-1}:\mathscr{H}\to\mathscr{F}$ имеет вид

$$(A^*y)(\tau,\omega) := \tau\,y(\tau\omega),\qquad(\tau,\omega)\in\Sigma.\tag{30}$$

Теорема 1. *Справедливо соотношение*

$$A = s\text{-}\lim_{\delta\to 0}A_{\Pi^\delta}\tag{31}$$

holds.

Доказательство. 1. Возьмем $f\in\mathscr{F}\cap C^2_{\rm loc}(\Sigma)$. Фиксируем $\xi>0$ и (малое) $\delta>0$. Обрезанное управление $X^\xi f$ имеет разрыв в $\tau=\xi$, амплитуда (вступление) которого равна $f(\xi,\,\cdot\,)$. Поэтому, в силу (27) и с учетом соотношения задержки (10),мы имеем

$$u^{X^\xi f}(x,t)=\frac{f(\xi,\omega)}{r}\,(r+t-\xi)^0_+ + w(x,t-\xi,\delta)\,(r+t-\xi)^1_+,\quad 0\leqslant r+t-\xi\leqslant\delta.$$

Принимая $t=0$ и представляя $f(\xi,\omega)=f(r,\omega)+w'(r,\xi)\,(r-\xi)$, получаем:

$$u^{X^\xi f}(x,0)=(Wf)(x)=\frac{f(r,\omega)}{r}+w(x,-\xi,\delta)(r-\xi),\quad \xi\leqslant r\leqslant\xi+\delta. \tag{32}$$

2. Для выбранного выше f, согласно (32) слагаемые суммы $A_{\Pi^\delta}f$ имеют вид

$$\left(\Delta Y^{\tau_k}W\Delta X^{\tau_k}f\right)(x)=\begin{cases}\frac{f(r,\omega)}{r}+w(x,-\tau_k,\delta)(r-\tau_{k-1}), & \tau_{k-1}\leqslant r\leqslant\tau_k;\\ 0, & \text{для остальных} r;\end{cases} \tag{33}$$

т.е. k-тое слагаемое локализовано в слое $B_{\tau_k}(0)\setminus B_{\tau_{k-1}}(0)$.

3. Дополнительно предположим, что управление f финитно. В этом случае суммирование в A_{Π^δ} выполняется от $k=1$ до некоторого конечного N. Представим

$$Af=\sum_{k=1,\dots,N}\Delta Y_k Af$$

со слагаемыми

$$\left(\Delta Y^{\tau_k}Af\right)(x)=\begin{cases}\frac{f(r,\omega)}{r}, & \tau_{k-1}\leqslant r\leqslant\tau_k;\\ 0, & \text{для остальных } r;\end{cases} \tag{34}$$

локализованными в слоях $B_{\tau_k}(0)\setminus B_{\tau_{k-1}}(0)$. Сравнивая (33) с (34), имеем

$$\begin{aligned}\|(A-A_{\Pi^\delta})\,f\|^2&=\left\|\sum_{k=1,\dots,N}w(\,\cdot\,,-\tau_k,\delta)(|\,\cdot\,|-\tau_{k-1})^1_+\right\|^2\\ &\leqslant\sup_{x,k}|w(x,-\tau_k,\delta)|^2\sum_{k=1,\dots,N}(\tau_k-\tau_{k-1})^2\\ &\overset{\text{Лемма 3}}{=}c\|f\|^2_{C^2(\Sigma)}\sum_{k=1,\dots,N}(\tau_k-\tau_{k-1})^2\leqslant c\,\|f\|^2_{C^2(\Sigma)}\,\delta\,T\underset{\delta\to0}{\to}0,\end{aligned}$$

где $\tau=T$ есть верхняя грань носителя $\operatorname{supp} f$ на Σ.

Таким образом, ограниченная последовательность сумм A_{Π^δ} сходится к A на плотном множестве гладких финитных управлений. Отсюда следует (31) для гладких управлений.

4. Приближая произвольные управления $f \in \mathscr{F}$ гладкими финитными и переходя к соответствующему пределу, расширим (31) на $\mathscr{F}$. $\square$

Мы обозначаем предел в (31) символом $\int\limits_{[0,\infty)} dY^\tau\, W\, dX^\tau$ и называем полученный оператор амплитудным интегралом (АИ), имея ввиду, что образ Af составлен из разрывов амплитуд волн $u^{X^\tau f}$ на их передних фронтах [4, 7].

