Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 533, 2024 г.

А. В. Баданин, Е. Л. Коротяев

ПРЕОБРАЗОВАНИЕ МАККИНА ДЛЯ ОПЕРАТОРОВ 3-ГО ПОРЯДКА

§1. Введение

Мы рассматриваем несамосопряженный оператор $\mathcal{L} = \mathcal{L}_\psi$, действующий в $L^2(\mathbb{R})$ и заданный формулой

$$\mathcal{L}y = (y'' + py)' + py' + qy, \tag{1.1}$$

с 1-периодическими коэффициентами p, q из гильбертова пространства $\mathcal{H} = L^2(\mathbb{T}, \mathbb{R}), \mathbb{T} = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$, с нормой $\|f\|^2 = \int_0^1 |f(x)|^2 dx$.

Оператор $\mathcal{L}$ возникает при интегрировании уравнения Буссинеска на окружности. Обратная задача для этого оператора рассматривалась в статье Маккина [7]. В этой статье было введено преобразование, которое сводит оператор $\mathcal{L}$ к оператору Шредингера с периодическим потенциалом, зависящим от энергии. Изучение этого преобразования является основной целью настоящей работы.

Напомним, что для восстановления потенциала оператора Хилла требуются три последовательности:

1) Последовательность собственных значений 2-периодической задачи.

2) Последовательность собственных значений задачи Дирихле.

3) Последовательность знаков $+/$-.

Мы показали в [2], что для восстановления коэффициентов оператора $\mathcal{L}$ также требуются три последовательности:

1) Последовательность точек ветвления римановой поверхности оператора.

2) Последовательность собственных значений 3-точечной задачи Дирихле.

3) Последовательность знаков $+/$-.

Ключевые слова: оператор 3-го порядка, 3-точечная задача, собственные значения.

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда No. 23-21-00023, `https://rscf.ru/project/23-21-00023/`.

Цель предлагаемой статьи – показать, что в случае малых коэффициентов преобразование Маккина устанавливает соответствие между этими тремя последовательностями для оператора $\mathcal{L}$ и оператора Хилла с некоторым потенциалом, зависящим от энергии.

Наш оператор $\mathcal{L}$ – несамосопряженный, поэтому точки ветвления римановой поверхности и спектр 3-точечной задачи могут быть невещественными. В нашей статье [1] мы доказали, что в случае достаточно малого потенциала спектры 2-периодической задачи и задачи Дирихле для оператора Шредингера являются вещественными. Используя этот факт, в настоящей статье мы доказываем, что при малых коэффициентах точки ветвления римановой поверхности и спектр 3-точечной задачи оператора $\mathcal{L}$ являются вещественными.

Некоторые результаты по обратной задаче для оператора $\mathcal{L}$ получены Маккином [7]. В частности, для случая малых гладких коэффициентов доказана теорема единственности восстановления потенциала по спектральным данным. Задача в фиксированных классах негладких коэффициентов является более сложной. Некоторые результаты в этом направлении представлены в нашей статье [2].

§2. Операторы второго порядка

Напомним результаты для оператора Хилла $-f'' + Vf$ с потенциалом $V \in \mathcal{H}$, действующего в $L^2(\mathbb{R})$. Спектр является абсолютно непрерывным и состоит из интервалов $[E_{n-1}^+, E_n^-]$, разделенных лакунами, где $E_0^+ < E_1^- \leqslant E_1^+ < \dots$ являются собственными значениями 2-периодической задачи $f(0) = f(2)$, $f'(0) = f'(2)$. Спектр задачи Дирихле $f(0) = f(1) = 0$ состоит из простых собственных значений $\mathfrak{m}_1 < \mathfrak{m}_2 < \dots$. Эти собственные значения являются нулями целой функции $\varphi(1, \cdot)$, где $\varphi(x, \lambda)$ – фундаментальное решение уравнения

