

И. В. Андронов

ДИФРАКЦИЯ НА СИЛЬНО ВЫТЯНУТОМ СОСТАВНОМ СФЕРОИДЕ

§1. ВВЕДЕНИЕ

Недавние публикации [1–3], в которых исследуется дифракция волн на скачке кривизны границы, показывают неослабевающий интерес исследователей к изучению эффектов дифракции на различного рода неоднородностях границы и граничных условий. Задача дифракции на скачке импеданса в граничном условии, изначально связанная с моделью распространения электромагнитных на границей суши и моря, была решена Гринбергом и Фоком в 1948 [4, 5]. Случай наклонного падения рассмотрен в [6]. Задача усложняется, если такой скачок импеданса происходит вблизи границы света и тени на поверхности выпуклого тела. В рамках метода параболического уравнения такая задача рассмотрена в [7].

В данной работе мы рассматриваем дифракцию плоской акустической волны на сильно вытянутом, в смысле [8], сфероиде, часть поверхности которого является акустически жёсткой, а часть — акустически мягкой. Рассмотрения ведутся в рамках метода параболического уравнения [5], модифицированного в [8] для случая сильно вытянутого тела. Данная модельная задача может также рассматриваться как шаг к описанию процессов дифракции на усечённых сильно вытянутых телах [9].

В конце статьи представлены результаты численных расчётов при осевом падении.

§2. ЗАДАЧА ДИФРАКЦИИ

Пусть плоская волна частоты ω (множитель $e^{-i\omega t}$ везде опущен)

$$u^\circ = \exp(ikx \sin \vartheta + ikz \cos \vartheta) \quad (1)$$

Ключевые слова: асимптотические методы, высокочастотная дифракция, сильно вытянутое тело, параболическое уравнение, акустически жёсткая и мягкая поверхности.

падает под малым углом ϑ к оси OZ сфероидального тела с полуосями: большой b и малой a . Дифрагированное поле удовлетворяет уравнению Гельмгольца

$$\Delta u + k^2 u = 0 \quad (2)$$

во внешности сфероида

$$\frac{x^2 + y^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} > 1,$$

краевым условиям на его поверхности

$$\begin{cases} u + u^\circ = 0 & \text{при } -b < z < z_0, \\ \frac{\partial u}{\partial \nu} + \frac{\partial u^\circ}{\partial \nu} = 0, & \text{при } z_0 < z < b \end{cases} \quad (3)$$

где ν — нормаль к поверхности, и условию излучения на бесконечности.

Задачу рассматриваем в высокочастотном приближении, то есть $ka \gg 1$ и $kb \gg 1$. Сильно вытянутым согласно [8] мы называем сфероид, полуоси которого удовлетворяют соотношению

$$\chi = 2k \left(b - \sqrt{b^2 - a^2} \right) \approx \frac{ka^2}{b} = O(1). \quad (4)$$

Параметр χ называем параметром вытянутости. Дифракционные эффекты, связанные с сильной вытянутостью тела проявляется в том случае, когда падающая волна распространяется почти вдоль оси сфероида, т.е. угол ϑ в (1) мал настолько, что

$$\beta = \sqrt{kb}\theta = O(1). \quad (5)$$

§3. ПРИБЛИЖЕНИЕ ПАРАБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ

Введём сфероидальные координаты [10] формулами

$$\begin{cases} x = p\sqrt{1 - \eta^2}\sqrt{\xi^2 - 1} \cos(\varphi), \\ y = p\sqrt{1 - \eta^2}\sqrt{\xi^2 - 1} \sin(\varphi), \\ z = p\eta\xi, \end{cases}$$

где $p = \sqrt{b^2 - a^2}$ — половина межфокусного расстояния. Параметр $kp \gg 1$ будем использовать как асимптотический параметр.

Ввиду (4) радиальная координата ξ на поверхности сфероида близка к единице. Произведём её масштабирование

$$\xi = 1 + \frac{\chi\tau}{2kp}. \quad (6)$$

Новая координата τ введена так, что на поверхности сфероида она принимает значение $\tau = 1$. Для производной по нормали ν ограничимся приближением

$$\frac{\partial}{\partial \nu} \Big|_{n=0} = \frac{2}{a\sqrt{1-\eta^2}} \frac{\partial}{\partial \tau} \Big|_{\tau=1}. \quad (7)$$

