

А. С. Багмутов, С. Б. Левин, В. О. Торопов

МОДЕЛЬ ЭФФЕКТИВНОГО СЕПАРАБЕЛЬНОГО ПОТЕНЦИАЛА В ЗАДАЧЕ ТРЕХ ОДНОМЕРНЫХ КВАНТОВЫХ ЧАСТИЦ

§1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Целью настоящей работы является построение эффективной модели для изучения асимптотического решения задачи рассеяния трех одномерных квантовых частиц с финитными (короткодействующими) парными потенциалами притяжения. Асимптотичность решения определяется быстрым убыванием его невязки в уравнении Шредингера. Мы будем рассматривать задачу рассеяния трех одномерных квантовых частиц равных масс ($m_i = \frac{1}{2}$, $i = 1, 2, 3$). Динамика системы описывается уравнением Шредингера

$$H_{lab}\Psi^{lab} = E\Psi^{lab} \quad H_{lab} = -\Delta_{\mathbf{z}} + V(\mathbf{z}), \quad \mathbf{z} = (z_1, z_2, z_3), \quad (1)$$

где z_j – координаты частиц в лабораторной системе отсчета,

$$V(\mathbf{z}) = \sum_{i < j; i, j=1,2,3} v_k(|z_i - z_j|), \quad \mathbf{z} \in \mathbb{R}^3, \quad z_j \in \mathbb{R}, \quad j = 1, 2, 3. \quad (2)$$

Здесь индексы (i, j, k) образуют четную перестановку.

Перейдем к системе отсчета, связанной с центром масс системы трех частиц

$$z_1 + z_2 + z_3 = 0,$$

и на возникшей гиперплоскости $S = \{\mathbf{z} \in \mathbb{R}^3 : z_1 + z_2 + z_3 = 0\}$ введем три системы координат Якоби (x_j, y_j) , $j = 1, 2, 3$, каждая из которых связана с одной из парных подсистем. Все три системы координат равноправны и связаны друг с другом преобразованиями поворота. А именно:

$$x_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(z_3 - z_2), \quad x_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(z_1 - z_3), \quad x_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}(z_2 - z_1), \quad (3)$$

Ключевые слова: квантовая задача трех тел, одномерные частицы, финитные парные потенциалы притяжения, эффективные сепарабельные потенциалы.

Авторы благодарят Российский Научный Фонд за поддержку в рамках гранта РНФ 22-11-00046.

$$y_j = \sqrt{\frac{3}{2}} z_j, \quad j = 1, 2, 3.$$

Отметим также соотношения, связывающие парные координаты Якоби с выбранной системой координат:

$$x_2 = -\frac{\sqrt{3}}{2} y_1 - \frac{1}{2} x_1, \quad x_3 = \frac{\sqrt{3}}{2} y_1 - \frac{1}{2} x_1. \quad (4)$$

В новых обозначениях мы приходим к следующему уравнению Шредингера на S :

$$H\Psi = E\Psi, \quad H = -\Delta + V(\mathbf{X}), \quad V(\mathbf{X}) = \sum_{i=1}^3 v_i(x_i). \quad (5)$$

Мы полагаем здесь, что оператор Δ на гиперплоскости S есть оператор Лапласа–Бельтрами

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2},$$

инвариантный относительно выбора определенной системы координат Якоби. Мы предполагаем, что все парные потенциалы $v_j(x_j)$, $j = 1, 2, 3$ одинаковы, финитны и являются потенциалами притяжения, поддерживающими одно связанное состояние. Мы полагаем также, что парный потенциал является гладкой функцией $v_i \in C_{\mathbb{R}}$, $i = 1, 2, 3$, хотя это условие и может быть ослаблено.

Отметим, что ограничения, связанные с равенством масс частиц, а также - с равенством парных потенциалов, не являются принципиальными и введены лишь для технического упрощения решения задачи. Решение задачи допускает непосредственное обобщение на случай произвольных масс и произвольных финитных парных потенциалов (как притяжения, так и отталкивания) в разных парах.

Отметим, что задача рассеяния трех одномерных квантовых частиц $3 \rightarrow 3$ (в начальном и в конечном состоянии системы все три частицы свободны) в ситуации парных потенциалов отталкивания рассматривалась в рамках дифракционного подхода в работах [1–4]. При этом были построены асимптотические собственные функции оператора Шредингера. Отдельно был рассмотрен также случай N -частичного рассеяния [5]. Позднее, в работе [6] в рамках альтернирующего метода Шварца были построены предельные значения ядра резольвенты оператора Шредингера на непрерывном спектре. Это, в свою очередь,

позволило выделить асимптотику трехчастичных собственных функций абсолютно непрерывного спектра [7], что подтвердило результаты, полученные ранее в рамках дифракционного подхода.

Подчеркнем, что анализ рассеяния в системе трех частиц на прямой является и первым шагом на пути исследования задачи трех частиц в трехмерном пространстве, и интересен сам по себе. Это подтверждает тот факт, что система трех (нейтральных или заряженных) частиц на прямой интенсивно исследовалась в течение многих лет (см., например, [8–23]). В настоящее время интерес к таким системам возрос, так как они были реализованы экспериментально (см. [24–27]). Поэтому математически корректные и логически ясные численные процедуры построения состояний непрерывного спектра оператора Шредингера трехчастичных систем в одномерном случае являются заведомо востребованными. Предложенный подход допускает естественное обобщение на случай медленно убывающих парных потенциалов в одномерии и в более высоких размерностях. Принципиально возможно обобщение и на случай большего числа частиц.

Отметим, что попытка учесть наличие в системе парных потенциалов притяжения, поддерживающих связанные состояния, в рамках дифракционного подхода для задачи рассеяния $2 \rightarrow 2(3)$ (в начальном состоянии система содержит свободную частицу и двухчастичный кластер в связанном состоянии; в конечном состоянии система может состоять как из свободной частицы и кластера в связанном состоянии, так и из трех свободных частиц) в случае трех одномерных квантовых частиц была предпринята в работе [28]. Хотя идейная линия работы была верной, в ее реализации проявились определенные слабости. В настоящей работе предложенная в [28] схема корректируется за счет более точного описания анзаца трехчастичного решения с сохранением основных идей, предложенных в [28].

Прежде чем перейти к описанию полученных в настоящем исследовании результатов, напомним о хорошо известной в ядерной физике оптической модели, предложенной Фешбахом, Портером и Вайскопфом в 1954 году [29] для описания усредненного поведения сечений. Модель получила свое название из-за аналогии рассеяния частиц на ядре с прохождением света через полупрозрачную сферу. В оптической модели предполагается, что ядро может быть описано комплексной

потенциальной ямой с помощью так называемого оптического потенциала:

$$U(r) = V_{\text{opt}}(r) + iW_{\text{opt}}(r),$$

где мнимая часть $W_{\text{opt}}(r)$ описывает поглощение частиц падающего пучка. Мнимая часть оптического потенциала пропорциональна усредненной вероятности перехода из одночастичного состояния (определяется исходным состоянием налетающей частицы) в более сложное состояние составной системы (ядро-мишень и частица). Иными словами, такая феноменологическая структура потенциала в оптической модели учитывает переход системы в новый канал рассеяния (если он имеется) и является энергозависимой.

В данной работе, мы сводим решение задачи рассеяния частицы на двухчастичном кластере к решению некоторой вспомогательной граничной задачи для оператора Шредингера \hat{H} в круге большого радиуса с условием излучения на границе. Такое граничное условие отвечает развалу системы на три свободные частицы. При этом потенциал в операторе Шредингера равен сумме исходного трехчастичного потенциала V и некоторого дополнительного комплексного сепарабельного слагаемого V_{sep} , зависящего от энергии рассеяния. В терминах функционалов от решения Φ полученной граничной задачи выражаются все парные амплитуды перестройки двухчастичных кластеров. Амплитуда развала исходной системы на три свободные частицы также строится с помощью Φ . Полное (численное) решение исходной задачи рассеяния также строится в терминах решения граничной задачи. В свете сказанного выше построенный в нашей модели дополнительный сепарабельный потенциал V_{sep} имеет смысл и аналогичен (по структуре и содержанию) упомянутому выше оптическому потенциалу. А именно, с одной стороны, построенная модельная граничная задача содержит асимптотическое граничное условие, отражающее развал системы на три свободные частицы, то есть канал рассеяния $2 \rightarrow 3$. С другой стороны, структура оператора содержит дополнительный энергозависимый потенциал, учитывающий возможность перекластеризации, то есть учитывает присутствие асимптотических каналов рассеяния $2 \rightarrow 2$. В этом смысле построенный сепарабельный потенциал возникает как следствие исключения кластерных каналов рассеяния $2 \rightarrow 2$ при сохранении канала рассеяния $2 \rightarrow 3$.

