Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 532, 2024 г.

Е. А. Мовчан

БАЗИС ГЕЛЬФАНДА–ЦЕТЛИНА ДЛЯ НЕПРИВОДИМЫХ ПРЕДСТАВЛЕНИЙ БЕСКОНЕЧНОМЕРНОЙ ПОЛНОЙ ЛИНЕЙНОЙ ГРУППЫ

§1. Введение

Пусть $\{\mathfrak{g}_j\}_{j=0}^n$ – семейство конечномерных редуктивных комплексных алгебр Ли, такое, что $\mathfrak{g}_0 = 0$. Рассмотрим для него цепочку вложений

$$\mathfrak{g}_0 \xhookrightarrow{\iota_0} \mathfrak{g}_1 \xhookrightarrow{\iota_1} \mathfrak{g}_2 \xhookrightarrow{\iota_2} \cdots \xhookrightarrow{\iota_{n-1}} \mathfrak{g}_n. \tag{1.1}$$

Согласно теореме Вейля, любое конечномерное комплексное представление V алгебры $\mathfrak{g}_n$ вполне приводимо. Иными словами, имеет единственное с точностью до изоморфизма разложение

$$V \cong \bigoplus_{\lambda} V^{\lambda^{\oplus a_\lambda}}, \tag{1.2}$$

где V^λ – неприводимые конечномерные комплексные представления алгебры $\mathfrak{g}_n$, а a_λ – некоторые натуральные числа.

Числа a_λ мы будем называть кратностями вхождения представления V^λ в V. Всякое неприводимое конечномерное комплексное представление V^λ алгебры $\mathfrak{g}_n$ однозначно (с точностью до изоморфизма) определяется своим старшим весом λ. С помощью цепочки вложений (1.1) для каждого такого представления V^λ, рассматривая его разложение $V^\lambda \cong \bigoplus\limits_T V_T$ на неприводимые $\mathfrak{g}_0$-модули и выбирая в каждом одномерном подпространстве $V_T = \langle e_T \rangle$ по базисному вектору e_T, можно построить естественный базис $\{e_T\} \subset V^\lambda$, называемый базисом Гельфанда–Цетлина. Каноничность этого базиса зависит от кратностей вхождения a_λ в разложение (1.2). В частности, для интересующего нас случая $\mathfrak{g}_n = \mathfrak{gl}_n\mathbb{C}$, все кратности $a_\lambda \equiv 1$ (см. [2, глава 5]). Этот базис был впервые построен Гельфандом и Цетлиным в работах

Ключевые слова: ассимптотическая теория представлений, базис Гельфанда–Цетлина, бесконечномерная полная линейная группа.

[3, 5, 4]. Подобные естественные базисы оказались очень полезны как для чистой математики, так и для теоретической физики.

Впоследствии эта теория была развита Желобенко, и в 1962 г. в работе [15] был описан метод построения понижающих операторов для представлений $\mathfrak{gl}_n\mathbb{C}$ (впервые понижающие операторы появились в работе [11]). Используя подобные понижающие операторы, удалось построить базис Гельфанда–Цетлина во всех конечномерных комплексных представлениях классических алгебр Ли A_n, B_n, C_n, D_n, что описано, например, в работах [10, 9]. Ключевое свойство этих операторов состоит в следующем: пусть V^λ – неприводимое конечномерное комплексное представление редуктивной алгебры Ли $\mathfrak{g}_n$. По теореме Вейля, имеет место разложение $Res^{\mathfrak{g}_n}_{\mathfrak{g}_{n-1}} V^\lambda \cong \bigoplus\limits_\mu V^{\mu \oplus a_\mu}$ на неприводимые $\mathfrak{g}_{n-1}$-модули. Понижающие операторы $z_{ni} \in U(\mathfrak{g}_n)$, при индексе $1 \leqslant i \leqslant n-1$, задают отображения (при определённых условиях на веса)

$$z_{ni} : V^\lambda \longrightarrow V^\lambda : z_{ni} \cdot v_\lambda = v_{\lambda-\delta_i}, \tag{1.3}$$

где $\lambda - \delta_i$ – старший вес, получаемый из λ заменой члена λ_i на λ_{i+1}, а v_λ и $v_{\lambda-\delta_i}$ – векторы старшего веса соответственно. Действуя этими операторами с различными индексами i на вектор старшего веса v_λ представления V^λ, может быть получен весь базис Гельфанда–Цетлина этого представления.