В рамках приближения параболического уравнения представим поле u в виде

$$u = \exp(ikr\eta)U(\eta, \tau, \varphi), \quad (8)$$

при этом функция ослабления U считается зависящей от своих координат таким образом, что её производные имеют такой же порядок как и U . Ввиду симметрии задачи будем искать U в виде ряда Фурье

$$U(\eta, \tau, \varphi) = U_0(\eta, \tau) + 2 \sum_{n=1}^{\infty} U_n(\eta, \tau) \cos(n\varphi). \quad (9)$$

Тогда гармоники U_n в старшем порядке по $kp \gg 1$ удовлетворяют параболическому уравнению [8, 11]

$$\tau \frac{\partial^2 U_n}{\partial \tau^2} + \frac{\partial U_n}{\partial \tau} + \frac{i\chi}{2} (1 - \eta^2) \frac{\partial U_n}{\partial \eta} + \left(\frac{\chi^2}{4} \tau - \frac{n^2}{4\tau} - \frac{i\chi\eta}{2} \right) U_n = 0. \quad (10)$$

Разделение переменных в этом уравнении приводит к представлению решения в виде

$$U_n^{\circ} + U_n = \frac{1}{\sqrt{\chi\tau}\sqrt{1-\eta^2}} \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{1-\eta}{1+\eta} \right)^{it} A_n(t) \times \\ \times [M_{it, n/2}(-i\chi\tau) + R_n(t)W_{it, n/2}(-i\chi\tau)] dt. \quad (11)$$

Здесь M и W — функции Уиттекера [12]. Амплитуды A_n определяются падающим полем и были найдены в [11]:

$$A_n(t) = \frac{M_{it, n/2}(i\beta^2)}{\pi\beta\sqrt{\chi}} \frac{\Gamma(it + n/2 + 1/2)\Gamma(n/2 + 1/2 - it)}{\Gamma^2(n + 1)}. \quad (12)$$

Функции Уиттекера $W_{it, n/2}(-i\chi\tau)$ в представлении (11) выбраны исходя из условий излучения. Стоящие при них амплитуды R_n играют роль коэффициентов отражения и определяются из граничных условий на поверхности сфероида.

§4. ЗАДАЧА ДЛЯ ОПРЕДЕЛЕНИЯ КОЭФФИЦИЕНТОВ
ОТРАЖЕНИЯ

После подстановки представления (11) в граничные условия (3) получаем требования на коэффициенты $R_n(t)$:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{1-\eta}{1+\eta} \right)^{it} A_n(t) [M_{it,n/2}(-i\chi) + R_n(t)W_{it,n/2}(-i\chi)] dt = 0, \quad (13)$$

$$-1 < \eta < \eta_0,$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{1-\eta}{1+\eta} \right)^{it} A_n(t) [M_{it,n/2}(-i\chi) + 2i\chi\dot{M}_{it,n/2}(-i\chi) + R_n(t) (W_{it,n/2}(-i\chi) + 2i\chi\dot{W}_{it,n/2}(-i\chi))] dt = 0, \quad (14)$$

$$\eta_0 < \eta < 1,$$

где $\eta_0 = z_0/b$.

Уравнения (13), (14) являются парными интегральными уравнениями и их решение, как обычно, сводится к задаче Римана теории аналитических функций. Действительно, чтобы выполнялось условие (13), потребуем чтобы функции

$$F_n(t) = \left(\frac{1-\eta_0}{1+\eta_0} \right)^{it} A_n(t) [M_{it,n/2}(-i\chi) + R_n(t)W_{it,n/2}(-i\chi)] \quad (15)$$

были аналитичны и убывали в верхней полуплоскости t . Для того, чтобы выполнялись условия (14), функции

$$G_n(t) = \left(\frac{1-\eta_0}{1+\eta_0} \right)^{it} A_n(t) [M_{it,n/2}(-i\chi) + 2i\chi\dot{M}_{it,n/2}(-i\chi) + R_n(t) (W_{it,n/2}(-i\chi) + 2i\chi\dot{W}_{it,n/2}(-i\chi))]$$

должны быть аналитичны и убывать в нижней полуплоскости комплексного t .