$$-f'' + Vf = \lambda f, \tag{2.1}$$

удовлетворяющее начальным условиям $\varphi|_{x=0} = 0$, $\varphi'|_{x=0} = 1$. Для каждого $n \in \mathbb{N}$ собственное значение $\mathfrak{m}_n$ лежит в интервале $[E_n^-, E_n^+]$. Введем *нормировочные постоянные* $\mathfrak{h}_{sn} : \mathcal{H} \to \mathbb{R}$ равенствами

$$\mathfrak{h}_{sn}(V) = 2\pi n \log |\varphi'(1, \mathfrak{m}_n(V))|, \quad \log 1 = 0, \quad n \in \mathbb{N}. \tag{2.2}$$

Введем множество S всех вещественных, строго возрастающих последовательностей $(s_1, s_2, \dots)$ таких, что $(s_n - (\pi n)^2) \in \ell^2$. Следующий результат получен в [8].

Отображение $V \to (\mathfrak{m}_n(V), \mathfrak{h}_{sn}(V))$ *является вещественным аналитическим изоморфизмом между* $\mathcal{H}$ *и* $S \oplus \ell^2$.

Замечание. Мы решаем соответствующую обратную задачу для оператора 3-го порядка при 3-точечных условиях Дирихле в [3].

Решение обратной периодической задачи для оператора Хилла по его спектру было сделано Коротяевым [5]. Там было построено отображение $\mathfrak{g} : \mathcal{H}_o \to \ell^2 \oplus \ell^2$ по формуле

$$V \to \mathfrak{g}(V) = (\mathfrak{g}_n(V))_{n\in\mathbb{N}}, \tag{2.3}$$

где пространсво потенциалов $\mathcal{H}_o = \{V \in \mathcal{H} : \int_0^1 V dx = 0\}$ и

$$\mathfrak{g}_n = (\mathfrak{g}_{cn}, \mathfrak{g}_{sn}) \in \mathbb{R}^2, \quad |\mathfrak{g}_n| = \frac{E_n^+ - E_n^-}{2},$$

векторы $(\mathfrak{g}_{cn}, \mathfrak{g}_{sn})$ даны выражениями

$$\mathfrak{g}_{cn} = \frac{E_n^+ + E_n^-}{2} - \mathfrak{m}_n, \tag{2.4}$$

$$\mathfrak{g}_{sn} = \left| \frac{(E_n^+ - E_n^-)^2}{4} - \mathfrak{g}_{cn}^2 \right|^{\frac{1}{2}} \operatorname{sign} \mathfrak{h}_{sn}. \tag{2.5}$$

Следующие результаты были доказаны в [6, 5].

Отображение $\mathfrak{g}$, *заданное* (2.3)–(2.5), *является вещественным аналитическим изоморфизмом между* $\mathcal{H}_o$ *и* $\ell^2 \oplus \ell^2$. *Более того, справедливы оценки*

$$\|V\| \leqslant 2\|\gamma\|(1 + \|\gamma\|)^{\frac{1}{3}}, \quad \|\gamma\| \leqslant 2\|V\|(1 + \|V\|)^{\frac{1}{3}}),$$

где $\gamma^2 = \sum\limits_{n\geqslant 1} |E_n^+ - E_n^-|^2$.

Замечание. Мы решаем соответствующую обратную задачу для оператора 3-го порядка в [2].

§3. Преобразование Маккина

Рассмотрим дифференциальное уравнение

$$(y'' + py)' + py' + qy = \lambda y, \quad \lambda \in \mathbb{C}, \tag{3.1}$$

в классе

$$C^{[2]}(\mathbb{R}) = \{y : y, y', y^{[2]} \in AC_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R})\},$$

где

$$y^{[2]} = y'' + py. \tag{3.2}$$

Преобразование Маккина основано на следующем простом результате.