• Напомним, что $A : \mathscr{F} \to \mathscr{H}$ есть унитарный оператор. Как нетрудно показать, справедливы АИ-представления

$$A^* \,=\, A^{-1} \,=\, \int\limits_{[0,\infty)} dX^\tau\, W^*\, dY^\tau \,:=\, w\,-\lim_{\delta\to 0} A^*_{\Pi^\delta}, \tag{35}$$

в которых A^* действует по правилу (30).

АИ сплетает проекторы: имеют место соотношения

$$AX^\xi \,=\, Y^\xi A, \quad A^* Y^\xi \,=\, X^\xi A^*, \qquad \xi \geqslant 0, \tag{36}$$

легко следующие из определений и/или соотношений ортогональности (28).

Обозначим $A^\xi := A \restriction \mathscr{F}^\xi$. В силу (36), A^ξ есть унитарный оператор из $\mathscr{F}^\xi$ в $\mathscr{H}^\xi$, а АИ-представления

$$A^\xi \,:=\, \int\limits_{[\xi,\infty)} dY^\eta\, W\, dX^\eta, \quad A^{\xi\,*} = \int\limits_{[\xi,\infty)} dX^\eta\, W^*\, dY^\eta \tag{37}$$

легко следуют из (35) и соотношений ортогональности (28).

• Анализируя конструкцию АИ, можно расширить ее на управления $f \in L_2^{\rm loc}(\Sigma)$ следующим приемом. Пусть для $\eta \in C^\infty(\Sigma)$ выполнено $0 \leqslant \eta(\,\cdot\,) \leqslant 1$, $\eta|_{0\leqslant\tau\leqslant 1}= 1$, $\eta|_{\tau\geqslant 2}= 0$;обозначим $\eta^T := \eta(\frac{\cdot}{T})$. Положим

$$Af \,:=\, \lim_{T\to\infty} A\,(\eta^T f),$$

где предел понимается в смысле локальной L_2-сходимости. Расширенный АИ действует по тому же правилу:

$$(Af)(x) \,=\, \frac{f(r,\omega)}{r}, \qquad x = r\omega \in \mathbb{R}^3,$$

но, конечно, образ не обязан лежать в $\mathscr{H}$.

Билинейные формы. • Следующие факты установлены в [11, 15].

Фиксируем $\xi > 0$ и обозначим через χ^ξ индикатор (характеристическую функцию) части $\Sigma^\xi = \{(\tau, \omega) \in \Sigma \mid \tau \geqslant \xi\}$. Итак, имеем $\mathscr{F}^\xi = \chi^\xi \mathscr{F} = \{\chi^\xi f \mid f \in \mathscr{F}\}$. Пусть $\mathscr{P}^\xi := \chi^\xi \mathscr{P}$. Напомним, что $\mathscr{U}^\xi$ и $\mathscr{D}^\xi$ суть достижимые и дефектные подпространства возмущенной системы: выполнено $\mathscr{H}^\xi = \mathscr{U}^\xi \oplus \mathscr{D}^\xi$, причем $\mathscr{D}^\xi$ охарактеризовано в (7). Более того, как показано в [15], справедливо соотношение

$$\mathscr{D}^\xi = \overline{\{u^p(\,\cdot\,, 0) \mid p \in \mathscr{P}^\xi\}}, \qquad \xi > 0,$$

из которого следует $\mathscr{H}^\xi = \overline{\{u^f(\,\cdot\,, 0) \mid f \in \mathscr{F}^\xi \dotplus \mathscr{P}^\xi\}}$.

Как установлено в [11] (см. Lemma 2.1), совместное выполнение условий $f \in \mathscr{F}^\xi$ и $Wf = u^f(\,\cdot\,, 0) = 0$ с необходимостью влечет $f = 0$. Не требуется никаких изменений в доказательстве, чтобы расширить этот результат на полиномиальные управления. Таким образом, отображение $f \mapsto u^f(\,\cdot\,, 0)$ из $\mathscr{F}^\xi \dotplus \mathscr{P}^\xi$ в $\mathscr{H}^\xi$ *инъективно* при всех $\xi > 0$. Добавим, что для $\xi = 0$ это может оказаться неверным: случай $\operatorname{Ker} W \neq \{0\}$ возможен [13].

