

Н. В. Харук

ТРЕХПЕТЛЕВАЯ ПЕРЕНОРМИРОВКА С ОБРЕЗАНИЕМ В ШЕСТЕРНОЙ МОДЕЛИ

§1. ВВЕДЕНИЕ

В квантовой теории [1, 2] поля при пертурбативном подходе зачастую возникают расходящиеся интегралы [3, 4]. Для корректной работы с такими объектами используется регуляризация. В зависимости от типа рассматриваемой модели и желаемого результата применяются различные схемы регуляризации. Например, одним из самых естественных подходов является регуляризация обрезанием, которая обычно заключается в обрезании интеграла на нижнем или верхнем пределе интегрирования.

В данной статье используется регуляризация обрезанием в изложении [5–12] для изучения трехпетлевых сингулярностей в трехмерной скалярной теории с шестерным взаимодействием [13–18] с использованием метода фонового поля. В ходе исследований вычислены коэффициенты констант перенормировки, а также продемонстрировано отсутствие сингулярных нелокальных вкладов.

Работа имеет следующую структуру. В разделе 2 приводится постановка задачи, основные определения и уравнения для коэффициентов констант перенормировки. В секции 3 формулируется теорема с результатами, а также приводятся основные шаги ее доказательства. В заключении содержатся некоторые комментарии и частные случаи.

§2. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассмотрим стандартное 3-мерное евклидово пространство \mathbb{R}^3 , элементы которого будем обозначать латинскими буквами x , y , z , а их

Ключевые слова: перенормировка, константа перенормировки, скалярная модель, регуляризация обрезанием, функция Грина, квантовое действие, квантовое уравнение движения, диаграмма Фейнмана, три петли, эффективное действие, деформация, шестерное взаимодействие.

Работа поддержана Министерством науки и высшего образования РФ, грант 075-15-2022-289.

отдельные компоненты при помощи греческих индексов. Определим скалярное вещественное поле $\phi(\cdot)$ и классическое действие $S[\cdot]$ для модели с шестерным взаимодействием в виде

$$S[\phi] = \int_{\mathbb{R}^3} d^3x \left(t_1 \phi(x) + \frac{1}{2} \phi(x) (A_0(x) + m^2) \phi(x) + \sum_{k=3}^6 \frac{t_k}{k!} \phi^k(x) \right), \quad (1)$$

где $A_0(x) = -\partial_{x_\mu} \partial_{x^\mu}$ – оператор Лапласа, m^2 – квадрат массового параметра, и t_k – вещественные константы, отвечающие за взаимодействие. Под введением регуляризации будем понимать прибавление к классическому действию добавки вида

$$S[\phi, \Lambda] = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^3} d^3x \phi(x) (A_0^\Lambda(x) - A_0(x)) \phi(x),$$

где $A_0^\Lambda(x)$ – деформированный оператор Лапласа, такой что отвечающая ему функция Грина $R_0^\Lambda(\cdot)$ получается переходом

$$R_0(x) = \frac{1}{4\pi|x|} \rightarrow R_0^\Lambda(x) = \frac{\Lambda}{4\pi} \mathbf{f}(|x|^2 \Lambda^2) + \frac{1}{4\pi} \begin{cases} \Lambda, & |x| \leq 1/\Lambda; \\ |x|^{-1}, & |x| > 1/\Lambda. \end{cases}$$

Здесь Λ – размерный параметр регуляризации, и $\mathbf{f}(\cdot)$ – вспомогательная регуляризующая функция из $C([0, +\infty), \mathbb{R})$. Она обладает следующими свойствами

$$\text{supp}(\mathbf{f}(\cdot)) \subset [0, 1], \quad A_0(x) \Lambda \mathbf{f}(|x - y|^2 \Lambda^2) \xrightarrow{\Lambda \rightarrow +\infty} 0,$$

где последнее следует понимать в смысле обобщенных функций на классе Шварца $S(\mathbb{R}^3)$, см. [19].

Как известно, квантовое действие для данной теории содержит расходимости, которые, используя теорию перенормировок, можно устранить путем переопределения параметров и поля. Для исследуемой модели процедура носит мультипликативный характер [20] и имеет следующий вид

$$t_i \rightarrow t_i Z_i / Z_0^{i/2}, \quad m^2 \rightarrow m^2 Z_2 / Z_0, \quad \phi(\cdot) \rightarrow \phi(\cdot) Z_0^{1/2},$$

где

$$Z_i = z_{i0} + \sum_{k=1}^{+\infty} \hbar^k z_{ik}$$

для всех $i = 0, \dots, 6$ с условием $z_{i0} = 1$. При такой замене классическое регуляризованное действие переходит в перенормированное