Лемма 3.1. *Пусть* $p, q \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}), \lambda \in \mathbb{C}$. *Предположим, что уравнение* (3.1) *имеет решение* $\eta \in C^{[2]}(\mathbb{R})$ *такое, что* $\eta(x) \neq 0$ *для всех* $x \in \mathbb{R}$. *Пусть, кроме того,* $y \in C^{[2]}(\mathbb{R})$ *является решением уравнения* (3.1). *Пусть функция* f *имеет вид*

$$f = \eta^{\frac{3}{2}} \Big(\frac{y}{\eta}\Big)' = \frac{y'\eta - y\eta'}{\sqrt{\eta}}. \tag{3.3}$$

Тогда $f, f', f'' + \frac{p}{2} f \in AC_{\text{loc}}(\mathbb{R})$, *и* f *удовлетворяет уравнению*

$$-f'' + Vf = Ef, \tag{3.4}$$

где

$$\begin{gathered} E = \frac{3z^2}{4} = \frac{3\lambda^{\frac{2}{3}}}{4}, \quad \lambda = \Big(\frac{4}{3}E\Big)^{\frac{3}{2}}, \quad z = \lambda^{\frac{1}{3}}, \\ \arg z \in \Big(-\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}\Big], \quad \arg \lambda \in (-\pi, \pi], \end{gathered} \tag{3.5}$$

энергозависящий потенциал V *имеет вид*

$$V = E - \frac{p}{2} - \frac{3}{2}\frac{\eta^{[2]}}{\eta} + \frac{3}{4}\Big(\frac{\eta'}{\eta}\Big)^2. \tag{3.6}$$

Кроме того, $V + \frac{p}{2} \in AC_{\text{loc}}(\mathbb{R})$.

Замечания. 1) В невозмущенном случае $p = q = 0$ имеем $V = 0$.

2) Если коэффициенты $p, q \in \mathcal{H}$ 1-периодичны, то потенциал V также 1-периодичен по переменной x, и $V + \frac{p}{2} \in AC(\mathbb{T})$.

3) Уравнение (3.4) рассматривалось в нашей статье [1].

§4. Точки ветвления

Обратимся к оператору $\mathcal{L}$. Пусть $p, q \in \mathcal{H}$. Введем *фундаментальные решения* $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ уравнения (3.1), удовлетворяющие условиям $\varphi_j^{[k-1]}|_{x=0} = \delta_{jk}$, $j, k = 1, 2, 3$, где $y^{[0]} = y$, $y^{[1]} = y'$, $y^{[2]} = y'' + py$. Каждая из функций $\varphi_j(x, \cdot), j = 1, 2, 3, x \in [0, 1]$ является целой и вещественной на $\mathbb{R}$. Определим *матрицу монодромии*

$$M(\lambda) = \big(\varphi_j^{[k-1]}(1, \lambda)\big)_{j,k=1}^3. \tag{4.1}$$

Матричнозначная функция M является целой. Характеристический полином D матрицы монодромии задается выражением

$$D(\tau, \lambda) = \det(M(\lambda) - \tau \mathbb{1}_3), \quad (\tau, \lambda) \in \mathbb{C}^2, \tag{4.2}$$

где $\mathbb{1}_3$ — это единичная 3×3 матрица. Собственное значение матрицы M называется *мультипликатором*, это нуль полинома $D(\,\cdot\,,\lambda)$. Имеется ровно 3 (с учетом кратности) мультипликатора $\tau_j, j=1,2,3$, и верно равенство $\tau_1\tau_2\tau_3=1$. В частности, все τ_j не обращаются в нуль ни при каком $\lambda\in\mathbb{C}$. Три корня τ_1,τ_2 и τ_3 образуют три различные ветви функции, аналитической на некоторой 3-листной римановой поверхности $\mathcal{R}$, имеющей только алгебраические особенности (точки ветвления) в $\mathbb{C}$. В любой ограниченной области существует лишь конечное число таких особенностей. Для описания этих точек введем *дискриминант* ρ многочлена $D(\,\cdot\,,\lambda)$ по формуле

$$\rho=(\tau_1-\tau_2)^2(\tau_1-\tau_3)^2(\tau_2-\tau_3)^2. \tag{4.3}$$

Функция $\rho(\lambda)$ является целой. Нуль ρ является *точкой ветвления* римановой поверхности $\mathcal{R}$.