• Билинейная форма

$$\langle f, g\rangle_0 := (u_0^f(\,\cdot\,, 0), u_0^g(\,\cdot\,, 0))_{\mathscr{H}} \tag{38}$$

корректно определена на $\mathscr{G}^\xi$. Если $f, g \in \mathscr{F}$, то по унитарности W_0, имеем $(u_0^f(\,\cdot\,, 0), u_0^g(\,\cdot\,, 0))_{\mathscr{H}} = (f, g)_{\mathscr{F}}$, что ведет к

$$\langle f, g\rangle_0 = (f, g)_{\mathscr{F}}. \tag{39}$$

Напомним, что $R : \mathscr{F} \to \mathscr{F}$ есть оператор реакции. Соотношения (8) и (9) легко ведут к факту, что реакция Rf определяется значениями $f|_{0 \leqslant \tau \leqslant 2a}$. Для заданных $f, g \in \mathscr{G}^\xi$ представим

$$f = [1 - \chi^{2a}]f + \chi^{2a} f =: f_1 + f_2\,; \qquad g = [1 - \chi^{2a}]g + \chi^{2a} g =: g_1 + g_2\,,$$

где f_1, g_1 принадлежит $\mathscr{F}^\xi$ и аннулируется при $\tau > 2a$. Возмущенная форма

$$\langle f, g\rangle := \langle f, g\rangle_0 + (Rf_1, g_1) \tag{40}$$

корректно определена на $\mathscr{G}^\xi := \mathscr{F}^\xi \dotplus \mathscr{P}^\xi$. Следующий результат мотивирует ее введение.

Лемма 4. *Пусть* $f, g \in \mathscr{G}^\xi$. *Соотношение*

$$\langle f, g\rangle \,=\, (u^f(\,\cdot\,,0)\,,\, u^g(\,\cdot\,,0))_{\mathscr{H}} \tag{41}$$

справедливо при всех $\xi > 0$.

Доказательство. Напомним, что $q\,|_{|x|>a} = 0$ и начнем со случая $\xi < a$.

1. Take $f, g \in \mathscr{G}^\xi$. Согласно (10), область влияния потенциала на волны, отвечающие (задержанным) управлениям из $\mathscr{F}^\xi$, есть $\{(x,t)\,|\;\; t < |x| - 2a + \xi\}$. Вне ее $u^f = u_0^f$ имеем $u^g = u_0^g$. В частности, равенства $u^f(x,0) = u_0^f(x,0)$ и $u^g(x,0) = u_0^g(x,0)$ выполняются, если $|x| \geqslant 2a$, причем $f\,|_{\tau<2a} = 0$ влечет $u^f(\,\cdot\,,0)\,|_{|x|<2a} = 0$. В силу сказанного выше, если $f\,|_{\tau<2a} = 0$, то выполнено

$$\begin{aligned}
&(u^f(\,\cdot\,,0), u^g(\,\cdot\,,0))_{\mathscr{H}}\\
&\qquad= \int\limits_{|x|<2a} u^f(x,0)\, u^g(x,0)\, dx + \int\limits_{|x|\geqslant 2a} u^f(x,0)\, u^g(x,0)\, dx\\
&\qquad= 0 + \int\limits_{|x|\geqslant 2a} u^f(x,0)\, u^g(x,0)\, dx = \int\limits_{|x|\geqslant 2a} u_0^f(x,0)\, u_0^g(x,0)\, dx\\
&\qquad= (u_0^f(\,\cdot\,,0), u_0^g(\,\cdot\,,0))_{\mathscr{H}^\xi}.
\end{aligned} \tag{42}$$

2. Выбранные управления $f, g \in \mathscr{G}^\xi$ представим в виде

$$f = [1 - \chi^{2a}]f + \chi^{2a} f \;=: f_1 + f_2\,; \qquad g = [1 - \chi^{2a}]g + \chi^{2a} g \;=: g_1 + g_2\,,$$