$S[\phi] + S[\phi, \Lambda] \rightarrow S_{\text{ren}}[\phi]$. После применения метода фонового поля $\phi(\cdot) \rightarrow B(\cdot) + \sqrt{\hbar}\phi(\cdot)$, подробно изложенного в работах [21–25], разложение квантового действия по константе Планка можно выписать явно. Определим ряд вспомогательных функционалов

$$\Gamma_{3k}[\phi] = \int_{\mathbb{R}^3} d^3x \left(t_3 z_{3k} + t_4 z_{4k} B(x) + \frac{t_5 z_{5k}}{2} B^2(x) + \frac{t_6 z_{6k}}{3!} B^3(x) \right) \phi^3(x),$$

$$\Gamma_{4k}[\phi] = \int_{\mathbb{R}^3} d^3x \left(t_4 z_{4k} + t_5 z_{5k} B(x) + \frac{t_6 z_{6k}}{2} B^2(x) \right) \phi^4(x),$$

$$\Gamma_{5k}[\phi] = \int_{\mathbb{R}^3} d^3x \left(t_5 z_{5k} + t_6 z_{6k} B(x) \right) \phi^5(x),$$

$$\Gamma_{6k}[\phi] = \int_{\mathbb{R}^3} d^3x t_6 z_{6k} \phi^6(x),$$

$$S_i[\phi] = \int_{\mathbb{R}^3} d^3x \phi^i(x), \quad S_0[\phi] = \int_{\mathbb{R}^3} d^3x \phi^i(x) A_0^\Lambda(x) \phi^i(x),$$

$$X_i[\phi] = \int_{\mathbb{R}^3} d^3x \phi(x) \left(A_0^\Lambda(x) z_{0i} + m^2 z_{2i} + \sum_{n=3}^6 \frac{t_n z_{ni}}{(n-2)!} B^{n-2}(x) \right) \phi(x),$$

$$(A_0^\Lambda(x) + m^2 + v(x)) G^\Lambda(x, y) = \delta(x - y), \quad (2)$$

где потенциал, зависящий от фонового поля, имеет вид

$$v(x) = t_3 B(x) + \frac{t_4}{2} B^2(x) + \frac{t_5}{3!} B^3(x) + \frac{t_6}{4!} B^4(x).$$

Для них можно ввести элементы диаграммной техники, см. рис. 1. Тогда квантовое перенормированное действие $W_{\text{ren}}[B, \Lambda]$ можно записать следующим образом

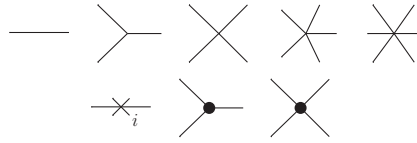


Рис. 1. Элементы диаграммной техники G^Λ и Γ_{30} – Γ_{60} в первой строке, а также X_i , Γ_{31} и Γ_{41} во второй строке.

$$W_{\text{ren}}[B, \Lambda] = S_{\text{ren}}[B] - \left(\frac{\hbar}{2} \ln \det(G^\Lambda) + \hbar \kappa_1 \right) - \left[\hbar \exp \left(-\frac{1}{2} \sum_{k=1}^{+\infty} \hbar^k X_k[\delta_j] - \sum_{n=3}^6 \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\hbar^{n/2+k-1}}{n!} \Gamma_{nk}[\delta_j] \right) \times e^{g[G^\Lambda, j]} \Big|_{j=0}^{\text{1PI}} + \sum_{n=2}^{+\infty} \hbar^n \kappa_n \right],$$

где $j_a(x)$ – вспомогательное гладкое поле, $\delta_{j_a(x)}$ – вариационная производная по полю $j_a(x)$, и

$$g[G^\Lambda, j] = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^3} \int_{\mathbb{R}^3} d^3x d^3y j_a(x) G_{ab}^\Lambda(x, y) j_b(y).$$

Также символ «1PI» означает, что в сумме сохраняются только сильно связанные диаграммы. Константы κ_n вычитают особенности, не зависящие от фонового поля.



Рис. 2. Диаграммы d_1 и d_2 и контрдиаграмма cd_1 .

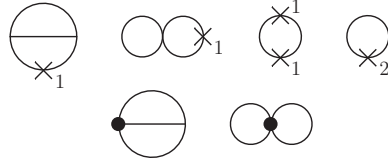


Рис. 3. Слева направо контрдиаграммы cd_2 – cd_5 в первой строке и cd_6 – cd_7 во второй строке.

Так как в перенормированном действии $W_{\text{ren}}[B, \Lambda]$ отсутствуют сингулярные слагаемые, то они отсутствуют и в каждом порядке \hbar^k по константе Планка. Так получаются соотношения для коэффициентов

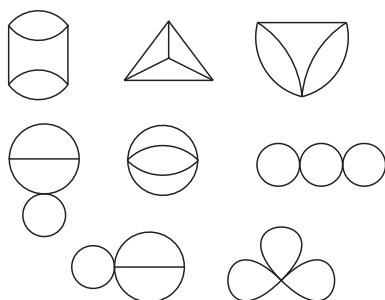


Рис. 4. Слева направо диаграммы d_3-d_5 в верхней строке, d_6-d_8 в средней строке и d_9-d_{10} в нижней строке.