Нас же будет интересовать алгебра $\mathfrak{gl}_\infty\mathbb{C}$, для которой не понятно, что означает фраза “неприводимый $\mathfrak{gl}_{\infty-1}\mathbb{C}$-модуль”. В связи с этим, выше описанная теория понижающих операторов напрямую нам не подходит. Продуктивным же оказывается наблюдение, вдохновлённое теорией Янгианов (см. [8]). Как показано в работах Назарова и Тарасова [13, 12], для фиксированной алгебры $\mathfrak{g}_n$ и представления V^λ существуют операторы $\{A_m(u)\}_{m=1}^n$, называемые квантовыми минорами L-оператора, такие, что базис Гельфанда–Цетлина является их собственными векторами. Иными словами, все операторы $\{A_m(u)\}_{m=1}^n$ действуют в базисе Гельфанда–Цетлина диагонально. Таким образом, зная операторы $\{A_m(u)\}_{m=1}^n$ и их собственные значения $\{\lambda_m(u)\}_{m=1}^n$, можно свести задачу построения базиса Гельфанда–Цетлина к спектральной задаче. Подобный подход удобен тогда, когда понижающие операторы не определены в принципе. Именно этот подход был использован в работах [14, 1], где элементы базиса Гельфанда–Цетлина напрямую определялись как собственные векторы квантовых миноров $\{A_m(u)\}_{m=1}^n$. Так, для построения базиса Гельфанда–Цетлина в неприводимых представлениях алгебры $\mathfrak{gl}_\infty\mathbb{C}$ вместе с известной теорией понижающих операторов z_{ni} нам понадобится теория квантовых миноров $A_m(u)$. Используя эти оба подхода, можно будет свести задачу к конечномерному случаю. Подробнее про эти операторы и о корректности определяемых ими объектах будет написано ниже.

Эта работа имеет следующую структуру. В пункте 2 отмечаются общие факты теории представлений алгебры Ли $\mathfrak{gl}_n\mathbb{C}$. В пункте 3, используя комбинаторные схемы Гельфанда–Цетлина, приводится явная формула базиса Гельфанда–Цетлина в неприводимых представлениях алгебры $\mathfrak{gl}_n\mathbb{C}$. Далее формально определяются бесконечномерные группа $\mathrm{GL}_\infty\mathbb{C}$ и алгебра $\mathfrak{gl}_\infty\mathbb{C}$, а также отмечается эквивалентность их представлений. В пункте 4 вводится важное понятие алгебры Гельфанда–Цетлина GZ_n, с помощью которого даётся альтернативное определение базиса Гельфанда–Цетлина как базиса, в котором алгебра GZ_n действует диагонально. Под конец мы формально определяем бесконечную алгебру Гельфанда – Цетлина GZ_∞. В пункте 5 определяются полиномиальные представления алгебры $\mathfrak{gl}_\infty\mathbb{C}$ как решения универсальной задачи, аналогичной конечномерному случаю. Показываются их существование и корректная определённость. В пункте 6, содержащем основные оригинальные результаты данной работы, по аналогии с конечномерным случаем, мы определяем бесконечные схемы Гельфанда–Цетлина, с помощью которых строим базис Гельфанда–Цетлина в полиномиальных представлениях алгебры $\mathfrak{gl}_\infty\mathbb{C}$. Параллельно доказывается, что полиномиальные представления алгебры $\mathfrak{gl}_\infty\mathbb{C}$ являются неприводимыми представлениями со старшим весом. В конце мы отмечаем, что использованные идеи могут быть применены для построения базиса Гельфанда–Цетлина в неприводимых представлениях со старшим весом копределов всех классических алгебр Ли.