и отметим, что $f_1, g_1 \in \mathscr{F}^\xi$. С учетом сделанных замечаний имеем соотношения:

$$\begin{aligned}
&\big(u^f(\,\cdot\,,0)\,,\, u^g(\,\cdot\,,0)\big)_{\mathscr{H}^\xi} = \big(u^{f_1+f_2}(\,\cdot\,,0)\,,\, u^{g_1+g_2}(\,\cdot\,,0)\big)_{\mathscr{H}^\xi}\\
&\quad= \big(u^{f_1}(\,\cdot\,,0) + u^{f_2}(\,\cdot\,,0)\,,\, u^{g_1}(\,\cdot\,,0) + u^{g_2}(\,\cdot\,,0)\big)_{\mathscr{H}^\xi}\\
&\quad= \big(u^{f_1}(\,\cdot\,,0)\,,\, u^{g_1}(\,\cdot\,,0)\big)_{\mathscr{H}^\xi} + \big(u^{f_1}(\,\cdot\,,0)\,,\, u^{g_2}(\,\cdot\,,0)\big)_{\mathscr{H}^\xi}\\
&\qquad+ \big(u^{f_2}(\,\cdot\,,0)\,,\, u^{g_1}(\,\cdot\,,0)\big)_{\mathscr{H}^\xi} + \big(u^{f_2}(\,\cdot\,,0),\, u^{g_2}(\,\cdot\,,0)\big)_{\mathscr{H}^\xi}\\
&\quad\overset{(42)}{=} \big(u^{f_1}(\,\cdot\,,0)\,,\, u^{g_1}(\,\cdot\,,0)\big)_{\mathscr{H}^\xi} + \Big(u_0^{f_1}(\,\cdot\,,0)\,,\, u_0^{g_2}(\,\cdot\,,0)\Big)_{\mathscr{H}^\xi}\\
&\qquad+ \Big(u_0^{f_2}(\,\cdot\,,0)\,,\, u_0^{g_1}(\,\cdot\,,0)\Big)_{\mathscr{H}^\xi} + \Big(u_0^{f_2}(\,\cdot\,,0)\,,\, u_0^{g_2}(\,\cdot\,,0)\Big)_{\mathscr{H}^\xi}\\
&\quad\overset{(12),\,(38)}{=} (Cf_1, g_1) + \langle f_1, g_2\rangle_0 + \langle f_2, g_1\rangle_0 + \langle f_2, g_2\rangle_0
\end{aligned}$$

$$\overset{(13)}{=} (f_1, g_1) + (Rf_1, g_1) + \langle f_1, g_2\rangle_0 + \langle f_2, g_1\rangle_0 + \langle f_2, g_2\rangle_0$$
$$\overset{(39)}{=} \langle f_1, g_1\rangle_0 + (Rf_1, g_1) + \langle f_1, g_2\rangle_0 + \langle f_2, g_1\rangle_0 + \langle f_2, g_2\rangle_0$$
$$= \langle f, g\rangle_0 + (Rf_1, g_1) \overset{(40)}{=} \langle f, g\rangle.$$

3. Случай $\xi \geqslant a$ гораздо проще и рассматривается по той же схеме. □

Приведенное доказательство фактически воспроизводит доказательство леммы 2 из работы [12].

• Пусть $0 < \xi < a$ и пусть нам задан оператор $R^\xi := X^\xi R \restriction \mathscr{F}^\xi$, действующий в подпространстве $\mathscr{F}^\xi$. Согласно (9), он определяет радиус потенциала по представлению

$$a \;=\; \inf\left\{b > 0 \,|\; R^\xi f|_{\tau > 2b-\xi} = 0 \;\text{ для всех }\; f \in \mathscr{F}^\xi\right\} \tag{43}$$

и, следовательно, определяет использованные выше разложения $f = f_1 + f_2$ для $f \in \mathscr{G}^\xi$. Как следствие, можно записать (40) в виде

$$\langle f, g\rangle = \langle f, g\rangle_0 + (R^\xi f_1, g_1) \overset{(41)}{=} (u^f(\,\cdot\,,0)\,,\, u^g(\,\cdot\,,0))_{\mathscr{H}} \tag{44}$$

и использовать эту форму при решении обратной задачи.