констант перенормировки. В данной работе будут исследоваться первые три соотношения. Они имеют вид

$$t_1 z_{11} S_1 + \frac{z_{01}}{2} S_0 + \frac{m^2 z_{21}}{2} S_2 + \sum_{k=3}^6 \frac{t_k z_{k1}}{k!} S_k \stackrel{\text{s.p.}}{=} \frac{1}{2} \ln \det(G^\Lambda) + \kappa_1, \quad (3)$$

$$t_1 z_{12} S_1 + \frac{z_{02}}{2} S_0 + \frac{m^2 z_{22}}{2} S_2 + \sum_{k=3}^6 \frac{t_k z_{k2}}{k!} S_k \stackrel{\text{s.p.}}{=} \frac{d_1}{12} - \frac{d_2}{8} - \frac{cd_1}{2} + \kappa_2, \quad (4)$$

$$t_1 z_{13} S_1 + \frac{z_{03}}{2} S_0 + \frac{m^2 z_{23}}{2} S_2 + \sum_{k=3}^6 \frac{t_k z_{k3}}{k!} S_k \stackrel{\text{s.p.}}{=} \frac{d_3}{16} + \frac{d_4}{24} - \frac{d_5}{8} - \frac{d_6}{8} + \frac{d_7}{48} + \frac{d_8}{16} + \frac{d_9}{12} - \frac{d_{10}}{48} - \frac{cd_2}{4} + \frac{cd_3}{4} + \frac{cd_4}{4} - \frac{cd_5}{2} + \frac{cd_6}{6} - \frac{cd_7}{8} + \kappa_3,$$

где знак $\stackrel{\text{s.p.}}{=}$ означает равенство сингулярных частей. Зависимость от фонового поля $B(\cdot)$ в функционалах была опущена для простоты. Также здесь используются обозначения для диаграмм, изображенных на рисунках 2, 3 и 4.

§3. РЕЗУЛЬТАТЫ И СООТНОШЕНИЯ

Ключевым элементом при исследовании сингулярных составляющих является разложение функции Грина (2) около диагонали, то есть при $x \sim y$. В трехмерном пространстве в рамках изучения первых трех

квантовых поправок такое разложение может быть выписано [26, 27] в простом виде

$$G^\Lambda(x, y) = R_0^\Lambda(x - y) + PS(x, y), \quad (5)$$

содержащим всего два слагаемых, так как в трехпетлевых диаграммах не появляются неинтегрируемые плотности $|x|^{-k}$ с $k > 4$, зависящие при этом от фонового поля. Функция $PS(x, y)$ имеет конечный предел при $y = x$ и носит нелокальный характер в смысле зависимости от фонового поля.

Далее для удобства введем ряд обозначений

$$\begin{aligned} \alpha &= R_0^1(0) = \frac{\mathbf{f}(0) + 1}{4\pi}, \\ \alpha_1(\mathbf{f}) &= \int_{\mathbb{R}^3} d^3x \left(G^\Lambda(x) \right)^4 = \frac{1}{(4\pi)^3} \left(1 + \int_0^1 ds s^2 \left(\mathbf{f}(s^2) + 1 \right)^4 \right), \\ J_{ij}[B] &= \int_{\mathbb{R}^3} d^3x B^i(x) (PS(x, x))^j. \end{aligned}$$

Последнее обозначение будет использоваться только в случае $j \neq 0$, чтобы не возникала путаница в связи с равенством $J_{i0}[B] = S_i[B]$. Такое обозначение является индикатором наличия нелокальной составляющей.

Теорема 1. Пусть выполнены предположения, изложенные выше. Тогда сингулярные вклады в первых трех квантовых поправках пропорциональны $S_i[B]$, где $i \in \{0, \dots, 6\}$, а коэффициенты (2) для констант перенормировки имеют вид