§2. Теория представлений алгебры $\mathfrak{gl}_n\mathbb{C}$

Как известно, все неприводимые конечномерные комплексные представления (точнее, их классы изоморфизмов) алгебры $\mathfrak{gl}_n\mathbb{C}$ находятся во взаимно однозначном соответствии с упорядоченными наборами $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$, называемыми старшими весами, такими, что

$$\lambda_1 \geqslant \ldots \geqslant \lambda_n \qquad \text{и} \qquad \forall i \in \{1, \ldots, n\} \implies \lambda_i \in \mathbb{Z}. \tag{2.1}$$

Обозначим через V^λ неприводимый $\mathfrak{gl}_n\mathbb{C}$-модуль, индексируемый старшими весом λ. Пусть $\lambda_m \geqslant 0$ и $\lambda_{m+1} \leqslant 0$, введём $\mu = \mu_1 \geqslant \ldots \geqslant \mu_m$ и $\nu = \nu_{m+1} \geqslant \ldots \geqslant \nu_n$ – разбиения числа n такие, что $\lambda_1 = \mu_1, \ldots, \lambda_m = \mu_m$ и $\lambda_{m+1} = -\nu_{m+1}, \ldots, \lambda_n = -\nu_n$. Отождествим разбиения и диаграммы Юнга. Таким образом, любой неприводимый $\mathfrak{gl}_n\mathbb{C}$-модуль V^λ параметризуется парой диаграмм Юнга $V^{\mu\nu} = V^\lambda$.

Для $k \geqslant 0$ определим детерминантное представление $D_k = (\bigwedge^n \mathbb{C}^n)^{\otimes k}$ как k-ю тензорную степень n-й внешней степени тавтологического представления $\mathbb{C}^n$ алгебры $\mathfrak{gl}_n\mathbb{C}$. Для $k < 0$ определим детерминантное представление $D_k = D^*_{-k}$ как двойственное к D_{-k}. Используя детерминантное представление, несложно доказать следующий изоморфизм представлений:

$$V^{\mu\nu} \cong V^{\widetilde{\mu}\widetilde{\nu}} \otimes D_{-k} \qquad \text{при} \qquad k - \nu_{m+1} \geqslant 0, \tag{2.2}$$

где $\widetilde{\mu} = \lambda_1 + k \geqslant \ldots \geqslant \lambda_m + k$ и $\widetilde{\nu} = 0 \geqslant \ldots \geqslant 0 = 0$.

Представления $V^{\mu\nu}$, у которых разбиение $\nu = 0$, называются полиномиальными представлениями. Как видно из (2.2), любое неприводимое представление $V^{\mu\nu}$ представимо в виде тензорного произведения полиномиального и детерминантного представлений. Нас будет интересовать базис в представлениях $V^{\mu\nu}$, и ключевым наблюдением здесь оказывается то, что все детерминантные представления одномерны, то есть $\dim D_k = 1$ для всех k. Таким образом, без ограничения общности, для произвольного неприводимого конечномерного $\mathfrak{gl}_n\mathbb{C}$-модуля V^λ можно считать, что λ – диаграмма Юнга (что далее всегда подразумевается). Это наблюдение является мотивацией для того, чтобы рассматривать только неприводимые полиномиальные представления алгебры $\mathfrak{gl}_\infty\mathbb{C}$ (определяемые ниже).

Для алгебры $\mathfrak{gl}_n\mathbb{C}$ и фиксированной диаграммы Юнга λ из m клеток определим представление $(\mathbb{C}^n)^{\times\lambda}$ как декартово произведение m копий тавтологического представления $\mathbb{C}^n$, индексированных клетками диаграммы λ (см. [2] гл. 8). Таким образом, элементами представления $(\mathbb{C}^n)^{\times\lambda}$ являются диаграммы λ, в каждой клетке которой написан элемент из $\mathbb{C}^n$. Например, для $\lambda = (2,2,1)$ произвольный элемент $w \in (\mathbb{C}^n)^{\times\lambda}$ имеет вид

$$w = \begin{array}{|c|c|}\hline v_1 & v_2 \\ \hline v_3 & v_4 \\ \hline v_5 & \multicolumn{1}{c}{} \\ \cline{1-1}\end{array}\,, \tag{2.3}$$

где v_i – некоторые элементы из $\mathbb{C}^n$.