Пространство $\widetilde{\mathscr{H}^\xi}$. • Выберем произвольно $\xi > 0$ и напомним, что отображение $f \mapsto u^f(\cdot\,,0)$ инъективно на $\mathscr{G}^\xi = \mathscr{F}^\xi \dotplus \mathscr{P}^\xi$. В то же время, по лемме 4, форма $\langle f, g\rangle$ положительна на $\mathscr{G}^\xi$. Значит, снабжая $\mathscr{G}^\xi$ скалярным произведением $\langle f, g\rangle$, мы имеем предгильбертово пространство. Пополняя его по соответствующей норме, получаем гильбертово пространство $\widetilde{\mathscr{H}^\xi}$. Мы называем его *модельным пространством.*

Через $f \mapsto \widetilde{u}^f(\cdot\,,0)$ мы обозначаем оператор вложения $\mathscr{G}^\xi \to \widetilde{\mathscr{H}^\xi}$ и называем образы $\widetilde{u}^f(\cdot\,,0)$ модельными волнами. В то же время, отображение $f \mapsto u^f(\cdot\,,0)$ действует из $\mathscr{G}^\xi$ в $\mathscr{H}^\xi$. По построению, в согласии с (41), соответствие $U^\xi : \widetilde{u}^f(\cdot\,,0) \mapsto u^f(\cdot\,,0)$ $(f \in \mathscr{G}^\xi)$ есть изометрия, которая расширяется до унитарного оператора из $\widetilde{\mathscr{H}^\xi}$ на $\mathscr{H}^\xi$. Модельные волны играют роль изометрических копий "настоящих" волн, невидимых внешнему наблюдателю. Наблюдатель, располагающий оператором реакции, имеет возможность определить форму $\langle f, g\rangle$, построить модельное пространство $\widetilde{\mathscr{H}^\xi}$ и получить копию $\widetilde{u}^f$ недоступного ему оригинала u^f для любого $f \in \mathscr{G}^\xi$.

• Редуцированный оператор $W^\xi := W \restriction \mathscr{F}^\xi$ действует из $\mathscr{F}^\xi$ на $\mathscr{U}^\xi \subset \mathscr{H}^\xi$. Дуальный ему оператор $\widetilde{W}^\xi : f \mapsto \widetilde{u}^f(\,\cdot\,,0)$ отображает $\mathscr{F}^\xi$ на его образ $\widetilde{\mathscr{U}^\xi} \subset \widetilde{\mathscr{H}^\xi}$ при вложении. Отметим очевидное соотношение $U^\xi \widetilde{W}^\xi = W^\xi$.

Модельное пространство $\widetilde{\mathscr{H}^\xi}$ содержит семейство подпространств

$$\widetilde{\mathscr{H}^\eta} := \overline{\{\mathscr{F}^\eta \dotplus \mathscr{P}^\eta\}}, \qquad \eta \geqslant \xi$$

(замыкание в $\widetilde{\mathscr{H}^\xi}$ образов при вложении) и соответствующих проекторов $\widetilde{Y}^\eta$ в $\widetilde{\mathscr{H}^\xi}$ на $\widetilde{\mathscr{H}^\eta}$. По изометричности, имеем

$$U^\xi \mathscr{H}^\eta = \mathscr{H}^\eta, \quad Y^\eta U^\xi = U^\xi \widetilde{Y}^\eta, \qquad \eta \geqslant \xi, \tag{45}$$

где Y^η срезает функции на $\mathbb{R}^3 \setminus B_\eta(0)$.