$$\begin{aligned} z_{01} &= \hat{z}_{01}, \quad z_{11} = -\frac{\alpha t_3}{2t_1} \Lambda + \hat{z}_{11}, \quad z_{21} = -\frac{\alpha t_4}{2m^2} \Lambda + \hat{z}_{21}, \quad z_{31} = -\frac{\alpha t_5}{2t_3} \Lambda + \hat{z}_{31}, \\ z_{41} &= -\frac{\alpha t_6}{2t_4} \Lambda + \hat{z}_{41}, \quad z_{51} = \hat{z}_{51}, \quad z_{61} = \hat{z}_{61}, \\ z_{02} &= \hat{z}_{02}, \\ z_{12} &= \Lambda^2 \frac{\alpha^2 t_5}{8t_1} - \Lambda \frac{\alpha t_3 (\hat{z}_{31} - \hat{z}_{01})}{2t_1} + L \frac{t_3 t_4}{96\pi^2 t_1} + \hat{z}_{12}, \\ z_{22} &= \Lambda^2 \frac{\alpha^2 t_6}{8m^2} - \Lambda \frac{\alpha t_4 (\hat{z}_{41} - \hat{z}_{01})}{2m^2} + L \frac{(t_4^2 + t_3 t_5)}{96\pi^2 m^2} + \hat{z}_{22}, \\ z_{32} &= -\Lambda \frac{\alpha t_5 (\hat{z}_{51} - \hat{z}_{01})}{2t_3} + L \frac{(t_3 t_6 + 3t_4 t_5)}{96\pi^2 t_3} + \hat{z}_{32}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
z_{42} &= -\Lambda \frac{\alpha t_6 (\hat{z}_{61} - \hat{z}_{01})}{2t_4} + L \frac{(4t_4 t_6 + 3t_5^2)}{96\pi^2 t_4} + \hat{z}_{42}, \\
z_{52} &= L \frac{5t_6}{48\pi^2} + \hat{z}_{52}, \\
z_{62} &= L \frac{5t_6}{48\pi^2} + \hat{z}_{62}, \\
z_{03} &= \hat{z}_{03}, \\
z_{13} &= \Lambda^2 \frac{\alpha^2 t_5 (\hat{z}_{51} - 2\hat{z}_{01})}{8t_1} - \Lambda L \frac{\alpha (t_3 t_6 + 3t_4 t_5)}{192\pi^2 t_1} \\
&\quad + \Lambda \frac{12\alpha t_3 (\hat{z}_{01} \hat{z}_{31} + \hat{z}_{02} - \hat{z}_{32} - \hat{z}_{01}^2) + \alpha_1(\mathbf{f}) t_4 t_5}{24t_1} \\
&\quad + L \frac{t_3 t_4 (\hat{z}_{31} + \hat{z}_{41} - 3\hat{z}_{01})}{96\pi^2 t_1} + \hat{z}_{13}, \\
z_{23} &= \Lambda^2 \frac{\alpha^2 t_6 (\hat{z}_{61} - 2\hat{z}_{01})}{8m^2} - \Lambda L \frac{\alpha (4t_4 t_6 + 3t_5^2)}{192\pi^2 m^2} \\
&\quad + \Lambda \frac{12\alpha t_4 (\hat{z}_{01} \hat{z}_{41} + \hat{z}_{02} - \hat{z}_{42} - \hat{z}_{01}^2) + \alpha_1(\mathbf{f}) (t_4 t_6 + t_5^2)}{24m^2} \\
&\quad + L \frac{t_4^2 (2\hat{z}_{41} - 3\hat{z}_{01}) + t_3 t_5 (\hat{z}_{31} + \hat{z}_{51} - 3\hat{z}_{01})}{96\pi^2 m^2} + \hat{z}_{23}, \\
z_{33} &= -\Lambda L \frac{5\alpha t_5 t_6}{96\pi^2 t_3} \\
&\quad + \Lambda \frac{t_5 (\alpha (\hat{z}_{01} \hat{z}_{51} + \hat{z}_{02} - \hat{z}_{52} - \hat{z}_{01}^2) + \alpha_1(\mathbf{f}) t_6 / 4)}{2t_3} \\
&\quad + L \frac{3t_4 t_5 (\hat{z}_{41} + \hat{z}_{51} - 3\hat{z}_{01}) + t_3 t_6 (\hat{z}_{31} + \hat{z}_{61} - 3\hat{z}_{01})}{96\pi^2 t_3} + \hat{z}_{33}, \\
z_{43} &= -\Lambda L \frac{5\alpha t_6^2}{96\pi^2 t_4} \\
&\quad + \Lambda \frac{t_6 (\alpha (\hat{z}_{01} \hat{z}_{61} + \hat{z}_{02} - \hat{z}_{62} - \hat{z}_{01}^2) + \alpha_1(\mathbf{f}) t_6 / 4)}{2t_4} \\
&\quad + L \frac{4t_4 t_6 (\hat{z}_{41} + \hat{z}_{61} - 3\hat{z}_{01}) + 3t_5^2 (2\hat{z}_{51} - 3\hat{z}_{01})}{96\pi^2 t_4} + \hat{z}_{43}, \\
z_{53} &= -L \frac{5t_6 (3\hat{z}_{01} - \hat{z}_{51} - \hat{z}_{61})}{48\pi^2} + \hat{z}_{53}, \\
z_{63} &= -L \frac{5t_6 (3\hat{z}_{01} - 2\hat{z}_{61})}{48\pi^2} + \hat{z}_{63},
\end{aligned}$$

где “ z ”-коэффициенты являются свободными конечными константами, возникающими на каждом шаге процесса перенормировки.