§2. ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

1) В данной работе мы предлагаем метод вычисления асимптотических собственных функций абсолютно непрерывного спектра оператора Шредингера задачи рассеяния $2 \rightarrow 2(3)$ трех одномерных квантовых частиц с финитными парными потенциалами, поддерживающими связанные состояния.

Предложенный метод позволяет свести асимптотическое решение исходной задачи рассеяния к построению некоторой модельной неоднородной краевой задачи для “расширенного” оператора Шредингера с потенциалом, равным сумме полного исходного потенциала V и некоторого дополнительного слагаемого. Это дополнительное слагаемое является комплексным энергозависящим сепарабельным потенциалом конечного ранга, по содержанию аналогичным так называемому оптическому потенциалу. Таким образом, асимптотическое решение исходной задачи рассеяния полностью определяется в терминах функции Грина построенной модельной неоднородной краевой задачи.

2) В работе предложен метод решения построенной модельной краевой задачи. Метод основан на реализации альтернирующего метода Шварца [30], являющегося одним из вариантов метода уравнений Фаддеева.

3) Для обоснования применимости альтернирующего метода приведены оценки второй итерации операторов отражений $\Gamma_i \Gamma_j$, $i \neq j$, где $\Gamma_i = V_{\text{sep}}^{(i)} R_i$. Здесь $V_{\text{sep}}^{(i)}$ – сепарабельный потенциал ранга один, $R_i = (-\Delta + V + V_{\text{sep}}^{(i)} - E)^{-1}$.

4) Приведена оценка скорости убывания n -й итерации операторов отражений.

5) В работе приведены результаты численной реализации предложенного метода (см. раздел 7) для технически наиболее простой ситуации частиц равных масс и одинаковых финитных парных потенциалов притяжения, поддерживающих одно связанное состояние в каждой паре, для двух различных значений полной энергии системы $E = 0.5$ и $E = 2$. Для каждой из энергий вычислены амплитуды перекластеризации в каждом парном канале рассеяния и амплитуда развала в трехчастичном канале, а также построено численно полное асимптотическое решение исходной задачи рассеяния. При построении функции Грина модельной краевой задачи учитываются вклады с точностью до второй итерации операторов отражений включительно.

6) Отметим, что предложенный в работе метод асимптотического решения задачи рассеяния $2 \rightarrow 2(3)$ легко обобщается на случай короткодействующих парных потенциалов, а также на задачу рассеяния $3 \rightarrow 2(3)$. В принципе возможно обобщение на случай большего числа частиц. Отметим также, что предложенный в рамках дифракционного подхода метод решения задачи трех тел при наличии дискретного спектра в парных подсистемах дополняет результаты, в том числе – численные, полученные ранее в работах [32,33] для случая одномерных парных потенциалов отталкивания.

§3. ЗАДАЧА РАССЕЯНИЯ $2 \rightarrow 2(3)$

Мы рассмотрим здесь процесс рассеяния $2 \rightarrow 2(3)$ в рамках дифракционного подхода. Мы полагаем, что парные потенциалы v_i , $i = 1, 2, 3$ являются финитными, непрерывно дифференцируемыми (требование гладкости может быть ослаблено), четными, неположительными и поддерживающими одно связанное состояние. Мы полагаемся здесь на критерий Калоджеро [31] (и его обобщение для потенциалов, заданных на оси), определяющий число связанных состояний в системе двух тел. Мы полагаем также, что пара (x, y) – есть пара координат Якоби, отвечающая системе трех тел. Здесь $x \in \mathbb{R}$, $y \in \mathbb{R}$. Будем полагать, что массы частиц и парные потенциалы одинаковы.

Мы будем изучать задачу рассеяния $2 \rightarrow 2(3)$ трех частиц на оси, то есть координата каждой частицы характеризуется вещественным числом. Точнее, мы будем изучать рассеяние связанной пары на третьей частице, пользуясь формализмом дифракционного подхода, подробно описанным в работах [2–4]. В рамках этого формализма конфигурационное пространство задачи после отделения динамики центра масс всей системы есть плоскость S , каждая из трех пар координат Якоби (x_j, y_j) , $j = 1, 2, 3$ образует ориентированную систему координат на S , эти системы координат (как и сами пары координат Якоби, отвечающие двум произвольным различным парным подсистемам) связаны преобразованием поворота. Полный носитель потенциала (объединение трех парных носителей потенциала) есть совокупность трех пересекающихся в одной точке лучей–“экранов” l_j , $j = 1, 2, 3$ с окрестностями. В данном случае финитных парных потенциалов носитель полного потенциала есть объединение трех ориентированных полос на плоскости, причем ширина каждой полосы определяется носителем соответствующего парного потенциала. Каждый из “экранов” с индексом

j , $j = 1, 2, 3$ определяет область в конфигурационном пространстве, в которой частицы в паре j совпадают, то есть выполняется равенство $x_j = 0$. Таким образом, вдоль “экрана” с индексом j меняется координата Якоби y_j , а ортогонально экрану при фиксированной ориентации системы координат меняется координата Якоби x_j . Знак координаты x_j определяется четностью перестановки частиц в паре j , а знак координаты y_j определяется четностью перестановки частицы j и центра масс пары частиц k и l . Мы полагаем здесь, что тройка индексов (j, k, l) образована перестановкой чисел $(1, 2, 3)$.

Мы будем также полагать, что асимптотика решения уравнения Шредингера

$$(H - E)\Psi = 0,$$

почти всюду удовлетворяющая условиям излучения на бесконечности в конфигурационном пространстве

$$\left(\frac{\partial}{\partial n} - i\sqrt{E}\right)\Psi|_{X=R} = O(|R|^{-3/2}), \quad X = \sqrt{x^2 + y^2},$$

устроена следующим образом

$$\Psi \sim \psi_{in}(\mathbf{X}, \mathbf{P}) + \sum_{j=1}^3 \sum_{\tau_j \in \{+, -\}} a_j^{\tau_j} \psi_j^{\tau_j}(\mathbf{X}, \mathbf{P}) + A(\hat{\mathbf{X}}, \mathbf{P}) \frac{e^{i\sqrt{E}X}}{\sqrt{X}} + O\left(\frac{1}{X^{3/2}}\right). \quad (6)$$

Здесь оператор дифференцирования $\frac{\partial}{\partial n}$ обозначает оператор дифференцирования по нормали к границе области, окружности большого радиуса R . Мы используем также обозначения

$$\begin{aligned} \psi_{in}(\mathbf{X}, \mathbf{P}) &\equiv e^{-ip_1 y_1} \varphi_1^-(x_1), \\ \psi_j^{\tau_j}(\mathbf{X}, \mathbf{P}) &\equiv e^{ip_j y_j} \varphi_j^{\tau_j}(x_j). \end{aligned} \quad (7)$$

Индекс $\tau_j = \pm$ определяет знак полукрана l_j , на котором определена функция $\psi_j^{\tau_j}$, или, иначе говоря, определяет знак переменной y_j . Обозначение φ используется для парного связанного состояния.

Также мы пользуемся обозначениями

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2, \quad \mathbf{P} = \begin{pmatrix} k \\ p \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2, \quad \hat{\mathbf{X}} = \frac{\mathbf{X}}{X}.$$

Здесь символы $k \in \mathbb{R}$ и $p \in \mathbb{R}$ использованы для описания моментов, сопряженных по Фурье координатам Якоби x и y .

Мы полагаем, что в начальном состоянии частицы пары $j = 1$ находятся в связанном состоянии φ_1^- с энергией $\kappa_1 < 0$. Функции $\varphi_j^{\tau_j}$ удовлетворяют условию нормировки

$$\int_{\mathbb{R}} |\varphi_j^{\tau_j}(x)|^2 dx = 1, \quad j = 1, 2, 3, \quad \tau_j \in \{+, -\}. \quad (8)$$

При этом кластерное парное решение $\varphi_j^{\tau_j}$ является четной функцией на носителе финитного парного потенциала $v(x_j)$ и экспоненциально затухает вне носителя потенциала с ростом значения $|x_j|$.

Отметим, что первое слагаемое в выражении (6) отвечает падающей волне. При этом выполняются соотношения

$$y_1 < 0, \quad p_1 > 0.$$

Второе слагаемое в выражении (6) отвечает суперпозиции уходящих кластерных волн (процессы $2 \rightarrow 2$) с амплитудами $a_j^{\tau_j}$. Здесь индекс $j = 1, 2, 3$ обозначает номер парной подсистемы, а индекс $\tau \in \{+, -\}$ определяет четность перестановки координаты частицы j и центра масс подсистемы с индексом j . Иными словами, индекс τ_j отвечает знаку координаты Якоби y_j и, таким образом, определяет “полуэкран” $l_j^{\tau_j}$. Для уходящих кластерных волн выполняются соотношения

$$y_j > 0, \quad p_j > 0 \quad \text{или} \quad y_j < 0, \quad p_j < 0.$$

Отметим, что каждая расходящаяся волна с амплитудой $a_j^{\tau_j}$ определена лишь на том полуэкране, который соответствует индексу τ_j . На полуэкран с индексом $-\tau_j$ она продолжается нулем. Наконец, третье слагаемое в выражении (6) отвечает процессу распада $2 \rightarrow 3$ и описывает расходящуюся круговую волну с амплитудой $A(\hat{\mathbf{X}}, \mathbf{P})$.