Назовём отображение $f : (\mathbb{C}^n)^{\times\lambda} \longrightarrow F$ в некоторое векторное пространство F симметризующим, если оно удовлетворяет условиям:

1) f – полилинейно, (2.4)

2) f – кососимметрично по элементам, находящимся в одном столбце, (2.5)

3) $\forall w \in (\mathbb{C}^n)^{\times\lambda} \implies f(w) = \sum_{w'} f(w'),$ (2.6)

где суммирование подразумевается по тем $w' \in (\mathbb{C}^n)^{\times\lambda}$, получающимся из w обменом между двумя фиксированными столбцами, при выбранном подмножестве в правом из выбранных столбцов. Например, для $\lambda = (2, 2, 1)$, выбирая весь правый столбец, получаем

$$f\left(\begin{array}{|c|c|}\hline v_1 & v_2 \\ \hline v_3 & v_4 \\ \hline v_5 & \multicolumn{1}{c}{} \\ \cline{1-1}\end{array}\right) = f\left(\begin{array}{|c|c|}\hline v_2 & v_1 \\ \hline v_4 & v_3 \\ \hline v_5 & \multicolumn{1}{c}{} \\ \cline{1-1}\end{array}\right) + f\left(\begin{array}{|c|c|}\hline v_1 & v_3 \\ \hline v_2 & v_5 \\ \hline v_4 & \multicolumn{1}{c}{} \\ \cline{1-1}\end{array}\right) + f\left(\begin{array}{|c|c|}\hline v_2 & v_1 \\ \hline v_3 & v_5 \\ \hline v_4 & \multicolumn{1}{c}{} \\ \cline{1-1}\end{array}\right). \tag{2.7}$$

Полиномиальные представления V^λ алгебры $\mathfrak{gl}_n\mathbb{C}$ являются решениями следующей универсальной задачи: если $\Phi_{uni} : (\mathbb{C}^n)^{\times\lambda} \longrightarrow V^\lambda$ – симметризующее отображение, такое, что для любого симметризующего отображения $\Phi : (\mathbb{C}^n)^{\times\lambda} \longrightarrow F$ существует единственное отображение $\varphi : V^\lambda \longrightarrow F$, такое, что $\Phi = \varphi \circ \Phi_{uni}$. Иными словами, для любых Φ и F как выше существует единственное отображение φ, делающее следующую диаграмму коммутативной

$$
\begin{tikzcd}
(\mathbb{C}^n)^{\times\lambda} \arrow[r, "\Phi_{uni}"] \arrow[dr, "\Phi"'] & V^\lambda \arrow[d, dashed, "\varphi"] & & V^\lambda \arrow[d, "\rho"] \\
& F, & & \mathbb{S}_\lambda(\mathbb{C}^n),
\end{tikzcd}
\tag{2.8}
$$

где $\rho : V^\lambda \longrightarrow \mathbb{S}_\lambda(\mathbb{C}^n)$ – изоморфизм представлений, а $\mathbb{S}_\lambda(\mathbb{C}^n)$ – функтор Шура.

§3. Копределы цепочек групп $\mathrm{GL}_n\mathbb{C}$ и алгебр $\mathfrak{gl}_n\mathbb{C}$

Как говорилось во введении, базис Гельфанда–Цетлина был построен Гельфандом и Цетлиным для всех неприводимых конечномерных $\mathfrak{gl}_n\mathbb{C}$-модулей V^λ. Элементы этого базиса естественным образом параметризуются комбинаторными объектами, называемыми схемами Гельфанда–Цетлина. Для фиксированной диаграммы Юнга $\lambda = \lambda_1 \geqslant \ldots \geqslant \lambda_n$ схема Гельфанда–Цетлина – это упорядоченный набор элементов λ_{ij}

$$
\Lambda = \begin{bmatrix}
\lambda_{n1} & & \lambda_{n2} & & \cdots & & \cdots & & \lambda_{nn} \\
& \lambda_{n-1,1} & & \lambda_{n-1,2} & & \cdots & & \lambda_{n-1,n-1} & \\
& & \cdots & & \cdots & & \cdots & & \\
& & & \lambda_{21} & & \lambda_{22} & & & \\
& & & & \lambda_{11} & & & &
\end{bmatrix},
\tag{3.1}
$$

где для любых $2 \leqslant j \leqslant n$ и $1 \leqslant i \leqslant j-1$ выполняются следующие соотношения

$$
\lambda_{ij} \in \mathbb{N}, \qquad \lambda_{nj} = \lambda_j, \qquad \lambda_{ij} \geqslant \lambda_{i-1,j} \qquad \text{и} \qquad \lambda_{i-1,j} \geqslant \lambda_{i,j+1}. \tag{3.2}
$$