Доказательство теоремы заключается в последовательном анализе сингулярных частей диаграмм и решении системы линейных уравнений. Метод подсчета коэффициентов асимптотического разложения при $\Lambda \rightarrow +\infty$ в подобных диаграммах был многократно изложен в недавних статьях [11, 12], поэтому приведем лишь необходимые краткие комментарии и ответы.

Первая петля. На примере однопетлевого вклада продемонстрируем общую идею нахождения коэффициентов z_{i1} , где $i \in \{0, \dots, 6\}$. Для этого сперва найдем сингулярную составляющую правой части равенства (3), которая, с учетом известной формулы [5, 11, 28], выписывается следующим образом

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \ln \det(G^\Lambda) + \kappa_1 &\stackrel{\text{s.p.}}{=} -\frac{R_0^\Lambda(0)}{2} \int_{\mathbb{R}^3} d^3x v(x) \\ &= -\frac{\Lambda\alpha}{2} \left(t_3 S_1 + \frac{t_4 S_2}{2} + \frac{t_5 S_3}{3!} + \frac{t_5 S_4}{4!} \right). \end{aligned}$$

Видно, что сингулярная часть не содержит нелокальных составляющих. Таким образом, подставляя найденное асимптотическое разложение в (3) и решая линейное уравнение, убеждаемся в справедливости ответов для однопетлевых коэффициентов.

Вторая петля. Аналогичным образом могут быть найдены двухпетлевые слагаемые. В этом случае необходимо рассмотреть две диаграммы d_1 и d_2 и одну контрдиаграмму cd_1 . Похожие объекты уже рассматривались ранее в работах [5, 11, 12], поэтому обратим внимание только на конструкционные особенности.

Диаграмма d_1 содержит два интегрирования (к примеру, по переменным x и y), а все три входящие в нее функции Грина имеют вид

$G^\Lambda(x, y)$. Так как пространство трехмерно, то сингулярный вклад могут дать только слагаемые, содержащие лишь главную часть разложения (5). Следовательно, получаем равенство

$$d_1 + \hat{\kappa}_1 \stackrel{\text{s.p.}}{=} \frac{L}{8\pi^2} \left(t_3 t_4 S_1 + \frac{(t_4^2 + t_3 t_5)}{2} S_2 + \frac{(t_3 t_6 + 3t_4 t_5)}{3!} S_3 + \frac{(4t_4 t_6 + 3t_5^2)}{4!} S_4 + \frac{10t_5 t_6}{5!} S_5 + \frac{10t_6^2}{6!} S_6 \right),$$

где было использовано соотношение

$$\int_{V_{1/\sigma}} d^3x \left(G^\Lambda(x) \right)^3 \stackrel{\text{s.p.}}{=} \frac{L}{16\pi^2}.$$

Перейдем к следующим диаграммам. Заметим, что все они содержат функции Грина при совпадающих аргументах, поэтому, используя определения для вершин, мгновенно выписываем ответ в виде

$$d_2 + \hat{\kappa}_2 \stackrel{\text{s.p.}}{=} \Lambda^2 \alpha^2 \left(t_5 S_1 + \frac{t_6}{2} S_2 \right) + \Lambda \alpha \left(2t_4 J_{01} + 2t_5 J_{11} + t_6 J_{21} \right),$$

$$cd_1 + \hat{c}\hat{\kappa}_1 \stackrel{\text{s.p.}}{=} \Lambda \alpha \left(t_3 (z_{31} - \hat{z}_{01}) S_1 + \frac{t_4 (z_{41} - \hat{z}_{01})}{2} S_2 + \frac{t_5 (z_{51} - \hat{z}_{01})}{3!} S_3 + \frac{t_6 (z_{61} - \hat{z}_{01})}{4!} S_4 - \frac{t_4}{2} J_{01} - \frac{t_5}{2} J_{11} - \frac{t_6}{4} J_{21} \right).$$

Можно заметить, что отдельные диаграммы содержат J -функционалы с нелокальными составляющими. Однако, после подстановки в правую часть уравнения (4), они успешно сокращаются. Оставшиеся S -функционалы приводят к изложенным в теореме ответам.

Третья петля. Основная идея при вычислении следующего порядка остается прежней. Сразу удобно отметить ряд диаграмм, которые не содержат сингулярного вклада

$$d_3 + \hat{\kappa}_3 \stackrel{\text{s.p.}}{=} 0,$$

$$d_4 + \hat{\kappa}_4 \stackrel{\text{s.p.}}{=} 0,$$

$$d_5 + \hat{\kappa}_5 \stackrel{\text{s.p.}}{=} 0.$$

Эти соотношения являются прямым следствием свойств функции

$$\int_{B_1} d^3y \frac{1}{|y|^2|y+x|},$$

которая при $|x| \rightarrow +0$ имеет лишь логарифмическую интегрируемую особенность. Остальные диаграммы анализируются аналогичными методами. Заметим, что некоторые диаграммы удобно рассматривать в виде линейной комбинации, потому что нелокальные сингулярные составляющие могут быть пропорциональны частям диаграмм. Ответы выписываются следующим образом