Перестроим теперь решение исходной задачи рассеяния в ограниченной, но достаточно большой для того, чтобы наступила асимптотика решения, области. Цель такой перестройки или “деформации” решения исходной задачи заключается в построении функциональной связи асимптотических каналов рассеяния $2 \rightarrow 2$ и $2 \rightarrow 3$. Установление такой связи позволит эффективно исключить кластерные каналы рассеяния и сформулировать новую модельную граничную задачу для “деформированной” части решения в канале рассеяния $2 \rightarrow 3$. В терминах решения такой модельной задачи мы восстановим полное асимптотическое решение исходной задачи рассеяния $2 \rightarrow 2(3)$. Опишем теперь

процедуру перестройки решения более точно. Мы собираемся построить набор уравнений, связывающих амплитуды $a_j^{\tau_j}$, $j = 1, 2, 3$; $\tau_j = \pm$, процессов рассеяния $2 \rightarrow 2$ и “деформированную” в ограниченной области часть решения, отвечающую процессу развала $2 \rightarrow 3$. При этом решение уравнения Шредингера нам известно лишь в асимптотической области конфигурационного пространства при $X \gg 1$. Введем гладкую срезающую функцию, которая “срежет” решение при ограниченных и малых значениях X . Умножая точное решение задачи рассеяния (или его некоторую часть) на такую срезающую функцию, мы получим новую функцию, которая останется точным (с точностью до членов следующего порядка малости) решением уравнения Шредингера при больших X , а при ограниченных и малых значениях X хотя и не будет уже точным решением уравнения Шредингера, но породит известную отличную от нуля невязку в ограниченной области конфигурационного пространства.

Этот факт позволит нам реализовать следующую схему решения задачи рассеяния. На первом этапе мы воспользуемся второй формулой Грина на плоскости и найдем, пусть и в терминах некоторой срезающей функции, связь между амплитудами рассеяния процессов $2 \rightarrow 2$ и функционалами от “деформированной” в ограниченной области гиперплоскости S части решения, отвечающей процессу $2 \rightarrow 3$. Иными словами, мы свяжем кластерные решения задачи рассеяния (отвечающие процессам $2 \rightarrow 2$) с “деформированной” расходящейся круговой волной (отвечающей процессам $2 \rightarrow 3$). Тем самым, мы исключаем из рассмотрения двухчастичные каналы рассеяния, воспользовавшись их связью с трехчастичным каналом. Такое эффективное исключение каналов взаимодействия в многоканальной системе всегда ведет в возникновению некоторого так называемого оптического потенциала, что и наблюдается в данной задаче.

На втором этапе решения задачи рассеяния мы построим неоднородную граничную задачу для той части решения, которая дополняет деформированный набор кластерных решений до полного асимптотического решения исходной задачи рассеяния. Асимптотика этой неизвестной части решения на больших расстояниях ведет себя как расходящаяся круговая волна с гладкой амплитудой и удовлетворяет условиям излучения почти всюду на бесконечности.

§4. ПОСТРОЕНИЕ СВЯЗЕЙ КЛАСТЕРНЫХ РЕШЕНИЙ И “ДЕФОРМИРОВАННОЙ” РАСХОДЯЩЕЙСЯ КРУГОВОЙ ВОЛНЫ

Мы начнем построение граничной задачи с описания удобного представления для точного решения задачи рассеяния. Поскольку асимптотика решения на больших расстояниях известна и имеет вид (6), мы будем искать решение в круге большого радиуса $R \gg 1$ в виде суммы падающей волны, гладко “срезанной” при ограниченных и малых значениях гиперрадиуса X , кластерных волн, также гладко “срезанных” при ограниченных и малых значениях гиперрадиуса X , и неизвестной функции Φ . При этом функция Φ определена всюду в круге радиуса R и, как следует из асимптотики (6), ведет себя при больших значениях X как расходящаяся волна с гладкой амплитудой. Забегая вперед скажем, что именно для функции Φ и будет построена краевая задача.

Введем радиальную срезающую функцию $\zeta(X) \in C^2_{[0, \infty)}$ следующим образом

$$\zeta(X) = \begin{cases} 0, & 0 \leq X < R_1, \quad R_1 \gg 1, \\ \text{монотонно растёт от 0 до 1,} & R_1 < X < R_2, \\ 1, & X > R_2. \end{cases} \quad (9)$$

Будем искать решение задачи рассеяния в следующем виде

$$\Psi(\mathbf{X}, \mathbf{P}) = \psi_{in}(\mathbf{X}, \mathbf{P})\zeta(X) + \sum_{j=1}^3 \sum_{\tau_j \in \{+, -\}} a_j^{\tau_j} \psi_j^{\tau_j}(\mathbf{X}, \mathbf{P})\zeta(X) + \Phi(\mathbf{X}, \mathbf{P}). \quad (10)$$

Введем также обозначения

$$\tilde{\psi}_{in}(\mathbf{X}, \mathbf{P}) \equiv \psi_{in}(\mathbf{X}, \mathbf{P})\zeta(X), \quad (11)$$

$$\tilde{\psi}_j^{\tau_j}(\mathbf{X}, \mathbf{P}) \equiv \psi_j^{\tau_j}(\mathbf{X}, \mathbf{P})\zeta(X). \quad (12)$$

Воспользуемся теперь второй формулой Грина для построения связи между кластерной амплитудой $a_j^{\tau_j}$ и функционалом от Φ . Нам понадобится пара уравнений:

$$\begin{cases} (H - E)\Psi^* = 0 \\ (H - E)\tilde{\psi}_j^{\tau_j} = -Q_j^{\tau_j} \end{cases} \quad (13)$$

где символ $*$ обозначает комплексное сопряжение. Отметим, что невязка $Q_j^{\tau_j}$ функции $\tilde{\psi}_j^{\tau_j}$ в уравнении Шредингера заведомо отлична от нуля там, где срезающая функция гладко меняется от нуля до единицы, и обращается в ноль там, где срезающая функция является константой.

Поскольку $\tilde{\psi}_j^{\tau_j}$, согласно (12), (7), содержит парное решение $\varphi_j^{\tau_j}(x_j)$, экспоненциально убывающее по $|x_j|$ вне носителя парного потенциала, невязка $Q_j^{\tau_j}$ сосредоточена в криволинейной полосе. Выбирая значения R_1 , R_2 достаточно большими, мы можем сколь угодно хорошо приблизить данную полосу к прямоугольной полосе

$$\Pi_j^{\tau_j} : R_1 < |y_j| < R_2, \quad (14)$$

область изменения $|x_j|$ определяется скоростью экспоненциального убывания функции $\varphi_j^{\tau_j}$. Для определенности мы будем считать, что

$$-d < x_j < d, \quad |\varphi(d)| = O\left(\frac{1}{R}\right).$$

Знак переменной y_j определяется значением индекса τ_j , или, иными словами, выбором полуэкрана, на котором определено соответствующее кластерное решение.

Домножим первое из уравнений системы (13) на $\tilde{\psi}_j^{\tau_j}$, а второе - на Ψ^* . Вычтем второе уравнение из первого и проинтегрируем результат в круге B_R большого радиуса R .

Применяя вторую формулу Грина, мы приходим к уравнению:

$$\int_{\partial B_R} \left(\frac{\partial \tilde{\psi}_j^{\tau_j}}{\partial n} \Psi^* - \frac{\partial \Psi^*}{\partial n} \tilde{\psi}_j^{\tau_j} \right) dl = \int_{B_R} Q_j^{\tau_j} \Psi^* d\sigma. \quad (15)$$

Это уравнение связывает потоки энергии, переносимые искаженной расходящейся волной Φ и искаженной кластерной волной $\tilde{\psi}_j^{\tau_j}$.

Мы рассмотрим вначале случай $\{j, \tau_j\} \neq \{1, -\}$.