Как было сказано, множество $\Lambda_n(\lambda)$ всех схем Гельфанда–Цетлина формы λ алгебры $\mathfrak{gl}_n\mathbb{C}$ задаёт естественную параметризацию базиса Гельфанда–Цетлина в неприводимом $\mathfrak{gl}_n\mathbb{C}$-модуле V^λ. Таким образом, каждой схеме Гельфанда–Цетлина Λ ставится в соответствие элемент $e_T \in V^\lambda$ базиса Гельфанда–Цетлина, далее обозначаемый e_Λ. Используя схемы Гельфанда – Цетлина и понижающие операторы, можно записать базис Гельфанда–Цетлина представления V^λ в явном виде (см. [15]). Так, для фиксированной схемы Гельфанда–Цетлина Λ, элемент e_Λ базиса Гельфанда–Цетлина имеет вид

$$e_\Lambda = \overrightarrow{\prod_{2\leqslant k\leqslant n}} \prod_{i=1}^{k-1} z_{ki}^{\lambda_{ki}-\lambda_{k-1,i}} \cdot v_\lambda, \tag{3.3}$$

где члены в упорядоченном произведении упорядочены в соответствии с возрастанием индекса k, v_λ – вектор старшего веса представления V^λ, а понижающие операторы $z_{ki} \in U(\mathfrak{gl}_n\mathbb{C})$ имеют вид

$$z_{ki} = \sum_{i<i_1<\ldots<i_p<k} E_{i_1 i} \cdot E_{i_2 i_1} \cdot \ldots \cdot E_{i_p i_{p-1}} \cdot E_{k i_p} \cdot (E_{ii} - E_{j_1 j_1} + j_1 - i) \times \ldots \cdot (E_{ii} - E_{j_q j_q} + j_q - i), \tag{3.4}$$

где сумма ведётся по всем $p \in \mathbb{N}$, а множество $\{j_1, \ldots, j_q\}$ – это дополнение к подмножеству $\{i_1, \ldots, i_p\}$ во множестве $\{i+1, \ldots, k-1\}$.

Далее мы воспользуемся явной формулой для базиса Гельфанда–Цетлина (3.3) неприводимого представления алгебры $\mathfrak{gl}_n\mathbb{C}$ для построения базиса Гельфанда–Цетлина в неприводимых представлениях алгебры $\mathfrak{gl}_\infty\mathbb{C}$, а пока определим то, как мы понимаем группу $\mathrm{GL}_\infty\mathbb{C}$ и алгебру $\mathfrak{gl}_\infty\mathbb{C}$. Для этого рассмотрим коммутативную диаграмму

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r, hook, "d_e\iota_0"] & \mathfrak{gl}_1\mathbb{C} \arrow[r, hook, "d_e\iota_1"] \arrow[d, "\exp"] & \mathfrak{gl}_2\mathbb{C} \arrow[r, hook, "d_e\iota_2"] \arrow[d, "\exp"] & \cdots \arrow[r, hook, "d_e\iota_{n-1}"] & \mathfrak{gl}_n\mathbb{C} \arrow[r, hook, "d_e\iota_n"] \arrow[d, "\exp"] & \cdots \\
0 \arrow[r, hook, "\iota_0"] & \mathrm{GL}_1\mathbb{C} \arrow[r, hook, "\iota_1"] & \mathrm{GL}_2\mathbb{C} \arrow[r, hook, "\iota_2"] & \cdots \arrow[r, hook, "\iota_{n-1}"] & \mathrm{GL}_n\mathbb{C} \arrow[r, hook, "\iota_n"] & \cdots,
\end{tikzcd} \tag{3.5}$$

где exp – экспоненциальное отображение, $\iota_{n-1} : \mathrm{GL}_{n-1}\mathbb{C} \hookrightarrow \mathrm{GL}_n\mathbb{C} : A \mapsto \left(\begin{array}{c|c} A & 0 \\ \hline 0 & 1 \end{array}\right)$ – инъекция, а $d_e\iota_{n-1}$ – её дифференциал в единице e.