$$d_6 + 2cd_2 + \hat{\kappa}_6 \stackrel{\text{s.p.}}{=} 2\hat{z}_{01}(d_1 + \hat{\kappa}_1),$$

$$d_7 + \hat{\kappa}_7 \stackrel{\text{s.p.}}{=} \Lambda\alpha_1(\mathbf{f}) \left(2t_4t_5S_1 + (t_5^2 + t_4t_6)S_2 + t_5t_6S_3 + t_6^2S_4/4 \right) \\ + \frac{L}{4\pi^2} \left(t_4^2J_{01} + 2t_4t_5J_{11} + (t_5^2 + t_4t_6)J_{21} + t_5t_6J_{31} + t_6^2J_{41}/4 \right),$$

$$d_8 + 4cd_3 + 4cd_4 + \hat{\kappa}_8 \stackrel{\text{s.p.}}{=} 4\hat{z}_{01}(d_2 + 2cd_1 + \hat{\kappa}_2 + 2\hat{c}\hat{\kappa}_1),$$

$$cd_5 + \hat{c}\hat{\kappa}_5 \stackrel{\text{s.p.}}{=} \Lambda\alpha \left(t_3(z_{32} - \hat{z}_{02})S_1 + t_4(z_{42} - \hat{z}_{02})S_2/2 + \right. \\ \left. + t_5(z_{52} - \hat{z}_{02})S_3/6 + t_6(z_{62} - \hat{z}_{02})S_4/4! \right) + m^2z_{22}J_{01} \\ + t_3z_{32}J_{11} + t_4z_{42}J_{21}/2 + t_5z_{52}J_{31}/3! + t_6z_{62}J_{41}/4!,$$

$$d_9 + 2cd_6 + \hat{\kappa}_9 \stackrel{\text{s.p.}}{=} \frac{L}{23\pi^2} \left(t_3t_4(\hat{z}_{31} + \hat{z}_{41})S_1 \right. \\ \left. + (t_5t_3\hat{z}_{31}/2 + t_4^2\hat{z}_{41} + t_5t_3\hat{z}_{51}/2)S_2 \right. \\ \left. + (t_6t_3\hat{z}_{31}/6 + t_5t_4\hat{z}_{41}/2 + t_4t_5\hat{z}_{51}/2 + t_3t_6\hat{z}_{61}/6)S_3 \right. \\ \left. + (t_6t_4\hat{z}_{41}/6 + t_5^2\hat{z}_{51}/4 + t_4t_6\hat{z}_{61}/6)S_4 \right. \\ \left. + (t_6t_5\hat{z}_{51} + t_5t_6\hat{z}_{61})S_5/12 + t_6^2\hat{z}_{61}S_6/36 \right) + \frac{t_3t_5}{2}J_{01} \\ + \frac{t_3t_6 + t_4t_5}{2}J_{11} + \frac{t_5^2 + 2t_4t_6}{4}J_{21} + \frac{t_5t_6}{3}J_{31} + \frac{t_6^2}{12}J_{41},$$

$$\begin{aligned}
d_{10} + \hat{\kappa}_{10} &\stackrel{\text{s.p.}}{=} 3\Lambda^2\alpha^2 t_6 J_{01} + 3\Lambda\alpha t_6 J_{02}, \\
cd_7 + \hat{c}\hat{\kappa}_7 &\stackrel{\text{s.p.}}{=} \Lambda^2\alpha^2 \left(t_5 \hat{z}_{51} S_1 + t_6 \hat{z}_{61} S_2 / 2 \right) \\
&\quad + \Lambda\alpha \left(2t_4 z_{41} J_{01} + 2t_5 \hat{z}_{51} J_{11} + t_6 \hat{z}_{61} J_{21} \right) - \frac{\Lambda\alpha t_6}{2} J_{02}.
\end{aligned}$$

После подстановки полученных асимптотических разложений в линейное уравнение все слагаемые с нелокальными составляющими сокращаются. Оставшиеся части приводят к представленным ответам.

§4. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе были изучены сингулярные составляющие для первых трех квантовых поправок для трехмерной модели с шестерным взаимодействием, см. действие (1). Показано, что нелокальные вклады сокращаются. Найденные коэффициенты для констант перенормировки представлены в теореме 1.