Исключая R_n и учитывая выражение для вронскиана функций Уиттекера

$$\dot{M}_{it,n/2}W_{it,n/2} - M_{it,n/2}\dot{W}_{it,n/2} = \frac{n!}{\Gamma\left(\frac{n+1}{2} - it\right)},$$

получим задачу о нахождении функций F_n и G_n , аналитических в верхней и нижней полуплоскостях t соответственно и связанных при действительных t соотношением

$$\begin{aligned} G_n(t)W_{it,n/2}(-i\chi) - F_n(t) \left[W_{it,n/2}(-i\chi) + 2i\chi\dot{W}_{it,n/2}(-i\chi) \right] \\ = \frac{2i\sqrt{\chi}}{\pi\beta n!} \left(\frac{1-\eta_0}{1+\eta_0} \right)^{it} M_{it,n/2}(i\beta^2)\Gamma\left(\frac{n+1}{2} + it\right). \end{aligned} \quad (16)$$

Решение задачи Римана обычно состоит из двух этапов [13]. Сначала производится мультипликативная факторизация коэффициента, а затем решается задача о скачке. Однако в нашем случае ввиду того, что функции Уиттекера $W_{it,n/2}(-i\chi)$ аналитичны по значку и имеют нули только в нижней полуплоскости t , задача сразу может быть переписана как задача о скачке:

$$G_n^{(+)}(t) - G_n^{(-)}(t) = H_n(t),$$

где

$$G_n^{(+)}(t) = F_n(t) \left[1 + 2i\chi \frac{\dot{W}_{it,n/2}(-i\chi)}{W_{it,n/2}(-i\chi)} \right], \quad G_n^{(-)}(t) = G_n(t) \quad (17)$$

и

$$H_n(t) = -\frac{2i\sqrt{\chi}}{\pi\beta n!} \left(\frac{b-z_0}{b+z_0} \right)^{it} \Gamma\left(\frac{n+1}{2} + it\right) \frac{M_{it,n/2}(-i\chi)}{W_{it,n/2}(-i\chi)}.$$

Тогда

$$G_n^{(+)}(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{+\infty} e^{ist} h_n(s) ds, \quad h_n(s) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ist} H_n(t) dt. \quad (18)$$

На основании асимптотик функций Уиттекера по значку [14] можно показать, что подынтегральные выражения в (18) экспоненциально убывают на бесконечности, что обеспечивает сходимость интегралов.

После того, как функции $G_n^{(+)}$ найдены из формулы (17) выражаются $F_n(t)$ и из соотношения (15) определяются коэффициенты $R_n(t)$, входящие в представление (11). Имеем

$$R_n(t) = \frac{G_n^{(+)}(t)}{W_{it,n/2}(-i\chi) + 2i\chi\dot{W}_{it,n/2}(-i\chi)} \left(\frac{1+\eta_0}{1-\eta_0} \right)^{it} A_n^{-1}(t) - \frac{M_{it,n/2}(-i\chi)}{W_{it,n/2}(-i\chi)}.$$

§5. ЧИСЛЕННЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Численные расчёты проведём для случая осевого падения. При этом ввиду пределов (см. формулы 13.1.2 и 13.1.32 из [12])

$$\lim_{\beta \rightarrow +0} \frac{M_{it,0}(i\beta^2)}{\beta} = e^{i\pi/4},$$

$$\lim_{\beta \rightarrow +0} \frac{M_{it,n}(i\beta^2)}{\beta} = 0, \quad n = 1, 2, \dots$$

формулы упрощаются. В частности в ряде Фурье в (9) сохраняется лишь нулевой член, а формулы (12) сводятся к

$$A_0(t) = \frac{e^{i\pi/4}}{\text{ch}(\pi t)}.$$

Расчёты показывают, что при вычислении интегралов в (18) можно ограничить область интегрирования до отрезков $s \in [0, 20]$, $t \in [-20, 20]$. При вычислении же интеграла в (11), ввиду убывания подынтегрального выражения лишь как $t^{-3/2}$ приходится выделять эталонный интеграл

$$\int_A^{+\infty} t^{-3/2} e^{itx} dt = \frac{2e^{iAx}}{\sqrt{A}} + 2e^{-i\text{sign}(x)\pi/4} \sqrt{\pi|x|} \left[\text{erf}(e^{-i\text{sign}(x)\pi/4} \sqrt{A|x|}) - 1 \right],$$
(19)

выражающийся через интеграл вероятностей erf. На рис. 1 представлены графики амплитуды поля на поверхности сфероидов при $\chi = 10$, $\chi = 1$ и $\chi = 0.1$.