Визуализация волн и решение обратной задачи. • Фиксируем $\xi > 0$ и напомним, что оператор $A^\xi = A \restriction \mathscr{F}^\xi$ действует из $\mathscr{F}^\xi$ в $\mathscr{H}^\xi$. Оператор $V^\xi := A^{\xi\,*} W^\xi : \mathscr{F}^\xi \to \mathscr{F}^\xi$ называется *оператором визуализации*. Он действует по правилу

$$\begin{aligned}(V^\xi f)(\tau,\omega) &= (A^{\xi\,*} u^f(\,\cdot\,,0))(\tau,\omega)\\ &= (A^* u^f(\,\cdot\,,0))(\tau,\omega) \overset{(30)}{=} \tau\, u^f(\tau\omega,0), \quad (\tau,\omega) \in \Sigma.\end{aligned} \tag{46}$$

Внешний наблюдатель, располагающий этим оператором, получает возможность для заданного f увидеть “фотографию” невидимой волны $u^f(\,\cdot\,,0)$ на “экране” Σ^ξ, чем и мотивирован термин “визуализация”. Покажем, как реализовать такую возможность. Используя унитарность $U^{\xi\,*} U^\xi = \mathbb{I}_{\widetilde{\mathscr{H}^\xi}}$ и связь $U^\xi \widetilde{W}^\xi = W^\xi$, имеем соотношения:

$$\begin{aligned}V^\xi &\overset{(37)}{=} \left[\int\limits_{[\xi,\infty)} dX^\eta\, W^{\xi\,*}\, dY^\eta\right] W^\xi\\ &\overset{(45)}{=} \left[\int\limits_{[\xi,\infty)} dX^\eta\, (U^\xi \widetilde{W^\xi})^*\, d\,(U^\xi \widetilde{Y}^\eta U^{\xi\,*})\right] U^\xi \widetilde{W}^\xi\\ &= \left[\int\limits_{[\xi,\infty)} dX^\eta\, \widetilde{W^\xi}^{\,*}\, d\widetilde{Y}^\eta\right] \widetilde{W}^\xi\end{aligned} \tag{47}$$

и, тем самым, представляем в (46) оператор V^ξ в терминах модельного пространства. Именно это представление позволит решить обратную задачу: все будет сделано, если мы покажем, как определить V^ξ по ее данным.

• Внешний наблюдатель зондирует систему управлениями $f \in \mathscr{F}^\xi$ и получает оператор $R^\xi := X^\xi R \upharpoonright \mathscr{F}^\xi$ как результат измерений. Такая информация дает ему возможность восстановить потенциал q в $\mathbb{R}^3 \setminus B_\xi(0)$ с помощью следующей процедуры.

Шаг 1. Имея в распоряжении R^ξ, найдем радиус потенциала по (43), что позволит представлять управления в виде сумм $f = f_1 + f_2$. Определим форму $\langle f, g\rangle$ на $\mathscr{G}^\xi$ согласно (44). Образуем модельное пространство $\widetilde{\mathscr{H}^\xi}$. Определим оператор (вложение) $\widetilde{W}^\xi : \mathscr{F}^\xi \to \widetilde{\mathscr{H}^\xi}$ и его сопряженный $\widetilde{W^\xi}^{\,*}$.

Шаг 2. Найдем проекторы $\widetilde{Y}^\eta$ в $\widetilde{\mathscr{H}^\xi}$ на $\widetilde{W}^\xi \mathscr{F}^\eta$. Составив АИ, определим оператор визуализации V^ξ по (47). Напомним, что он действует по правилу $(V^\xi f)(\tau,\omega) = \tau\, u^f(\tau\omega, 0)$, $(\tau,\omega) \in \Sigma$.

Шаг 3. Перенося образы $V^\xi f$ с Σ^ξ в $\mathbb{R}^3 \setminus B_\xi(0)$ по равенству $u^f(x,0) = |x|\,(V^\xi f)(|x|, \frac{x}{|x|})$, восстановим оператор $W^\xi = W \upharpoonright \mathscr{F}^\xi$.

Шаг 4. Имея в распоряжении W^ξ и используя соотношения $u^{f_{tt}} = u^f_{tt} \overset{(1)}{=} (\Delta - q)u^f$, восстановим график оператора $\Delta - q$:

$$\begin{aligned} \operatorname{graph}(\Delta - q) &= \{[u^f, u^{f_{tt}}] \mid f \in \mathscr{F}^\xi \cap C^2(\Sigma)\} \\ &= \{[W^\xi f, W^\xi f_{tt}] \mid f \in \mathscr{F}^\xi \cap C^2(\Sigma)\} \end{aligned}$$

($[\,\cdot\,,\,\cdot\,]$ – обозначение пары). График очевидным образом определяет потенциал q в $\mathbb{R}^3 \setminus B_\xi(0)$. Обратная задача решена.