Если $p=q=0$, то соответсвующая функция ρ и ее нули $r_n^{0,\pm}$ имеют вид

$$\begin{aligned}\rho_0&=64\sin^2\frac{\sqrt{3}z}{2}\sin^2\frac{\sqrt{3}\omega z}{2}\sin^2\frac{\sqrt{3}\omega^2 z}{2},\\ r_n^{0,+}=r_n^{0,-}&=\Big(\frac{2\pi n}{\sqrt{3}}\Big)^3,\quad n\in\mathbb{Z},\quad \omega=e^{i\frac{2\pi}{3}}.\end{aligned} \tag{4.4}$$

Преобразование Маккина связывает точки ветвления римановой поверхности $\mathcal{R}$ для оператора $\mathcal{L}$ с собственными значениями 2-периодической задачи

$$-f''+Vf=Ef,\quad f(2)=f(0),\quad f'(2)=f'(0). \tag{4.5}$$

Теорема 4.1. *Пусть $p,q\in\mathcal{H}$. Предположим, что существует простой мультипликатор τ для уравнения (3.1) с некоторым $\lambda_o\in\mathbb{C}$ и соответствующее решение Флоке $\eta\in C^{[2]}(\mathbb{R})$ не обращается в нуль для всех $x\in\mathbb{R}$. Пусть преобразование Маккина задается равенствами* (3.3)–(3.6). *Тогда каждая функция $V(x,\,\cdot\,), x\in\mathbb{R}$, является аналитической в некоторой окрестности $E_o=\frac{3}{4}\lambda_o^{\frac{2}{3}}$. Более того, λ_o является точкой ветвления поверхности $\mathcal{R}$ для уравнения* (3.1) *тогда и только тогда, когда E_o является собственным значением 2-периодической задачи* (3.4), (4.5).

Замечание. Доказательство, в основном, повторяет рассуждения Маккина [7, Sec. 8]. Используются две подстановки в (3.3): в первой подстановке берется $g = \mathfrak{f}_1$, а во второй $g = \mathfrak{f}_2$, где $\mathfrak{f}_1, \mathfrak{f}_2$ – решения Флоке, соответствующие мультипликаторам τ_1, τ_2 соответственно, $\mathfrak{f}_k$ решения Флоке уравнения (3.1), удовлетворяющие условиям $\mathfrak{f}_k(x+1,\lambda) = \tau_k(\lambda)\mathfrak{f}_k(x,\lambda)$, $\mathfrak{f}_k(0,\lambda) = 1$.

§5. Трехточечная задача Дирихле

Мы рассматриваем оператор $\mathcal{L}_{\rm dir}$, действующий в $L^2(0,2)$ и заданный формулой

$$\mathcal{L}_{\rm dir} y = (y'' + py)' + py' + qy, \quad y(0) = y(1) = y(2) = 0. \tag{5.1}$$

Спектр $\sigma(\mathcal{L}_{\rm dir})$ оператора $\mathcal{L}_{\rm dir}$ чисто дискретный и равен

$$\sigma(\mathcal{L}_{\rm dir}) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \xi(\lambda) = 0\}, \tag{5.2}$$

где ξ есть целая функция вида

$$\xi(\lambda) = \det \begin{pmatrix} \varphi_2(1,\lambda) & \varphi_3(1,\lambda) \\ \varphi_2(2,\lambda) & \varphi_3(2,\lambda) \end{pmatrix}. \tag{5.3}$$

В невозмущенном случае $p = q = 0$ функция ξ имеет вид

$$\xi_0(\lambda) = -\frac{8}{3\sqrt{3}\lambda} \sin\frac{\sqrt{3}z}{2} \sin\frac{\sqrt{3}\omega z}{2} \sin\frac{\sqrt{3}\omega^2 z}{2}, \tag{5.4}$$