Из графиков видно, что вступление поля на жёсткой части поверхности происходит по закону $\sqrt{\eta - \eta_0}$, что следует также из формулы (19). Процесс возбуждения поля можно разделить на две составляющие: возбуждение посредством падающей волны (подобно тому, как это происходит на полностью жёстком сфероиде) и возбуждение посредством волны, распространяющейся по акустически мягкой части поверхности, при её дифракции на линии смену граничного условия (перевозбуждение). Графики на рис. 1 показывают, что несмотря на то, что волна на мягкой поверхности имеет тем более высокую амплитуду, чем более сильно вытянут сфероид [15], вклад эффекта перевозбуждения заметен лишь на менее вытянутом теле (при $\chi = 10$). В остальных случаях амплитуда возбуждаемой волны всегда меньше,

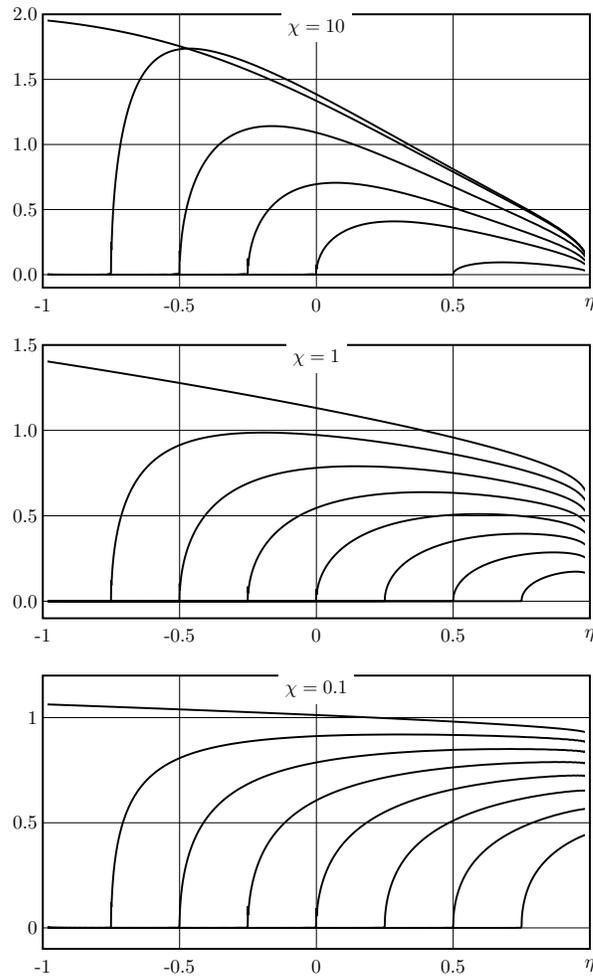


Рис. 1. Распределение амплитуды полей на поверхности сфероидов при различных положениях сечения, в котором происходит смена граничного условия.

чем амплитуда волны на полностью жёстком сфероиде и тем меньше, чем ближе к тени располагается линия смены граничного условия.

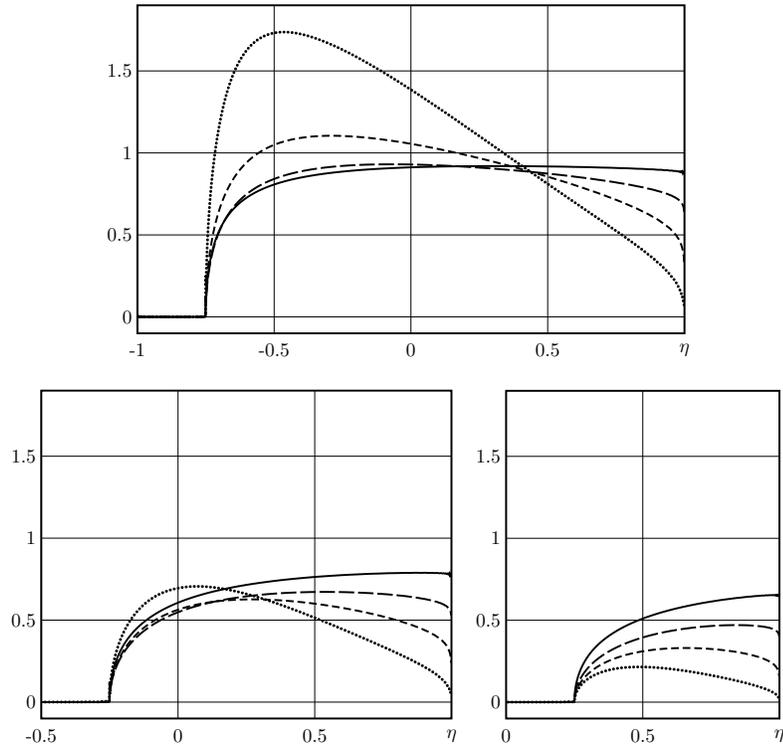


Рис. 2. Амплитуды поля на сфероидах разной степени вытянутости. Сплошная кривая – $\chi = 0.1$, длинно-штриховая – $\chi = 0.5$, коротко-штриховая – $\chi = 2$ и пунктир – $\chi = 10$.