Дополнительно рассмотрим частный случай, когда все свободные «z»-коэффициенты, возникающие на каждом шаге процесса перенормировки, также равны нулю. Тогда ненулевые коэффициенты имеют вид

$$\begin{aligned}
Z_0 &= 1 + \mathcal{O}(\hbar^4), \\
Z_1 &= 1 - \hbar\Lambda \frac{\alpha t_3}{2t_1} + \hbar^2 \left(\Lambda^2 \frac{\alpha^2 t_5}{8t_1} + L \frac{t_3 t_4}{96\pi^2 t_1} \right) \\
&\quad + \hbar^3 \left(-\Lambda L \frac{\alpha(t_3 t_6 + 3t_4 t_5)}{192\pi^2 t_1} + \Lambda \frac{\alpha_1(\mathbf{f}) t_4 t_5}{24t_1} \right) + \mathcal{O}(\hbar^4), \\
Z_2 &= 1 - \hbar\Lambda \frac{\alpha t_4}{2m^2} + \hbar^2 \left(\Lambda^2 \frac{\alpha^2 t_6}{8m^2} + L \frac{(t_4^2 + t_3 t_5)}{96\pi^2 m^2} \right) \\
&\quad + \hbar^3 \left(-\Lambda L \frac{\alpha(4t_4 t_6 + 3t_5^2)}{192\pi^2 m^2} + \Lambda \frac{\alpha_1(\mathbf{f})(t_4 t_6 + t_5^2)}{24m^2} \right) + \mathcal{O}(\hbar^4), \\
Z_3 &= 1 - \hbar\Lambda \frac{\alpha t_5}{2t_3} + \hbar^2 L \frac{(t_3 t_6 + 3t_4 t_5)}{96\pi^2 t_3} \\
&\quad + \hbar^3 \left(-\Lambda L \frac{5\alpha t_5 t_6}{96\pi^2 t_3} + \Lambda \frac{\alpha_1(\mathbf{f}) t_5 t_6}{8t_3} \right) + \mathcal{O}(\hbar^4),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
Z_4 &= 1 - \hbar\Lambda \frac{\alpha t_6}{2t_4} + \hbar^2 L \frac{(4t_4 t_6 + 3t_5^2)}{96\pi^2 t_4} \\
&\quad + \hbar^3 \left(-\Lambda L \frac{5\alpha t_6^2}{96\pi^2 t_4} + \Lambda \frac{\alpha_1(\mathbf{f}) t_6^2}{8t_4} \right) + \mathcal{O}(\hbar^4), \\
Z_5 &= 1 + \hbar^2 L \frac{5t_6}{48\pi^2} + \mathcal{O}(\hbar^4), \\
Z_6 &= 1 + \hbar^2 L \frac{5t_6}{48\pi^2} + \mathcal{O}(\hbar^4).
\end{aligned}$$

Выбирая $t_1 = t_3 = t_5 = t_6 = 0$, получаем суперперенормируемый случай, в котором требуется перенормировка только массового параметра

$$Z_2 = 1 - \hbar\Lambda \frac{\alpha t_4}{2m^2} + \hbar^2 L \frac{t_4^2}{96\pi^2 m^2}.$$

Заметим, что коэффициенты в теореме 1 зависят от α и $\alpha_1(\mathbf{f})$, которые в свою очередь строятся с использованием функции $\mathbf{f}(\cdot)$. Рассмотрим два частных случая.

- В первом случае функция не удовлетворяет условию применимости, см. [29], но при этом имеет тривиальный вид $\mathbf{f} \equiv 0$. Тогда получаем

$$\alpha = \frac{1}{4\pi}, \quad \alpha_1(\mathbf{f}) = \frac{4}{3(4\pi)^3}.$$

- Во втором случае критерий [29] выполнен, и при $s \in [0, 1]$ функция равна $\mathbf{f}(s^2) = 1 - s$, тогда

$$\alpha = \frac{1}{2\pi}, \quad \alpha_1(\mathbf{f}) = \frac{68}{35(4\pi)^3}.$$

Автор выражает благодарность А. В. Иванову за полезные комментарии.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. С. Itzykson, J. B. Zuber, *Quantum Field Theory*, McGraw-hill, New York (1980).
2. М. Е. Peskin, D. V. Schroeder, *An Introduction to Quantum Field Theory*, Addison-Wesley (1995).
3. J. C. Collins, *Renormalization: An Introduction to Renormalization, the Renormalization Group and the Operator-Product Expansion*, Cambridge University Press (1984).
4. О. I. Zavialov, *Renormalized quantum field theory*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, Boston (1990).