и все собственные значения простые, вещественные и имеют вид

$$\mu_n^o = \left(\frac{2\pi n}{\sqrt{3}}\right)^3, \quad n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}. \tag{5.5}$$

Рассмотрим "транспонированнный" (здесь мы используем терминологию Маккина [7]) оператор

$$\widetilde{\mathcal{L}} y = -(y'' + py)' - py' + qy \tag{5.6}$$

и соответствующий оператор $\widetilde{\mathcal{L}}_{\rm dir}$ с 3-точечными условиями $y(0) = y(1) = y(2) = 0$.

Преобразование Маккина связывает собственные значения для оператора $\widetilde{\mathcal{L}}_{\rm dir}$ с собственными значениями задачи Дирихле

$$f(0) = f(1) = 0, \tag{5.7}$$

для уравнения (3.4) следующим образом.

Теорема 5.1. *Пусть $p, q \in \mathcal{H}$. Предположим, что существует простой мультипликатор τ для уравнения (3.1) с некоторым $\lambda \in \mathbb{C}$ и соответствующее решение Флоке $\eta \in C^{[2]}(\mathbb{R})$ не обращается в нуль для всех $x \in \mathbb{R}$. Пусть преобразование Маккина задается равенствами (3.3)–(3.6).*

Пусть λ является собственным значением оператора $\widetilde{\mathcal{L}}_{\rm dir}$ и пусть $\tilde{y}$ – соответствующая собственная функция. Если, кроме того, $\eta^{[2]}(0) \neq 0$, то $E = \frac{3}{4}\lambda^{\frac{2}{3}}$ является собственным значением задачи Дирихле (3.4), (5.7) и $f = \frac{\tilde{y}}{\sqrt{\eta}}$ является соответствующей собственной функцией.

Обратно, пусть E является собственным значением задачи Дирихле (3.4), (5.7) и пусть f – соответствующая собственная функция. Тогда $\lambda = (\frac{4}{3}E)^{\frac{3}{2}}$ является собственным значением оператора $\widetilde{\mathcal{L}}_{\rm dir}$ и $\tilde{y} = f\sqrt{\eta}$ является соответствующей собственной функцией.

Замечание. В доказательстве мы используем подстановку (3.3), где $y'\eta - y\eta'$ – собственная функция $\widetilde{y}$ оператора $\widetilde{\mathcal{L}}_{\rm dir}$.

§6. Локализация точек ветвления

Теоремы 4.1 и 5.1 доказывают, что преобразование Маккина, введенное в лемме 3.1, преобразует точку ветвления в собственное значение 2-периодической задачи, а 3-точечное собственное значение в собственное значение задачи Дирихле для оператора Шредингера. Далее мы рассмотрим случай малых коэффициентов. В этом случае мы доказываем глобальное взаимно однозначное соответствие между множеством положительных (исключая $r_0^{\pm}$) точек ветвления и множеством 2-периодических собственных значений оператора Шредингера, а также аналогичное соответствие между множеством положительных 3-точечных собственных значений "транспонированного" оператора и множеством собственных значений Дирихле для оператора Шредингера. Аналогичные соответствия устанавливаются для отрицательных точек ветвления и 3-точечных собственных значений. Из вещественности 2-периодических собственных значений оператора Шредингера и собственных значений Дирихле для оператора Шредингера (см. [1]) следует вещественность точек ветвления (кроме $r_0^{\pm}$) и 3-точечных собственных значений.