Распределения амплитуд на сфероидах разной степени вытянутости, представленные на рис. 2, показывают, что при расположении границы между мягкой и жёсткой частями поверхности вблизи освещённого конца сфероида наибольшую амплитуду имеет волна на менее вытянутом сфероиде ($\chi = 10$), а на наиболее вытянутом ($\chi = 0.1$)

амплитуда минимальна. Но по мере приближения этой границы к области тени происходит перестройка и в случае, когда граница располагается в области тени, максимальная амплитуда поля наблюдается уже на наиболее вытянутом сфероиде.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Е. А. Злобина, А. П. Киселев, *Дифракция волны шепчущей галереи при скачкообразном распрямлении границы*. — Акуст. журн. **69**, вып. 2 (2023), 119–128.
2. Е. А. Злобина, *Коротковолновая дифракция на контуре с негладкой кривизной. Пограничный подход*. — Зап. научн. сем. ПОМИ **493** (2020), 169–185.
3. Е. А. Злобина, А. П. Киселев, *Переходная зона в высокочастотной задаче дифракции на импедансной границе со скачком кривизны. Метод Кирхгофа и метод пограничного слоя*. — Радиотехника и электроника **67** (2022), 130–139.
4. Г. А. Гринберг, В. А. Фок, *К теории береговой рефракции*. — В кн.: Исследования по распространению радиоволн ПБ (1948), С. 69–96.
5. В. А. Фок, *Проблемы диффракции и распространения электромагнитных волн*, Советское радио, М. (1970).
6. В. Г. Мышкин, *Дифракция скалярной поверхностной волны, наклонно падающей на границу между импедансными полуплоскостями*. — Акуст. журн. **12**, вып. 3 (1966), 351–354.
7. М. А. Лялинов, *Дифракция волны на цилиндрической поверхности с разрывным импедансом*. — Зап. научн. сем. ПОМИ **210** (1994), 164–174.
8. I. V. Andronov, *High-frequency diffraction by elongated bodies*, Springer series in optical sciences, vol. 243, Springer Singapore, 2023, XII + 188 p.
9. F. Molinet, I. Andronov, *Elliptic cylinder with a strongly elongated cross-section: high frequency techniques and function theoretic methods*. — В кн. *Advances in Mathematical Methods for Electromagnetics*, под ред. K. Kobayashi, P.D. Smith, London: The IET, 2021.
10. И. В. Комаров, Л. И. Пономарёв, С. Ю. Славянов, *Сфероидальные и кулоновские сфероидальные функции*, Наука, М. (1976).
11. И. В. Андронов, *Дифракция плоской волны, падающей под малым углом к оси сильно вытянутого сфероида*. — Акуст. журн. **58**, вып. 5 (2012)б 571–579.
12. М. Абрамовиц, И. Стиган (ред.), *Справочник по специальным функциям с формулами, графиками и математическими таблицами*, Наука, М. (1979).
13. Ф. Д. Гахов, Ю. И. Черский, *Уравнения типа свёртки*, Наука, М. (1978).
14. Г. Бейтмен, А. Эрдейи, *Высшие трансцендентные функции. Гипергеометрическая функция. Функция Лежандра*, Наука, М. (1965).
15. И. В. Андронов, *Дифракция на сильно вытянутом теле вращения*. — Акуст. журн. **57**, No 2 (2011), 147–152.

Andronov I. V. Diffraction by a strongly elongated compound spheroid.

This paper investigates the high-frequency field in the problem of diffraction by a strongly elongated spheroidal body, part of the surface of which is

acoustically soft and the other part is acoustically hard. Numerical results for the case of axial incidence are presented.

Михайловская военная
артиллерийская академия,
ул. Комсомола, д. 22
195009, г. Санкт-Петербург;
Ст.-Петербургский
государственный университет, НИИФ
Ульяновская, 1/1
198504 Петродворец
E-mail: iva--@list.ru

Поступило 26 сентября 2024 г.