4.1. Случай $\{j, \tau_j\} \neq \{1, -\}$. В этом случае, привязывая систему координат Якоби к соответствующему полуэкрану $l_j^{\tau_j}$ и опуская индексы, запишем уравнение (15) в следующем виде

$$\begin{aligned} a_j^{\tau_j*} \left\{ 2ip \int_{-d}^d \varphi^2(x) - \int_{\Pi_j^{\tau_j}} d\mathbf{X} Q_j^{\tau_j}(\mathbf{X}, \mathbf{P}) \varphi(x) e^{-ipy} \zeta(y) \right\} \\ + \int_{-d}^d dx \varphi(x) \left[\Phi^*(\mathbf{X}, \mathbf{P}) ip e^{ipR} - e^{ipR} \frac{\partial}{\partial y} \Phi^*(\mathbf{X}, \mathbf{P}) \right] \Big|_{y=R} \\ = \int_{\Pi_j^{\tau_j}} d\mathbf{X} Q_j^{\tau_j}(\mathbf{X}, \mathbf{P}) \Phi^*(\mathbf{X}, \mathbf{P}). \quad (16) \end{aligned}$$

Здесь в случае $\tau_j = -$ интеграл по dy сводится к интегралу по $d|y|$. Используя выражение для невязки $Q_j^{\tau_j}$

$$Q_j^{\tau_j}(\mathbf{X}, \mathbf{P}) = 2ip e^{ipy} \zeta'(y) \varphi(x) + e^{ipy} \zeta''(y) \varphi(x) \quad (17)$$

(индекс τ_j , как и выше, определяет полулобус, по которой берется интеграл) вычислим второе слагаемое в фигурных скобках:

$$\begin{aligned} J &\equiv \int_{\Pi_j^{\tau_j}} d\mathbf{X} Q_j^{\tau_j}(\mathbf{X}, \mathbf{P}) \varphi(x) e^{-ipy} \zeta(y) \\ &= \int_{\Pi_j^{\tau_j}} dx dy [2ip \varphi^2(x) \zeta'(y) \zeta(y) + \varphi^2(x) \zeta''(y) \zeta(y)]. \end{aligned}$$

Пользуясь условием нормировки (8) кластерного решения φ и его вещественностью, а также свойствами срезающей функции, получаем окончательно

$$\begin{aligned} J &= 2ip \int_{R_1}^{R_2} dy [\zeta^2(y)]' \frac{1}{2} - \int_{R_1}^{R_2} dy [\zeta'(y)]^2 = ip - \alpha, \\ \alpha &\equiv \int_{R_1}^{R_2} dy [\zeta'(y)]^2 > 0. \end{aligned} \quad (18)$$

Наконец, выбирая внешний радиус R области B_R достаточно большим и фиксируя при этом параметры срезки R_1, R_2 , заметим, что выражение в квадратных скобках в уравнении (16) при $y = R$ имеет порядок $O(\frac{1}{\sqrt{R}})$. Это следует непосредственно из структуры асимптотики функции Φ , которая обсуждалась выше. Пренебрегая этим членом в уравнении (16), получаем

$$\begin{aligned} a_j^{\tau_j} &= \frac{1}{-ip + \alpha} \int_{\Pi_j^{\tau_j}} d\mathbf{X} Q_j^{\tau_j*}(\mathbf{X}, \mathbf{P}) \Phi(\mathbf{X}, \mathbf{P}) + O\left(\frac{1}{\sqrt{R}}\right) \\ &= \frac{1}{-ip + \alpha} \langle Q_j^{\tau_j} | \Phi \rangle + O\left(\frac{1}{\sqrt{R}}\right). \end{aligned} \quad (19)$$

Перейдем теперь к описанию ситуации $\{j, \tau_j\} = \{1, -\}$.

4.2. Случай $\{j, \tau_j\} = \{1, -\}$. В данном случае выражение (15) порождает интеграл по полуполосе Π_1^- . Это означает, что вклад в интеграл будет давать также падающая волна $\tilde{\psi}_{in}$ (11). При этом выражение (16) должно быть модифицировано:

$$\begin{aligned} a_1^{-*} & \left\{ 2ip \int_{-d}^d \varphi^2(x) - \int_{\Pi_1^-} d\mathbf{X} Q_1^-(\mathbf{X}, \mathbf{P}) \varphi(x) e^{-ipy} \zeta(y) \right\} \\ & + \int_{-d}^d dx \varphi(x) \left[\Phi^*(\mathbf{X}, \mathbf{P}) ip e^{ipR} - e^{ipR} \frac{\partial}{\partial y} \Phi^*(\mathbf{X}, \mathbf{P}) \right] \Big|_{y=R} \\ & = \int_{\Pi_1^-} d\mathbf{X} Q_1^-(\mathbf{X}, \mathbf{P}) \Phi^*(\mathbf{X}, \mathbf{P}) + \int_{\Pi_1^-} d\mathbf{X} Q_1^-(\mathbf{X}, \mathbf{P}) \tilde{\psi}_{in}^*(\mathbf{X}, \mathbf{P}). \quad (20) \end{aligned}$$

Повторяя выкладки, проведенные выше, приходим к следующему уравнению

$$\begin{aligned} a_1^- & = \frac{1}{-ip + \alpha} \left[\int_{\Pi_1^-} d\mathbf{X} Q_1^{-*}(\mathbf{X}, \mathbf{P}) \Phi(\mathbf{X}, \mathbf{P}) + \int_{\Pi_1^-} d\mathbf{X} Q_1^{-*}(\mathbf{X}, \mathbf{P}) \tilde{\psi}_{in}(\mathbf{X}, \mathbf{P}) \right] \\ & \quad + O\left(\frac{1}{\sqrt{R}}\right) \\ & = \frac{1}{-ip + \alpha} \left\{ \langle Q_1^- | \Phi \rangle + \langle Q_1^- | \tilde{\psi}_{in} \rangle \right\} + O\left(\frac{1}{\sqrt{R}}\right). \quad (21) \end{aligned}$$

Таким образом, в уравнениях (19), (21) описаны связи кластерных амплитуд $a_j^{\tau_j}$ и функционалов от “деформированной” расходящейся круговой волны Φ . Отметим также, что в пределе при $R \rightarrow \infty$ поправка в выражениях (19), (21) обращается в ноль.

§5. ПОСТРОЕНИЕ ГРАНИЧНОЙ ЗАДАЧИ

Перейдем к построению граничной задачи для неизвестной функции Φ . Для этого подставим полученные в (19), (21) выражения для

кластерных амплитуд $a_j^{\tau_j}$ в представление (10) решения задачи рассеяния $2 \rightarrow 2(3)$:

$$\begin{aligned} \Psi(\mathbf{X}, \mathbf{P}) = & \tilde{\psi}_{in}(\mathbf{X}, \mathbf{P}) + \frac{1}{-ip + \alpha} \sum_{j=1}^3 \sum_{\tau_j \in \{+, -\}} \tilde{\psi}_j^{\tau_j}(\mathbf{X}, \mathbf{P}) \langle Q_j^{\tau_j} | \Phi \rangle \\ & + \frac{1}{-ip + \alpha} \tilde{\psi}_1^-(\mathbf{X}, \mathbf{P}) \langle Q_1^- | \tilde{\psi}_{in} \rangle + \Phi(\mathbf{X}, \mathbf{P}). \end{aligned} \quad (22)$$

Поддействуем слева и справа на уравнение (22) оператором $H - E$. В результате приходим к уравнению

$$(H - E)\Phi - \frac{1}{-ip + \alpha} \sum_{j=1}^3 \sum_{\tau_j \in \{+, -\}} Q_j^{\tau_j} \langle Q_j^{\tau_j} | \Phi \rangle = Q_1^{in} + \frac{1}{-ip + \alpha} Q_1^- \langle Q_1^- | \tilde{\psi}_{in} \rangle. \quad (23)$$

Определение невязки $Q_j^{\tau_j}$ было дано выше в уравнении (13). Мы используем также обозначение Q_1^{in} :

$$(H - E)\tilde{\psi}_{in} = -Q_1^{in}.$$

Сформулируем теперь граничную задачу для функции Φ в круге B_R большого радиуса R с условием излучения на границе ∂B_R :

$$\begin{cases} (\hat{H} - E)\Phi = Q_b \\ \left(\frac{\partial \Phi}{\partial n} - i\sqrt{E}\Phi \right) |_{\partial B_R} = O\left(\frac{1}{R^{3/2}}\right) \end{cases} \quad (24)$$

Здесь использованы обозначения

$$\hat{H} \equiv H + V_{sep}, \quad Q_b \equiv Q_1^{in} + \frac{1}{-ip + \alpha} Q_1^- \langle Q_1^- | \tilde{\psi}_{in} \rangle. \quad (25)$$

Оператор Шредингера H был определен в уравнении (5), а сепарабельный потенциал ранга шесть V_{sep} определяется согласно уравнению (23):

$$V_{sep} \equiv -\frac{1}{-ip + \alpha} \sum_{j=1}^3 \sum_{\tau_j \in \{+, -\}} |Q_j^{\tau_j}\rangle \langle Q_j^{\tau_j}|. \quad (26)$$

Отметим здесь, что все функции Q_b , $Q_j^{\tau_j}$, локализованные в областях $\Pi_j^{\tau_j}$ (14) на гиперплоскости S , являются гладкими по обоим переменным за исключением границ областей $\Pi_j^{\tau_j}$, на которых, тем не менее, сохраняется непрерывность.