Копредел нижней цепочки вложений диаграммы (3.5) мы будем понимать как группу $\mathrm{GL}_\infty\mathbb{C} = \varinjlim \mathrm{GL}_n\mathbb{C}$, а копредел верхней цепочки вложений – как алгебру $\mathfrak{gl}_\infty\mathbb{C} = \varinjlim \mathfrak{gl}_n\mathbb{C}$ соответственно. Группу $\mathrm{GL}_\infty\mathbb{C}$ и алгебру $\mathfrak{gl}_\infty\mathbb{C}$ можно воспринимать как множество бесконечных матриц, у которых почти все элементы равны нулю, а в случае группы почти все элементы на диагонали равны единице. Иными словами, имеют место следующие равенства

$$\mathrm{GL}_\infty\mathbb{C} = \{(a_{ij})_{(i,j)\in\mathbb{N}^{*2}} | \forall (i,j)\in\mathbb{N}^{*2} \exists N\in\mathbb{N}^* : \text{if } i+j>N \Longrightarrow a_{ij}=\delta_{ij}\}, \tag{3.6}$$

$$\mathfrak{gl}_\infty\mathbb{C} = \{(a_{ij})_{(i,j)\in\mathbb{N}^{*2}} \mid \forall (i,j)\in\mathbb{N}^{*2} \exists N\in\mathbb{N}^* : \text{if } i+j>N \Longrightarrow a_{ij}=0\}, \tag{3.7}$$

где $\mathbb{N}^*$ – множество натуральных чисел без нуля, а δ_{ij} – символ Кронекера.

Отметим, что обычно под бесконечномерной полной линейной группой и значком $\mathrm{GL}_\infty\mathbb{C}$ понимается группа, элементы которой бесконечны в обе стороны, то есть имеют вид $(a_{ij})_{(i,j)\in\mathbb{Z}^2}$ (см. [6] гл. 4). Таким образом, нам правильнее было бы использовать обозначения $\mathrm{GL}_{\infty/2}\mathbb{C}$ и $\mathfrak{gl}_{\infty/2}\mathbb{C}$. Тем не менее, игнорируя возможную путаницу, мы будем использовать оговоренные выше обозначения $\mathrm{GL}_\infty\mathbb{C}$ и $\mathfrak{gl}_\infty\mathbb{C}$.

Так как $\mathrm{GL}_n\mathbb{C}$ – связная группа Ли, любое её неприводимое представление V^λ является также неприводимым представлением её алгебры Ли $\mathfrak{gl}_n\mathbb{C}$ и наоборот, причём следующая диаграмма коммутативна

$$\begin{tikzcd} \mathfrak{gl}_n\mathbb{C} \arrow[r, "d_e\rho_\lambda"] \arrow[d, "\exp"'] & \mathfrak{gl}(V^\lambda) \arrow[d, "\exp"] \\ \mathrm{GL}_n\mathbb{C} \arrow[r, "\rho_\lambda"] & \mathrm{GL}(V^\lambda), \end{tikzcd} \tag{3.8}$$

где ρ_λ – гомоморфизм неприводимого представления V^λ.

Группа Ли $\mathrm{GL}_\infty\mathbb{C}$ связна как копредел связных групп Ли $\mathrm{GL}_n\mathbb{C}$. Действительно, рассмотрим произвольные элементы $A, B \in \mathrm{GL}_\infty\mathbb{C}$. Покажем, что между ними существует гладкий путь $\gamma : [0,1] \longrightarrow \mathrm{GL}_\infty\mathbb{C}$, такой, что $\gamma(0) = A$ и $\gamma(1) = B$. По определению копредела, для элементов A и B существует гладкое отображение $\phi_n : \mathrm{GL}_n\mathbb{C} \longrightarrow \mathrm{GL}_\infty\mathbb{C}$ и элементы $\widetilde{A}, \widetilde{B} \in \mathrm{GL}_n\mathbb{C}$, являющиеся прообразами элементов A и B. Иными словами, $\phi_n(\widetilde{A}) = A$ и $\phi_n(\widetilde{B}) = B$. Но группа Ли $\mathrm{GL}_n\mathbb{C}$ связна, а значит, существует гладкий путь $\widetilde{\gamma} : [0,1] \longrightarrow \mathrm{GL}_n\mathbb{C}$, такой, что $\widetilde{\gamma}(0) = \widetilde{A}$ и $\widetilde{\gamma}(1) = \widetilde{B}$. Определим путь $\gamma : [0,1] \longrightarrow \mathrm{GL}_\infty\mathbb{C}$ как композицию $\gamma = \phi_n \circ \widetilde{\gamma}$. Таким образом, все элементы группы Ли $\mathrm{GL}_\infty\mathbb{C}$

соединены гладким путём, а значит, группа $\mathrm{GL}_\infty\mathbb{C}$ линейно связна как гладкое многообразие, а значит, связно.