Имея R^ξ для всех $\xi > 0$, наблюдатель может восстановить q во всем $\mathbb{R}^3$.

Комментарии. • Если оператор реакции допускает представление (11), то задание R^ξ равносильно заданию его ядра $p|_{\tau \geqslant \xi}$ в качестве данных обратной задачи. В этом случае нам нужно определить функцию q трех переменных по функции p от 1+2+2=5 переменных, что считается переопределенной постановкой обратной задачи. Возникает вопрос о характеризации ядер, отвечающих потенциалам. Одно необходимое условие является традиционным и вполне очевидным: ядро p должно обеспечивать положительность формы $\langle f, g\rangle$. Можно ли предоставить список необходимых и достаточных условий? В известном смысле, это вопрос вкуса и дефиниций: что считать характеризацией. По-видимому, характеризацию в виде весьма длинного списка условий типа приведенных в работах [8, 14] предложить можно. Смысл этих условий в том, что они обеспечивают реализуемость процедур типа *Шаг 1–Шаг 4*. Однако, как нам кажется, простая характеризация, подобная известным в одномерных обратных задачах, вряд ли возможна.

О непереопределенных постановках задачи рассеяния см., например, [21].

• Модельное пространство $\widetilde{\mathscr{H}^\xi}$ – весьма специфический объект: это не функциональное пространство, т.к. его элементам нельзя приписать определенные носители в Σ^ξ. Эта ситуация не нова: то же имеет место и в задачах в ограниченных областях [1]. Подобные эффекты связаны с характером управляемости системы: наличием приближенной, но отсутствием точной управляемости.

Тем не менее этот весьма экзотический объект можно приспособить для разработки численных алгоритмов. Дело в том, что $\widetilde{\mathscr{H}^\xi}$ по существу является промежуточным объектом, в то время как в алгоритмах используется Амплитудный Интеграл. Его версия (т.н. *амплитудная формула*), являющаяся результатом дифференцирования АИ (37) по ξ, вполне подходит для численной реализации [2, 5, 6, 20].

Список литературы

1. С. А. Авдонин, М. И. Белишев, С. А. Иванов, *Управляемость в заполненной области для многомерного волнового уравнения с сингулярным управлением.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **210** (1994), 3–14.
2. M. I. Belishev, *Boundary control in reconstruction of manifolds and metrics (the BC method).* — Inverse Problems, **13**, No. 5, (1997) R1–R45.
3. М. И. Белишев, *Граничное управление и томография римановых многообразий.* — Успехи матем. наук **72** вып. 4(436) (2017), 3–66.
4. M. I. Belishev, *New Notions and Constructions of the Boundary Control Method.* — Inverse Problems and Imaging **16**, No. 6, (2022), 1447–1471.
5. M. I. Belishev, V. Yu. Gotlib, *Dynamical variant of the BC-method: theory and numerical testing.* — J. Inverse and Ill-Posed Problems, **7**, No 3 (1999), 221–240.
6. M. I. Belishev, I. B. Ivanov, I. V. Kubyshkin, V. S. Semenov, *Numerical testing in determination of sound speed from a part of boundary by the BC-method.* — Jю Inverse and Ill-Posed Problems **24**, No. 2 (2016), 159–180.