Решение задачи рассеяния $2 \rightarrow 2(3)$ восстанавливается в терминах решения граничной задачи (24) с помощью уравнения (22).

Собственно построение решения граничной задачи, сформулированной в уравнении (24) для описания процессов рассеяния $2 \rightarrow 2(3)$ в системе трех одномерных квантовых частиц с финитными парными потенциалами притяжения в рамках дифракционного подхода, является следующим вопросом, к обсуждению которого мы перейдем далее.

§6. ПОСТРОЕНИЕ РЕШЕНИЯ ГРАНИЧНОЙ ЗАДАЧИ

6.1. Резольвента оператора Шредингера с возмущением ранга один. Прежде чем перейти к обсуждению собственно граничной задачи (24)–(26) с оператором H , содержащим сепарабельное возмущение ранга шесть (26), мы рассмотрим более простую задачу для оператора H_1 с сепарабельным возмущением ранга один [34]. Рассмотрим оператор Шредингера

$$H_1 = H_0 + \beta|Q\rangle\langle Q|, \quad \beta \in \mathbb{C}.$$

Резольвентное тождество в этом случае принимает вид

$$(H_1 - E)^{-1} - (H_0 - E)^{-1} = -\beta(H_1 - E)^{-1}|Q\rangle\langle Q|(H_0 - E)^{-1}. \quad (27)$$

Проецируя уравнение (27) слева и справа на состояние Q и вводя в рассмотрение функции

$$F_1(E) \equiv \langle Q|(H_1 - E)^{-1}|Q\rangle, \quad F_0(E) \equiv \langle Q|(H_0 - E)^{-1}|Q\rangle,$$

получаем

$$F_1(E) - F_0(E) = -\beta F_1(E)F_0(E).$$

Мы приходим при этом к уравнению связи

$$F_1(E) = \frac{F_0(E)}{1 + \beta F_0(E)}. \quad (28)$$

Перепишем теперь резольвентное тождество в виде

$$(H_1 - E)^{-1} - (H_0 - E)^{-1} = -\beta(H_0 - E)^{-1}|Q\rangle\langle Q|(H_1 - E)^{-1} \quad (29)$$

и спроецируем полученное уравнение справа на состояние Q :

$$(H_1 - E)^{-1}|Q\rangle = (H_0 - E)^{-1}|Q\rangle - \beta F_1(E)(H_0 - E)^{-1}|Q\rangle.$$

Воспользовавшись условием связи (28), получаем окончательно

$$(H_1 - E)^{-1}|Q\rangle = \frac{1}{1 + \beta F_0(E)}(H_0 - E)^{-1}|Q\rangle. \quad (30)$$

Подставляя полученное выражение в резольвентное тождество (27), получаем

$$(H_1 - E)^{-1} - (H_0 - E)^{-1} = -\frac{\beta}{1 + \beta F_0(E)} (H_0 - E)^{-1} |Q\rangle \langle Q| (H_0 - E)^{-1}. \quad (31)$$

Полученное соотношение связывает резольвенту оператора Шредингера H_1 с сепарабельным возмущением ранга один с резольвентой невозмущенного оператора H_0 .

Мы вернемся теперь к исходной задаче и рассмотрим резольвенту оператора Шредингера H с возмущением (26), то есть резольвенту оператора с сепарабельным возмущением ранга шесть.

6.2. Сепарабельное возмущение ранга шесть V_{sep} . Мы рассмотрим теперь резольвенту оператора Шредингера H с сепарабельным возмущением ранга шесть V_{sep} (26) и невозмущенным оператором H_0 , определенным в уравнении (5):

$$H = H_0 + V_{sep}, \quad (32)$$

где

$$H_0 = -\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \sum_{j=1}^3 v_j(x_j), \quad V_{sep} \equiv \beta \sum_{j=1}^3 \sum_{\tau_j \in \{+, -\}} |Q_j^{\tau_j}\rangle \langle Q_j^{\tau_j}|.$$

Мы используем здесь обозначение

$$\beta \equiv -\frac{1}{-ip + \alpha}. \quad (33)$$

Отметим, что решение неоднородной краевой задачи вида (24)

$$\begin{cases} (H - E)\Phi = Q_b \\ \left(\frac{\partial \Phi}{\partial n} - i\sqrt{E}\Phi\right)|_{\partial B_R} = O\left(\frac{1}{R^{3/2}}\right) \end{cases} \quad (34)$$

с невозмущенным оператором Шредингера $H = H_0$, (хотя и с парными потенциалами отталкивания v_j , $j = 1, 2, 3$) и локализованной неоднородностью фактически было реализовано в работах [32, 33]. В случае сепарабельного возмущения ранга один

$$H = H_0 + V_{sep}^{(1)}, \quad V_{sep}^{(1)} = \beta |Q\rangle \langle Q|,$$

решение полной задачи дается в терминах решения краевой задачи для невозмущенного оператора $(H_0 - E)^{-1}|Q_b \rangle$ с помощью уравнения (31)

$$(H_1 - E)^{-1}|Q_b \rangle = (H_0 - E)^{-1}|Q_b \rangle - \frac{\beta}{1 + \beta F_0(E)} \langle Q | (H_0 - E)^{-1} | Q_b \rangle (H_0 - E)^{-1} | Q \rangle .$$

В более общем случае возмущения, представляющего собой сумму некоторого количества (шести) сепарабельных потенциалов ранга один

$$V_{sep} = \sum_{i=1}^6 V_{sep}^{(i)}, \quad V_{sep}^{(i)} \equiv \beta |Q_i \rangle \langle Q_i|, \quad (35)$$

мы воспользуемся альтернирующим методом Шварца, который был развит в работе [30] и позднее применен для исследования задачи рассеяния трех одномерных квантовых частиц в работах [6]- [7]. Отметим, что альтернирующий метод Шварца является некоторым вариантом хорошо известного метода уравнений Фаддеева. Для технического упрощения записи мы вводим здесь переобозначение

$$V_{sep}^{(i)} \equiv \beta |Q_i \rangle \langle Q_i| = \beta |Q_i^- \rangle \langle Q_i^-|, \\ V_{sep}^{(i+3)} \equiv \beta |Q_{i+3} \rangle \langle Q_{i+3}| = \beta |Q_i^+ \rangle \langle Q_i^+|, \quad i = 1, 2, 3.$$

Введем определение оператора отражения Γ_i , следуя терминологии, использованной в предыдущих работах

$$\Gamma_i = V_{sep}^{(i)} R_i, \quad R_i = (H_i - E)^{-1}, \quad H_i = H_0 + V_{sep}^{(i)}. \quad (36)$$

Невозмущенный оператор H_0 был описан в выражении (32). Нам понадобится также определение $R_0 = (H_0 - E)^{-1}$.

Согласно результатам, полученным в [6], представление для резольвенты $R = (H - E)^{-1}$ оператора Шредингера H (32) может быть представлено в следующем виде

$$R = R_0 \left(I - \sum_{i=1}^6 \Gamma_i + \sum_{i,j=1,\dots,6} \sum_{i \neq j} \Gamma_i \Gamma_j - \sum_{i,j,k=1,\dots,6} \sum_{i \neq j, j \neq k} \Gamma_i \Gamma_j \Gamma_k - \dots \right). \quad (37)$$

В свою очередь, выделяя первые два члена в фигурных скобках в выражении (37), получим

$$R|Q_b \rangle = (H - E)^{-1}|Q_b \rangle =$$

$$\begin{aligned}
&= (H_0 - E)^{-1} |Q_b\rangle - \sum_{i=1}^6 \frac{\beta}{1 + \beta F_i(E)} \langle Q_i | (H_0 - E)^{-1} |Q_b\rangle (H_0 - E)^{-1} |Q_i\rangle \\
&\quad + (H_0 - E)^{-1} \left(\sum_{i,j=1,\dots,6} \sum_{i \neq j} \Gamma_i \Gamma_j - \sum_{i,j,k=1,\dots,6} \sum_{i \neq j, j \neq k} \Gamma_i \Gamma_j \Gamma_k - \dots \right).
\end{aligned}$$