Коммутативность диаграмм (3.5) и (3.8) индуцирует коммутативность диаграммы копределов

$$\begin{tikzcd} \mathfrak{gl}_\infty\mathbb{C} \arrow[r, "d_e\rho"] \arrow[d, "\exp"'] & \mathfrak{gl}(V) \arrow[d, "\exp"] \\ \mathrm{GL}_\infty\mathbb{C} \arrow[r, "\rho"] & \mathrm{GL}(V), \end{tikzcd} \tag{3.9}$$

где V – некоторое неприводимое представление $\mathrm{GL}_\infty\mathbb{C}$, а ρ – его гомоморфизм.

Таким образом, говоря о неприводимых $\mathrm{GL}_\infty\mathbb{C}$-модулях, без ограничения общности, можно рассматривать только неприводимые $\mathfrak{gl}_\infty\mathbb{C}$-модули.

§4. Алгебра Гельфанда–Цетлина GZ_∞ и квантовые миноры L-оператора

Помимо обычного определения базиса Гельфанда–Цетлина неприводимого представления V^λ алгебры $\mathfrak{gl}_n\mathbb{C}$ через его сужение на $\mathfrak{gl}_0\mathbb{C}$-модули, описанного во введении, можно определить базис Гельфанда–Цетлина как базис, на котором некоторая алгебра действует диагонально. Нас будет интересовать именно второе определение, поскольку с помощью него гораздо удобнее работать с копределами. Алгебра, действующая диагонально на базисе Гельфанда–Цетлина, называется алгеброй Гельфанда–Цетлина GZ_n алгебры $\mathfrak{gl}_n\mathbb{C}$. В нашем случае алгебра Гельфанда–Цетлина GZ_n – это некоторая подалгебра универсальной обёртывающей алгебры $U(\mathfrak{gl}_n\mathbb{C})$. Рассмотрим цепочку вложений универсальных обёртывающих $U(\mathfrak{gl}_n\mathbb{C})$, индуцированную цепочкой (3.5) алгебр $\mathfrak{gl}_n\mathbb{C}$

$$0 \xhookrightarrow{\iota_0^*} U(\mathfrak{gl}_1\mathbb{C}) \xhookrightarrow{\iota_1^*} U(\mathfrak{gl}_2\mathbb{C}) \xhookrightarrow{\iota_2^*} \cdots \xhookrightarrow{\iota_{n-1}^*} U(\mathfrak{gl}_n\mathbb{C}) \xhookrightarrow{\iota_n^*} \cdots, \tag{4.1}$$

где $\iota_{n-1}^* : U(\mathfrak{gl}_{n-1}\mathbb{C}) \hookrightarrow U(\mathfrak{gl}_n\mathbb{C}) : E_{i_1j_1}\cdot\ldots\cdot E_{i_sj_s} \mapsto \iota_{n-1}^*(E_{i_1j_1}\cdot\ldots\cdot E_{i_sj_s}) = d_e\iota_{n-1}(E_{i_1j_1})\cdot\ldots\cdot d_e\iota_{n-1}(E_{i_sj_s})$ – инъекция.

Для алгебры $\mathfrak{gl}_n\mathbb{C}$ цепочки (4.1) алгебра Гельфанда–Цетлина $\mathrm{GZ}_n \subset U(\mathfrak{gl}_n\mathbb{C})$, порождённая всеми центрами универсальных обёртывающих алгебр $U(\mathfrak{gl}_k\mathbb{C})$, при $0 \leqslant k \leqslant n$, называется подалгеброй Гельфанда–Цетлина. Иными словами,

$$\mathrm{GZ}_n = \langle Z(U(\mathfrak{gl}_1\mathbb{C})), \dots, Z(U(\mathfrak{gl}_n\mathbb{C}))\rangle, \tag{4.2}$$

где $Z(U(\mathfrak{gl}_k\mathbb{C}))$ – центр универсальной обёртывающей $U(\mathfrak{gl}_k\mathbb{C})$.