Введем области $\mathcal{D}_n, n \in \mathbb{Z}$, равенствами

$$\begin{aligned} &\mathcal{D}_0 = \Big\{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| < 1\Big\}, \quad \mathcal{D}_n = \Big\{\lambda \in \mathbb{C} : \big|z - \frac{2\pi n}{\sqrt{3}}\big| < 1\Big\}, \\ &\quad \mathcal{D}_{-n} = -\mathcal{D}_n, \quad n \in \mathbb{N}. \end{aligned} \tag{6.1}$$

Всюду ниже $\varepsilon > 0$ обозначает фиксированное достаточно малое число. Обозначим $\psi = (p, q)$ и введем шар

$$\mathcal{B}(\varepsilon) = \{\psi \in \mathcal{H} \oplus \mathcal{H} : \|\psi\| < \varepsilon\}.$$

Лемма 6.1. *Пусть $\psi = (p, q) \in \mathcal{B}(\varepsilon)$. Тогда матрица монодромии имеет собственное значение τ_3, удовлетворяющее оценке*

$$|\tau_3(\lambda) - e^z| \leqslant \frac{C\|\psi\|}{|z|}|e^z|, \tag{6.2}$$

для всех $\lambda \in \mathscr{D}_3$ и для некоторого $C > 0$,зависящего только от ε, где

$$\mathscr{D}_3 = \mathbb{C}_+ \setminus \cup_{n \in \{0\} \cup \mathbb{N}} \overline{\mathcal{D}_{-n}}. \tag{6.3}$$

Более того, если $\lambda \in \mathscr{D}_3$, то $\tau_3(\lambda)$ является простым мультипликатором и соответствующее решение Флоке $\mathfrak{f}_3(x, \lambda)$ не обращается в нуль для всех $x \in \mathbb{R}$. Каждая из функций τ_3 и $\mathfrak{f}_3(x, \cdot), x \in \mathbb{R}$, является аналитической на $\mathscr{D}_3$, $\tau_3(\lambda) > 0$ при $\lambda > 1$.

Введем образы $\mathcal{S}$ и $\mathcal{S}_n$ областей $\mathscr{D}_3$ и $\mathcal{D}_n$ в плоскости E равенствами

$$\mathcal{S} = \Big\{E \in \mathbb{C} : \lambda = \Big(\frac{4}{3}E\Big)^{\frac{3}{2}} \in \mathscr{D}_3\Big\}, \tag{6.4}$$

и

$$\mathcal{S}_n = \Big\{E \in \mathbb{C} : \lambda = \Big(\frac{4}{3}E\Big)^{\frac{3}{2}} \in \mathcal{D}_n\Big\} = \Big\{E \in \mathbb{C} : |\sqrt{E} - \pi n| < \frac{\sqrt{3}}{2}\Big\}, \quad n \in \mathbb{N}. \tag{6.5}$$

По лемме 6.1, если $\psi \in \mathcal{B}(\varepsilon)$, то для любого $\lambda \in \mathscr{D}_3$ мы можем взять $\eta = \mathfrak{f}_3$ в преобразовании Маккина (3.3)–(3.6). Тогда потенциал $V(x, E), x \in \mathbb{R}$, является аналитической функцией E на области $\mathcal{S}$.

Для того чтобы рассмотреть оператор Шредингера с потенциалом, зависящим от энергии, предположим $p', q \in L^2(\mathbb{T})$. Введем пространство Соболева $\mathcal{H}_1 = H^1(\mathbb{T})$ и норму $\|\psi\|_1$ в пространстве $\mathcal{H}_1 \oplus \mathcal{H}$

$$\|\psi\|_1^2 = \|p\|^2 + \|p'\|^2 + \|q\|^2.$$

Обозначим

$$\psi_* = (p, -q), \quad \psi^-(x) = \psi(1-x), \quad \psi_*^-(x) = \psi_*(1-x), \quad x \in \mathbb{R}. \tag{6.6}$$