Здесь используется обозначение

$$F_i(E) \equiv \langle Q_i | (H_0 - E)^{-1} |Q_i\rangle.$$

Вычислим теперь первую итерацию операторов отражений $\Gamma_i \Gamma_j$, $i \neq j$, для того чтобы, следуя идеологии работы [6], убедиться в улучшении свойств итераций с ростом порядка итерации:

$$\begin{aligned}
&(H_0 - E)^{-1} \Gamma_i \Gamma_j |Q_b\rangle \\
&= \beta^2 (H_0 - E)^{-1} |Q_i\rangle \frac{1}{1 + \beta F_i(E)} \langle Q_i | (H_0 - E)^{-1} |Q_j\rangle \frac{1}{1 + \beta F_j(E)} \\
&\quad \langle Q_j | (H_0 - E)^{-1} |Q_b\rangle. \quad (38)
\end{aligned}$$

Отметим, что матричный элемент $\langle Q_i | (H_0 - E)^{-1} |Q_j\rangle$ допускает следующую оценку

$$\langle Q_i | (H_0 - E)^{-1} |Q_j\rangle \sim \int_{\Pi_i} dX Q_i(X) \int_{\Pi_j} dX' Q_j(X') \frac{e^{i\sqrt{E}|X-X'|}}{\sqrt{|X-X'|}} = O(R_1^{-1/2}). \quad (39)$$

Мы воспользовались здесь локализацией функций Q_i и Q_j (17) в областях Π_i и Π_j

$$\Pi_i \equiv \Pi_i^-, \quad \Pi_{i+3} \equiv \Pi_{i+3}^+, \quad i = 1, 2, 3, \quad (40)$$

соответственно, существенно удаленных друг от друга:

$$\text{dist}\{\Pi_i, \Pi_j\} = O\left(\frac{1}{R_1}\right), \quad i \neq j.$$

Отметим также, что согласно (25) функция Q_b сосредоточена в области Π_1 . Таким образом, возникает дополнительная малость вкладов (38) $R_0 \Gamma_i \Gamma_j |Q_b\rangle$ $|_{j \neq 1}$, отвечающих второй итерации операторов отражений, в решение граничной задачи (24):

$$\langle Q_j | (H_0 - E)^{-1} |Q_b\rangle |_{j \neq 1} = O\left(\frac{1}{\sqrt{R_1}}\right). \quad (41)$$

Принимая во внимание оценки (39), (41), приходим к выводу

$$R_0 \Gamma_i \Gamma_j |Q_b \rangle = O\left(\frac{1}{R_1}\right), \quad i \neq j, \quad j \neq 1. \quad (42)$$

Отметим также, что согласно оценке (38), суммирование по индексу i , $i \neq j$ в выражении $\Gamma_i \Gamma_j |Q_b \rangle$ приводит к “проецированию” ограниченной (с учетом граничных условий) функции $(H_0 - E)^{-1} Q_b$ оператором

$$\tilde{P}_{ij} \equiv \sum_{i \neq j} |Q_i \rangle \langle Q_i|$$

на область носителя соответствующей функции невязки. При этом мы принимаем во внимание, что спектральная функция $F_i(E)$ не зависит в данной задаче от значения индекса, а также принимаем во внимание ограниченность нормы $\|Q_i\|_{L_2}$. Тем самым, дополнительное суммирование не ведет к росту соответствующей итерации операторов отражений.

Отметим, что прямые вычисления показывают, что порядок m -й итерации операторов отражений определяется как $O(R_1^{-m/2})$.

Мы можем теперь сделать заключение, что решение граничной задачи (24) при достаточном большом значении параметра R_1 и некотором значении R_2 , $R_1 \ll R_2 \ll R$, может быть описано следующим образом

$$\begin{aligned} \Phi = R |Q_b \rangle &= (H_0 - E)^{-1} |Q_b \rangle \\ &- \beta \sum_{i=1}^6 (H_0 - E)^{-1} |Q_i \rangle \frac{1}{1 + \beta F_i(E)} \langle Q_i | (H_0 - E)^{-1} |Q_b \rangle \\ &+ \beta^2 \sum_{i,j=1,\dots,6} \sum_{i \neq j} (H_0 - E)^{-1} |Q_i \rangle \frac{1}{1 + \beta F_i(E)} \langle Q_i | (H_0 - E)^{-1} |Q_j \rangle \\ &\frac{1}{1 + \beta F_j(E)} \langle Q_j | (H_0 - E)^{-1} |Q_b \rangle + O\left(\frac{1}{R_1^{3/2}}\right). \quad (43) \end{aligned}$$

Данное выражение определяется решением набора граничных задач в круге большого радиуса R для оператора H_0 вида

$$\begin{cases} (H_0 - E)\tilde{\Phi} = \tilde{Q} \\ \left(\frac{\partial \tilde{\Phi}}{\partial n} - i\sqrt{E}\tilde{\Phi}\right)|_{\partial B_R} = O\left(\frac{1}{R^{3/2}}\right) \end{cases}$$

при различных значениях правой части

$$\tilde{Q} = Q_b, Q_i, i = 1, 2, \dots, 6.$$

Отметим, что при увеличении кинетической энергии кластера относительно третьей частицы p^2 и, тем самым, при уменьшении параметра β (33) представление для решения (43) граничной задачи упрощается.

Описанное в (43) решение Φ после подстановки в выражения (19) и (21) определяет значения кластерных амплитуд $a_j^{\tau_j}$, $j = 1, 2, 3$; $\tau_j = \pm$ процессов $2 \rightarrow 2$. Трехчастичная амплитуда рассеяния $A(\theta)$ процесса $2 \rightarrow 3$ определяется выражением

$$A(\theta) = \Phi(\mathbf{X})\sqrt{X} \exp\{-i\sqrt{E}X\}|_{X=R} + O\left(\frac{1}{R}\right).$$

В терминах функции Φ (43) выражение (10) определяет полное асимптотическое решение задачи рассеяния $2 \rightarrow 2(3)$.

§7. ЧИСЛЕННЫЙ АНАЛИЗ

Приведем результаты численного анализа, выполненного в соответствии с предложенной выше схемой. Вычисления проводились с помощью компьютерного пакета FreeFem++. Функция Φ вычислялась с точностью до второй итерации операторов отражения включительно согласно выражению 43 при полной энергии системы $E = 0.5$, $E = 1$ и $E = 2$. Парный потенциал $v(x)$ выбран следующим образом:

$$v(x) = \begin{cases} 0, & x \in (-\infty, -1) \cup (1, +\infty), \\ -1 & x \in (-1, 1). \end{cases}$$

Такой потенциал поддерживает единственное связанное состояние $\varepsilon = -0.453753$.

Результат вычисления абсолютного значения функции Φ в случае $E = 0.5$ представлен на рис. 1.

На рисунке экран l_1 направлен вертикально сверху вниз. Экраны l_2 и l_3 повернуты относительно l_1 на $2\pi/3$ и $4\pi/3$, соответственно. Таким образом, падающая волна движется к центру круга вдоль вертикальной оси сверху вниз.

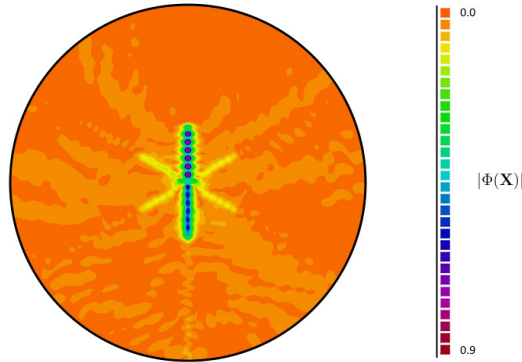


Рис. 1

В соответствии с формулами (19) и (21) были вычислены двухчастичные кластерные амплитуды $a_j^{\tau_j}$, $j = 1, 2, 3$, $\tau_j = \pm$. Приведем полученные значения двухчастичных амплитуд рассеяния:

$$\begin{aligned} a_1^- &= 0.35771 + 0.0302174i, & a_2^+ &= -0.176662 + 0.0142423i, \\ a_3^- &= -0.144211 + 0.00353035i, \\ a_1^+ &= -0.194684 + 0.861316i, & a_2^- &= -0.147772 - 0.00801603i, \\ a_3^+ &= -0.143487 + 0.0180234i. \end{aligned}$$

Видно, что превалирует вероятность прохождения кластерной волны без перестройки, что отвечает коэффициенту a_1^+ .

Абсолютное значение амплитуды развала $A(\theta)$ системы на три частицы для энергии $E = 0.5$ представлено на рис. 2. Синие ромбы указывают угловое положение “полуэкранов” на координатной плоскости.