5. A. V. Ivanov, N. V. Kharuk, *Quantum equation of motion and two-loop cutoff renormalization for ϕ^3 model*. — Zap. Nauchn. Sem. POMI **487** (2019), 151–166; J. Math. Sci. **257**, No. 4 (2021), 526–536.
6. A. V. Ivanov, N. V. Kharuk, *Two-loop Cutoff renormalization of 4-D Yang–Mills effective action*. — J. Phys. G: Nucl. Part. Phys. **48** (2020), 015002.
7. A. V. Ivanov, N. V. Kharuk, *Formula for two-loop divergent part of 4-D Yang–Mills effective action*. — Eur. Phys. J. C **82** (2022), 997.
8. A. V. Ivanov, *Explicit cutoff regularization in coordinate representation*. — J. Phys. A: Math. Theor. **55** (2022), 495401.
9. A. V. Ivanov, N. V. Kharuk, *Three-loop divergences in effective action of 4-dimensional Yang–Mills theory with cutoff regularization: Γ_4^2 -contribution*. — Zap. Nauchn. Sem. POMI **520** (2023), 162–188.
10. P. V. Akacevich, A. V. Ivanov, *On two-loop effective action of 2D sigma model*. — Eur. Phys. J. C **83** (2023), 653.
11. A. V. Ivanov, *Three-loop renormalization of the quantum action for a four-dimensional scalar model with quartic interaction with the usage of the background field method and a cutoff regularization*, (2024) arXiv:2402.14549 <https://www.pdmi.ras.ru/preprint/2024/24-02.html>
12. A. V. Ivanov, N. V. Kharuk, *Three-loop renormalization of the quantum action for a five-dimensional scalar cubic model with the usage of the background field method and a cutoff regularization*, (2024) arXiv:2404.07513 <https://www.pdmi.ras.ru/preprint/2024/24-05.html>
13. L. N. Lipatov, *Calculation of the Gell–Mann–Low function in scalar theory with strong nonlinearity*. — Sov. Phys. JETP **44** (1976), 1055–1062.
14. R. D. Pisarski, *Fixed points of $(\phi^6)_3$ and $(\phi^4)_4$ theories*. — Phys. Rev. D **28** (1983), 1554–1556.
15. W. A. Bardeen, M. Moshe, M. Bander, *Spontaneous breaking of scale invariance and the ultraviolet fixed point in $O(N)$ -symmetric (ϕ_3^6) theory*. — Phys. Rev. Lett. **52** (1984), 1188–1191.
16. R. Gudmundsdottir, G. Rydneil, P. Salomonson, *More on $O(N)$ -symmetric ϕ_3^6 theory*. — Phys. Rev. Lett. **53** (1984), 2529–2531.
17. J. S. Hager, *Six-loop renormalization group functions of $O(n)$ -symmetric ϕ^6 -theory and ϵ -expansions of tricritical exponents up to ϵ^3* . — J. Phys. A **35** (2002), 2703–2711.
18. J. A. Gracey, *Renormalization of scalar field theories in rational spacetime dimensions*. — Eur. Phys. J. C **80** (2020), 604.
19. I. M. Gel'fand, G. E. Shilov, *Generalized Functions, Vol. 1: Properties and Operations*, AMS Chelsea Publishing **377** (1964).
20. D. I. Kazakov, *Radiative Corrections, Divergences, Regularization, Renormalization, Renormalization Group and All That in Examples in Quantum Field Theory*, arXiv:0901.2208 [hep-ph] (2009).
21. B. S. DeWitt, *Quantum theory of gravity. 2. The manifestly covariant theory*. — Phys. Rev. **162** (1967), 1195–1239.
22. B. S. DeWitt, *Quantum theory of gravity. 3. Applications of the covariant theory*. — Phys. Rev. **162** (1967), 1239–1256.

23. G. 't Hooft, *The background field method in gauge field theories*, (Karpacz, 1975), Proceedings, Acta Universitatis Wratislaviensis, **1**, Wroclaw, 345–369 (1976)
24. L. F. Abbott, *Introduction to the background field method* / — Acta Phys. Polon. B **13**, Nos. 1–2 (1982), 33–50.
25. I. Ya. Aref'eva, A. A. Slavnov, L. D. Faddeev, *Generating functional for the S-matrix in gauge-invariant theories*. — TМF **21**. No. 3 (1974), 311–321.
26. M. Lüscher, *Dimensional regularisation in the presence of large background fields*. — Annals Phys. **142** (1982), 359–392.
27. A. V. Ivanov, N. V. Kharuk, *Special functions for heat kernel expansion*. — Eur. Phys. J. Plus **137** (2022), 1060.
28. A. N. Vasil'ev, *Functional methods in quantum field theory and statistics*, London: Gordon & Breach (1998).
29. A. V. Ivanov, *On a criterion for a cutoff regularization in the coordinate representation*, (2024),
arXiv:2403.09218, <https://www.pdmi.ras.ru/preprint/2024/24-04.html>

Kharuk N. V. Three-loop renormalization with a cutoff in a sextic model.

The paper studies the quantum action for the three-dimensional real theory ϕ^6 using the background field method. Three-loop renormalization is performed with a cutoff regularization in the coordinate representation. An explicit form of the first three coefficients for the renormalization constants is presented. The absence of non-local singular contributions is discussed.

С.-Петербургское отделение
Математического института
им. В. А. Стеклова РАН,
наб. р. Фонтанки 27,
Санкт-Петербург 191023, Россия

Поступило 14 мая 2024 г.

С.-Петербургский международный
математический институт
им. Леонарда Эйлера, Санкт-Петербург, Россия
E-mail: natakharuk@mail.ru