7. М. И. Белишев, А. П. Качалов, *Операторный интеграл в многомерной спектральной обратной задаче.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **215** (1994), 9–37.
8. M. I. Belishev, D. V. Korikov, *On Characterization of Hilbert Transform of Riemannian Surface with Boundary.* — Complex Analysis and Operator Theory, (2022) 16:10.
9. М. И. Белишев, А. Симонов, *Треугольная факторизация и функциональные модели операторов и систем.* — Алгебра и анализ, **36**, No. 5 (2024), 1–28.
10. М. И. Белишев, А. Ф. Вакуленко, *Об одной задаче управления для волнового уравнения в* R^3. — Зап. научн. семин. ПОМИ **332** (2006), 19–73.
11. M. I. Belishev, A. F. Vakulenko, *Reachable and unreachable sets in the scattering problem for acoustical equation in* $\mathbb{R}^3$. — SIAM J. Math. Analysis **39**, No. 6 (2008), 1821–1850.
12. M. I. Belishev, A. F. Vakulenko, *Inverse scattering problem for the wave equation with locally perturbed centrifugal potential.* — J. Inverse and Ill-Posed Problems **17**, No. 2 (2009), 127–157.
13. M. I. Belishev, A. F. Vakulenko, *s-points in three-dimensional acoustical scattering.* — SIAM J. Math. Analysis **42**, No. 6 (2010), 2703–2720.
14. M. I. Belishev, A. F. Vakulenko, *On characterization of inverse data in the boundary control method.* — Rend. Istit. Mat. Univ. Trieste, **48** (2016), 1–29.
15. М. И. Белишев, А. Ф. Вакуленко, *Об управляемости динамической системы акустического рассеяния в* $\mathbb{R}^3$. — Зап. научн. семин. ПОМИ (2024).
16. М. С. Бродский, *Треугольные и жордановы представления линейных операторов,* Москва, Наука (1969).
17. И. Ц. Гохберг, М. Г. Крейн, *Теория вольтерровых операторов в гильбертовом пространстве и ее приложения,* Москва, Наука (1967).
18. Р. Калман, П. Фалб, М. Арбиб, *Очерки по математической теории систем,* Мир, Москва (1971).
19. П. Лакс, К. Филлипс, *Теория рассеяния,* Москва, Мир (1971).
20. В. М. Филатова, В. В. Носикова, Л. Н. Пестов, С. Н. Сергеев, *Visualization of reflected and scattered waves by the boundary control method.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **521** (2023), 200–211.
21. Rakesh and G. Uhlmann, *Uniqueness for the inverse backscattering problem for angularly controlled potentials.* — arXiv:1307.0877v2 [math.AP] 12 Feb 2014.
22. J. H. Rose, M. Cheney, and B. DeFacio, *Determination of the Wave Field from Scattering Data.* — Physical Revew Letters **57**, No. 7, 783–786.

Belishev M. I., Vakulenko A .F. Three-dimensional inverse acoustic scattering problem by the BC-method.

Let $\Sigma := [0,\infty) \times S^2$, $\mathscr{F} := L_2(\Sigma)$. The *forward* acoustic scattering problem under consideration is to find $u = u^f(x,t)$ satisfying

$$u_{tt} - \Delta u + qu = 0, \qquad (x,t) \in \mathbb{R}^3 \times (-\infty,\infty); \qquad (48)$$

$$u\,|_{|x|<-t} = 0, \qquad t < 0; \qquad (49)$$

$$\lim_{s\to-\infty} s\,u((-s+\tau)\,\omega, s) = f(\tau,\omega), \qquad (\tau,\omega) \in \Sigma; \qquad (50)$$

for a real valued compactly supported potential $q \in L_\infty(\mathbb{R}^3)$ and a control $f \in \mathscr{F}$. The response operator $R : \mathscr{F} \to \mathscr{F}$,

$$(Rf)(\tau,\omega) := \lim_{s\to+\infty} s\, u^f((s+\tau)\,\omega, s), \quad (\tau,\omega) \in \Sigma$$

depends on q *locally*: if $\xi > 0$ and $f \in \mathscr{F}^\xi := \{f \in \mathscr{F} \mid\ f\,|_{[0,\xi)} = 0\}$ holds, then the values $(Rf)\,|_{\tau\geqslant\xi}$ are determined by $q\,|_{|x|\geqslant\xi}$ (do not depend on $q\,|_{|x|<\xi}$).

The *inverse problem* is: for an arbitrarily fixed $\xi > 0$, to determine $q\,|_{|x|\geqslant\xi}$ from $X^\xi R \restriction \mathscr{F}^\xi$, where X^ξ is the projection in $\mathscr{F}$ onto $\mathscr{F}^\xi$. It is solved by a relevant version of the boundary control method. The key point of the approach are recent results on the controllability of the system (48)–(50).

С.-Петербургское отделение
Математического института
им. В. А. Стеклова РАН
E-mail: belishev@pdmi.ras.ru
E-mail: vak@pdmi.ras.ru

Поступило 29 августа 2024 г.