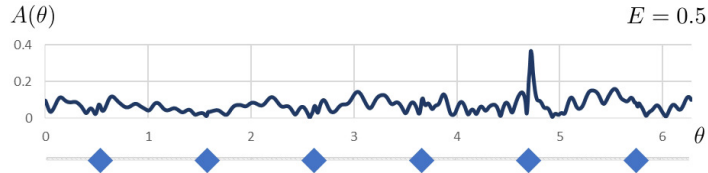


Рис. 2

зывают угловое положение “полуэкранов” на координатной плоскости.

Единственный существенный пик приходится на “полуэкран” l_1^+ и отвечает максимуму амплитуды развала в окрестности направления рассеяния вперед.

Отметим также, что в соответствии с законом сохранения полной вероятности вычисленная полная вероятность всех допустимых в системе процессов с высокой точностью равна единице:

$$\sum_{j=1}^3 \sum_{\tau_j=\pm} |a_j^{\tau_j}|^2 + \int_0^{2\pi} |A(\theta)|^2 d\theta = 1.04.$$

Вычисление кластерных амплитуд $a_j^{\tau_j}$, $j = 1, 2, 3$; $\tau_j = \pm$ позволило, в свою очередь, вычислить в соответствии с (10) выражение $\Psi_0 = \Psi - \Phi$, т.е. совокупность кластерных вкладов в решение (с учетом падающей волны), умноженных на радиальную срезающую функцию:

$$\Psi_0(\mathbf{X}, \mathbf{P}) = \psi_{in}(\mathbf{X}, \mathbf{P})\zeta(X) + \sum_{j=1}^3 \sum_{\tau_j \in \{+, -\}} a_j^{\tau_j} \psi_j^{\tau_j}(\mathbf{X}, \mathbf{P})\zeta(X).$$

На рис.3 представлены результаты вычислений для $|\Psi_0|$ для случая $E = 0.5$

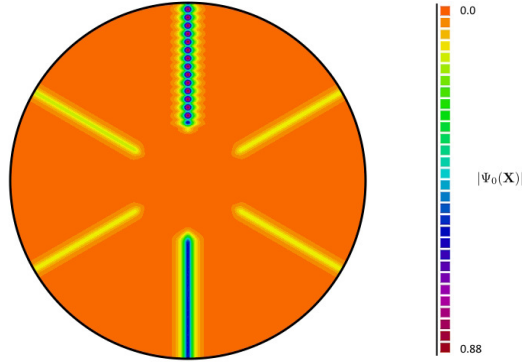


Рис. 3

Наконец, полное решение задачи рассеяния Ψ (его абсолютное значение) при $E = 0.5$ представлено на рис. 4

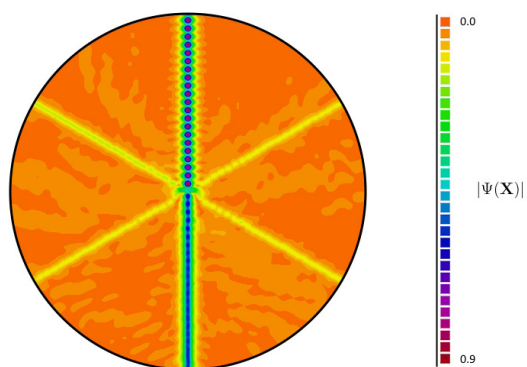


Рис. 4

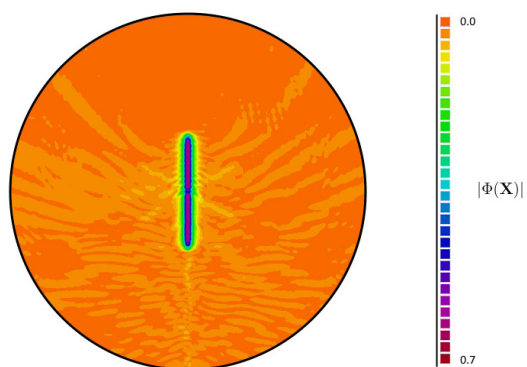


Рис. 5

На рисунках 5–7 приведены результаты аналогичных вычислений при $E = 2$

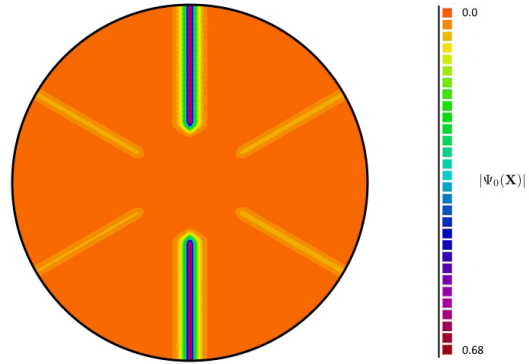


Рис. 6

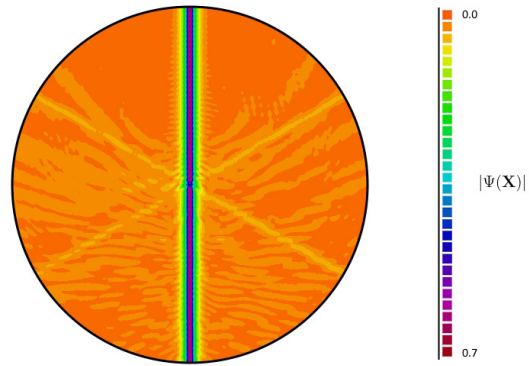


Рис. 7

Приведем также значения кластерных амплитуд для случая $E = 2$:

$$a_1^- = 0.0414651 - 0.0364133i, \quad a_2^+ = 0.0493592 - 0.0132862i,$$

$$a_3^- = -0.0403836 + 0.0184125i,$$

$$a_1^+ = 0.285251 + 0.9518i, \quad a_2^- = -0.0541078 + 0.0147765i,$$

$$a_3^+ = 0.0518601 - 0.00337697i.$$

Заметим, сравнивая рис. 4 и рис.7, что, как и следовало ожидать, влияние каналов перекластеризации (перестройки кластеров) при более низкой энергии возрастает. Амплитуды $a_j^{\tau_j}$, $j \neq 1$ при более низкой энергии увеличиваются по модулю. Это видно также и из приведенных значений самих коэффициентов.

§8. ИНТЕРПРЕТАЦИЯ ПОЛУЧЕННЫХ РЕЗУЛЬТАТОВ И ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Отметим, что предложенный в работе метод поиска асимптотического решения квантовой задачи рассеяния $2 \rightarrow 2(3)$ основан на дифракционном подходе к задаче рассеяния. Идеи этого подхода были предложены в работах [2, 3] и позднее развивались в [4] для случая трех одномерных квантовых частиц с финитными парными потенциалами отталкивания. В данной работе впервые в рамках дифракционного подхода последовательно рассмотрен случай парных потенциалов притяжения, поддерживающих связанные состояния в парных подсистемах. В работе рассматривается случай рассеяния $2 \rightarrow 2(3)$ (рассеяние связанной пары на третьей частице), однако, описанная схема легко обобщается и на задачу рассеяния $3 \rightarrow 2(3)$ (все три частицы свободны в начальном состоянии).

Как в данной задаче, так и в задачах, рассмотренных в работах [2–4], после отделения центра масс системы трех частиц, координатное пространство есть плоскость. Носитель полного потенциала на этой плоскости есть система трех пересекающихся в компактной области бесконечных полупрозрачных полос. Каждая такая полоса с индексом j , $j = 1, 2, 3$ включает два “полуэкрана” $l_j^{\tau_j}$, $\tau_j = \pm$, описанные во втором разделе. Эта система полос делит координатную плоскость на шесть секторов. Каждый сектор отвечает области координатного пространства, где фиксирована определенная перестановка трех частиц на оси. В то же время прохождение через “экран” и проникновение в соседний сектор отвечает туннелированию пары частиц друг через друга при неизменном положении третьей частицы.

Дифракционная схема, отвечающая задаче $3 \rightarrow 3$, подробно описанная в [2–4], а также численно исследованная в работах [32, 33], отвечает рассеянию плоской волны (три свободные частицы), проходящей

из бесконечности в растворе одного фиксированного сектора (ответчающего начальной перестановке частиц), на системе трех таких бесконечных полупрозрачных полос. Подробный анализ такой задачи был сделан в упомянутых выше работах.

Дифракционная схема, отвечающая задаче рассеяния $2 \rightarrow 2(3)$ и рассмотренная в данной работе, несколько отличается от упомянутой выше. Локализованное (по переменной x_1) состояние (первое слагаемое ψ_{in} в представлении (6)) с моментом p рассеивается на центральной области – окрестности пересечения трех носителей потенциала. В результате рассеяния возбуждаются локализованные состояния, уходящие из центральной области с амплитудами $a_j^{\tau_j}$ вдоль “полуэкранов” $l_j^{\tau_j}$, при условии, что парный потенциал v_j поддерживает связанные состояния. Эти волны описываются вторым слагаемым в представлении (6) и описывают процессы перестройки парных подсистем. Иначе говоря, совокупность таких вкладов в решение задачи рассеяния отвечает каналу рассеяния $2 \rightarrow 2$. Еще одним результатом рассеяния локализованного состояния ψ_{in} на центральной области является расходящаяся круговая волна с амплитудой $A(\hat{\mathbf{X}}, \mathbf{P})$ – третье слагаемое в асимптотике (6). Это слагаемое отвечает каналу рассеяния $2 \rightarrow 3$, то есть каналу развала системы на три свободные частицы.