Теорема 6.2. i) *Пусть $\psi \in \mathcal{B}(\varepsilon)$. Тогда в каждой области $\mathcal{D}_n, n \in \mathbb{Z}$ лежат ровно две (с учетом кратности) точки ветвления $r_n^{\pm}$, а в $\mathbb{C} \setminus \bigcup\limits_{n \in \mathbb{Z}} \mathcal{D}_n$ точек ветвления нет. Более того,*

$$r_n^{\pm}(\psi) = -r_{-n}^{\mp}(\psi_*) = -r_{-n}^{\mp}(\psi_*^-) = r_n^{\pm}(\psi^-) \qquad \forall n \in \mathbb{Z}. \tag{6.7}$$

ii) *Пусть $\psi \in \mathcal{B}_1(\varepsilon)$. Тогда в каждой области $\mathcal{S}_n, n \in \mathbb{N}$ имеется ровно два (с учетом кратности) собственных значения $E_n^{\pm}$ 2-периодической задачи* (3.4),(4.5), *а в области $\mathcal{S} \setminus \bigcup\limits_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{S}_n$ собственных значений нет. Собственные значения $E_n^{\pm}, n \in \mathbb{N}$, вещественны и могут быть занумерованы как*

$$2 < E_1^- \leqslant E_1^+ < E_2^- \leqslant E_2^+ < \ldots \tag{6.8}$$

с учетом кратности. Кроме того, верны равенства

$$E_n^{\pm}(\psi) = E_n^{\pm}(\psi^-) = \frac{3}{4}(r_n^{\pm}(\psi))^{\frac{2}{3}} \quad \forall n \in \mathbb{N}. \tag{6.9}$$

$$E_n^{\pm}(\psi_*) = E_n^{\pm}(\psi_*^-) = \frac{3}{4}(-r_{-n}^{\mp}(\psi))^{\frac{2}{3}} \quad \forall n \in \mathbb{N}. \tag{6.10}$$

Все $r_n^{\pm}, n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, вещественны и верны неравенства

$$\ldots < r_{-1}^- \leqslant r_{-1}^+ < r_1^- \leqslant r_1^+ < r_2^- \leqslant r_2^+ < \ldots$$

Замечание. Доказательство теоремы 6.2 основано на наших результатах из [1].

§7. Локализация 3-точечных собственных значений и нормировочных констант

Здесь мы формулируем наши теоремы о трехточечных собственных значениях и нормировочных константах.

Теорема 7.1. i) *Пусть $\psi \in \mathcal{B}(\varepsilon)$. Тогда существует ровно одно простое собственное значение μ_n оператора $\mathcal{L}_{\rm dir}$ и ровно одно простое собственное значение $\widetilde{\mu}_n$ оператора $\widetilde{\mathcal{L}}_{\rm dir}$ в каждой области $\mathcal{D}_n, n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$. Более того,*

$$\mu_n(\psi) = -\mu_{-n}(\psi_*^-) = -\widetilde{\mu}_{-n}(\psi_*) = \widetilde{\mu}_n(\psi^-), \quad \forall \ n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}. \tag{7.1}$$

ii) *Пусть* $\psi \in \mathcal{B}_1(\varepsilon)$. *Тогда существует ровно одно простое собственное значение* $\mathfrak{m}_n$ *задачи Дирихле* (3.4), (5.7) *в каждой области* $\mathcal{S}_n, n \in \mathbb{N}$ *и собственных значений в области* $\mathcal{S} \setminus \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{S}_n$ *нет. Если, кроме того,* ψ *является вещественным, то все собственные значения* $\mathfrak{m}_n, n \in \mathbb{N}$, *являются вещественными и верны соотношения*

$$\mathfrak{m}_1 < \mathfrak{m}_2 < \ldots, \quad \mathfrak{m}_n \in [E_n^-, E_n^+], \quad \forall n \in \mathbb{N}. \tag{7.2}$$

Кроме того, верны равенства

$$\mathfrak{m}_n(\psi^-) = \frac{3}{4}(\mu_n(\psi))^{\frac{2}{3}}, \quad \forall \ \ n \in \mathbb{N}, \tag{7.3}$$

$$\mathfrak{m}_n(\psi) = \frac{3}{4}\big(\widetilde{\mu}_n(\psi)\big)^{\frac{2}{3}} = \frac{3}{4}\big(- \mu_{-n}(\psi_*)\big)^{\frac{2}{3}}, \quad \forall n \in \mathbb{N}. \tag{7.4}$$

Если ψ *вещественна, то все* $\mu_n, n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ *вещественны и*

$$\mu_n \in [r_n^-, r_n^+]. \tag{7.5}$$

Замечание. Соотношение (7.5) было получено в [7] для случая малых $p, q \in C^\infty(\mathbb{T})$ другим способом, без использования преобразования Маккина. Мы используем преобразование Маккина, которое дает более простое доказательство для более широкого класса коэффициентов.