Главной задачей в описании таких процессов рассеяния является определение амплитуд перестройки $a_j^{\tau_j}$ и амплитуды развала $A(\hat{\mathbf{X}}, \mathbf{P})$. Причем задача нахождения амплитуд $a_j^{\tau_j}$ столь же сложна, как и задача нахождения $A(\hat{\mathbf{X}}, \mathbf{P})$, поскольку формирование всех амплитуд определяется не асимптотической областью, но компактной окрестностью точки пересечения трех “экранов”. Мы решаем эту задачу в два этапа. На первом этапе мы исключаем кластерные каналы из рассмотрения, получая взамен дополнительный сепарабельный потенциал (35)

$$V_{sep} = \sum_{i=1}^6 V_{sep}^{(i)}, \quad V_{sep}^{(i)} \equiv \beta |Q_i \rangle \langle Q_i|$$

в операторе Гамильтона. Носитель этого сепарабельного потенциала сосредоточен в областях Π_i , $i = 1, 2, \dots, 6$ сопряжения кластерных каналов и области межканального взаимодействия. В каждой из областей Π_i (40) мощность потенциала определяется соответствующей функцией невязки Q_i искаженного кластерного решения в уравнении

Шредингера. После исключения кластерных каналов строится краевая задача для решения Φ в трехчастичном канале.

Второй этап связан с решением этой краевой задачи. Полученное для функции Φ соотношение (43), допускает дифракционную интерпретацию в следующем смысле. Расходящаяся круговая волна, порожденная источником Q_b , локализованным в области Π_1 , в свою очередь, рассеивается на всех источниках Q_i , $i \neq 1$, приобретая при этом амплитуду $\frac{\beta}{1+\beta F_i(E)} \langle Q_i | (H_0 - E)^{-1} | Q_b \rangle$. Каждая из рассеянных источников Q_i волн рассеивается источником Q_j , $j \neq i$, приобретая амплитуду $\frac{\beta}{1+\beta F_j(E)} \langle Q_j | (H_0 - E)^{-1} | Q_i \rangle$. Совокупность вкладов таких перерассеяний порождается взаимодействием между двухчастичным (кластерным) и трехчастичным каналом (каналом развала) и формирует решение граничной задачи Φ в трехчастичном канале. В свою очередь, амплитуды рассеяния в кластерном канале определяются как функционалы от Φ согласно (19) и (21).

В заключение отметим, что введенная в выражении (9) и формально определяющая область взаимодействия между каналами разного типа функция срезки не вносит, как кажется на первый взгляд, произвола в решение полной задачи. Приведенные в предыдущем разделе результаты численных вычислений при полной энергии $E = 0.5$ и $E = 2$ наглядно демонстрируют, что, хотя область изменения срезающей функции очевидно наблюдается, например, на рис. 1 и рис. 3, на рис. 4 она отсутствует. Аналогичный эффект наблюдается на рис. 5, рис. 6 и рис. 7. Это означает, что предложенная в работе вычислительная схема на заключительном этапе не зависит от влияния функции срезки, играющей такую значительную роль на промежуточных этапах вычислений.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. M. Gaudin, B. Derrida, *Journal de physique* **36** (1975), 1183–1197.
2. В. С. Буслаев, С. П. Меркурьев, С. П. Саликов, *Проблемы матем. физики*, Ленингр. Университет **9** (1979), 14–30.
3. В. С. Буслаев, С. П. Меркурьев, С. П. Саликов, *Граничные задачи математической физики и смежные вопросы в теории функций*. — Зап. научн. семин. ЛОМИ **84** (1979), 16–22.
4. V. S. Buslaev, S. B. Levin, *Selected topics in mathematical physics, Dedicated to Prof. Mikhail Shlëmovich Birman on his 80th birthday*. — Amer. Math. Soc. Transl. **225**, No. 2 (2008), 55–71.
5. В. С. Буслаев, Н. А. Калитеевский, *ТМФ* **70**(1987), 266–277.

6. И. В. Байбулов, А. М. Будылин, С. Б. Левин, Зап. научн. семин. ПОМИ **461** (2017), 14–51.
7. И. В. Байбулов, А. М. Будылин, С. Б. Левин, Зап. научн. семин. ПОМИ **471** (2018), 15–37.
8. E. H. Lieb and W. Liniger, *Phys. Rev.* **130** (1963), 1605.
9. J. V. McGuire, *J. Math. Phys.* **5** (1964), 622.
10. C. N. Yang, *Phys. Rev. Lett.* **19** (1967), 1312.
11. W. G. Gibson, S. Y. Larsen, J. Popiel, *Phys. Rev. A* **35** (1987), 4919.
12. Yu. A. Kuperin, P. B. Kurasov, Yu. B. Melnikov, S. P. Merkuriev, *Ann. Phys.* **205** (1991), 330.
13. A. Amaya-Tapia, S. Y. Larsen, J. Popiel, *Few-Body Syst.* **23** (1998), 87.
14. M. Olshanii, *Phys. Rev. Lett.* **81** (1998), 938.
15. С. И. Виницкий, С. И. Ларсен, Д. В. Павлов, Д. В. Проскурин, *ЯФ* **64** (2001), 29; English transl., *Phys. Atom. Nucl.* **64** (2001), 27.
16. O. Chuluunbaatar, A. A. Gusev, S. Y. Larsen, S. I. Vinitsky, *J. Phys. A* **35** (2002), L513.
17. A. Amaya-Tapia, G. Gasaneo, S. Ovchinnikov, et al., *J. Math. Phys.* **45** (2004) 3533.
18. O. I. Tolstikhin C. Namba, *Phys. Rev. A* **70** (2004) 062721.
19. G. V. Sitnikov O. I. Tolstikhin, *Phys. Rev. A* **71** (2005) 022708.
20. N. P. Mehta J. R. Shepard, *Phys. Rev. A* **72** (2005), 032728.
21. O. Chuluunbaatar et al., *J. Phys. B* **39** (2006) 243.
22. N. P. Mehta, B. D. Esry, C. H. Greene, *Phys. Rev. A* **76** (2007) 022711.
23. O. Chuluunbaatar et al., *Comput. Phys. Commun.* **177** (2007) 649.
24. A. Gorlitz et al., *Phys. Rev. Lett.* **87** (2001) 130402.
25. T. Kinoshita, T. Wenger, D. S. Weiss, *Nature (London)* **440** (2006) 900.
26. T. Kinoshita, T. Wenger, D. S. Weiss, *Science* **305** (2004) 1125.
27. J. Esteve et al., *Phys. Rev. Lett.* **96** (2006), 130403.
28. А. М. Будылин, С. Б. Левин, *ЖЭТФ* **162**, No. 5 (2022), 657–662.
29. H. Feshbach, C. E. Porter, V. F. Weisskopf, *Phys. Rev., II. Ser.* **96** (1954), 448–464.
30. А. М. Будылин, В. С. Буслаев, *Adv. Sov. Math., Amer. Math. Soc.* **7** (1995), 107–157.
31. F. Calogero, *Comm. Math. Phys.* **1** (1965), 80.
32. V. S. Buslaev, S. B. Levin, P. Neittaannmäki, T. Ojala, *J. Phys. A: Math.Theor.* **43**, (2010), 285205.
33. В. С. Буслаев, Я. Ю. Коптелов, С. Б. Левин, Д. А. Стрыгина, *Ядерная Физика* **76**, No. 2 (2013), 236–247.
34. B. Simon, Second Edition, *Mathematical Surveys and Monographs*, American Mathematical Society **120** (2005).

Bagmutov A. S., Levin S. B., Toropov B. O. Model of an effective separable potential in the problem of three one-dimensional quantum particles.

In this paper, we construct an effective model for studying the asymptotic solution of the scattering problem of three one-dimensional quantum particles with finite (short-range) attractive pair potentials that support bound

states. The asymptotic nature of the solution is determined by the rapid decrease of its residual in the Schrödinger equation.

Институт проблем машиноведения РАН;
С.-Петербургский институт
точной механики и оптики
E-mail: bagmutov94@mail.ru

Поступило 2 сентября 2024 г.

С.-Петербургский государственный университет;
Институт проблем машиноведения РАН
E-mail: s.levin@spbu.ru
E-mail: st076443@student.spbu.ru