Для определения нормировочных констант нам нужно рассмотреть “транспонированный” оператор $\widetilde{\mathcal{L}}_{\rm dir}$. Если $\psi \in \mathcal{B}(\varepsilon)$, то в каждой области $\mathcal{D}_n, n \in \mathbb{Z}_0$, существует ровно одно вещественное простое собственное значение $\widetilde{\mu}_n$ этого оператора. Пусть $\widetilde{y}_n(x)$ будет соответствующей собственной функцией, такой что $\widetilde{y}_n'(0) = 1$. Введем нормировочные константы $h_{sn}, n \in \mathbb{N}$, как

$$h_{sn} = 8(\pi n)^2 \log |\widetilde{y}_n'(1)\tau_3^{-\frac{1}{2}}(\widetilde{\mu}_n)|, \quad \tau_3^{\frac{1}{2}}(\widetilde{\mu}_n) > 0. \tag{7.6}$$

Следующая теорема показывает, что преобразование Маккина переводит нормировочные постоянные (7.6) для оператора $\mathcal{L}_{\rm dir}$ в нормировочные постоянные (2.2) задачи Дирихле для оператора Шредингера (3.4).

Теорема 7.2. *Пусть* $\psi \in \mathcal{B}_1(\varepsilon)$. *Тогда нормировочные константы удовлетворяют равенствам*

$$\mathfrak{h}_{sn} = \frac{h_{sn}}{4\pi n} \quad \forall n \in \mathbb{N}. \tag{7.7}$$

Список литературы

1. A. Badanin, E. Korotyaev. *Hill's operators with the potentials analytically dependent on energy.* — J. Diff. Eq. **271** (2021), 638–664.
2. А. В. Баданин, Е. Л. Коротяев, *Обратная задача для L-оператора пары Лакса уравнения Буссинеска на окружности.* — Функц. анализ и его прилож. **58**, No. 1 (2024).
3. A. Badanin, E. Korotyaev, *Inverse problem for 3-rd order operators under the 3-point Dirichlet conditions, to be published.*
4. A. Badanin, E. Korotyaev, *Asymptotics of the divisor for the good Boussinesq equation*, arXiv:2409.10988
5. E. Korotyaev, *Inverse Problem and the trace formula for the Hill Operator*, II. — Mathematische Zeitschrift **231**, No. 2 (1999), 345–368.
6. E. Korotyaev, *Estimates of periodic potentials in terms of gap lengths.* — Comm. Math. Phys. **197**, No. 3 (1998), 521–526.
7. H. McKean, *Boussinesq's equation on the circle.* — Com. Pure and Appl. Math. **34** (1981) 599–691.
8. J. Pöschel, E.Trubowitz, *Inverse Spectral Theory*, Academic Press, Boston (1987).

Badanin A. V., Korotyaev E. L. Mc'Kean's transformation for 3-rd order operators.

We consider a non-self-adjoint third order operator with 1-periodic coefficients. Integrating the Boussinesq equation on a circle requires solving the inverse spectral problem for this operator. In 1981, McKean introduced a transformation that reduces the spectral problem for this operator to the spectral problem for the Hill operator with a potential that depends analytically on the energy. In the present paper we are studying this transformation.

Санкт-Петербургский
государственный университет,
Университетская наб., 7/9,
Санкт-Петербург 199034

Поступило 30 сентября 2024 г.

E-mail: a.badanin@spbu.ru

E-mail: korotyaev@gmail.com, e.korotyaev@spbu.ru