Как было сказано выше, замечательным свойством алгебры Гельфанда–Цетлина GZ_n является то, что она действует диагонально на базисе Гельфанда–Цетлина $\{e_\Lambda\}_{\lambda\in\Lambda_n(\lambda)}$ некоторого неприводимого $\mathfrak{gl}_n\mathbb{C}$-модуля V^λ. Это свойство является мотивацией для введения аналогичного определения базиса Гельфанда–Цетлина для неприводимых $\mathfrak{gl}_\infty\mathbb{C}$-модулей. Введём важное для дальнейшего рассуждения определение L-оператора и его квантовых миноров (см. [8]). Для фиксированной алгебры $\mathfrak{gl}_n\mathbb{C}$ L-оператор – это формальный многочлен по параметру u, называемому спектральным параметром, задаваемый формулой

$$L(u) = u + E, \qquad \text{где} \qquad E = \begin{pmatrix} E_{11} & E_{12} & \dots & E_{1n} \\ E_{21} & E_{22} & \dots & E_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ E_{n1} & E_{n2} & \dots & E_{nn} \end{pmatrix}. \tag{4.3}$$

Для L-оператора и индекса $1 \leqslant m \leqslant n$ квантовый угловой минор – это формальный многочлен по спектральному параметру u, задаваемый формулой

$$A_m(u) = \sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_m} \operatorname{sgn}(\sigma) L(u)_{\sigma(1)1} \cdot \ldots \cdot L(u-m+1)_{\sigma(m)m}, \tag{4.4}$$

где $\mathfrak{S}_m$ – группа перестановок m элементов, а $\operatorname{sgn}(\sigma)$ – знак перестановки $\sigma \in \mathfrak{S}_m$.

Как видно из определения, квантовый минор $A_m(u)$ является многочленом степени m, и представим в виде $A_m(u) = u^m + a_{m1}u^{m-1} + \ldots + a_{mm}$. Оператор $A_m(u)$ является определителем Капелли алгебры $\mathfrak{gl}_m\mathbb{C}$, поэтому его коэффициенты $\{a_{mi}\}_{i=1}^m$ являются генераторами центра универсальной обёртывающей $U(\mathfrak{gl}_m\mathbb{C})$, то есть $Z(U(\mathfrak{gl}_m\mathbb{C})) = \langle\{a_{mi}\}_{i=1}^m\rangle$. Следовательно, алгебра Гельфанда–Цетлина GZ_n порождается всеми коэффициентами $\{a_{mi}\}_{1\leqslant i\leqslant m\leqslant n}$. Значит, для любого индекса $1 \leqslant m \leqslant n$ квантовые миноры $A_m(u)$ действуют диагонально в базисе Гельфанда–Цетлина $\{e_\Lambda\}_{\lambda\in\Lambda_n(\lambda)}$ неприводимого представления

V^λ алгебры $\mathfrak{gl}_n\mathbb{C}$. А именно, имеет место формула

$$A_m(u) \cdot e_\Lambda = \prod_{i=1}^{m}(u + \lambda_{mi} - i + 1)e_\Lambda. \tag{4.5}$$

Это свойство однозначно (с точностью до умножения на скаляр) определяет базис Гельфанда–Цетлина $\{e_\Lambda\}_{\lambda\in\Lambda_n(\lambda)}$ в неприводимом представлении V^λ. Таким образом, базис Гельфанда – Цетлина можно определять как решение спектральной задачи (4.5), не пользуясь понижающими операторами. Такой подход может быть использован в тех случаях, когда действие понижающих операторов на вектор старшего веса не определено в принципе (см. [14, 1]).

Вернёмся к рассмотрению цепочки (4.1). Заметим, что для любого $n \in \mathbb{N}^*$ центр универсальной обёртывающей $U(\mathfrak{gl}_{n-1}\mathbb{C})$ вкладывается в центр универсальной обёртывающей $U(\mathfrak{gl}_n\mathbb{C})$, то есть

$$\iota_{n-1}^*(Z(U(\mathfrak{gl}_{n-1}\mathbb{C}))) \subset Z(U(\mathfrak{gl}_n\mathbb{C})).$$

Таким образом, мы получаем корректно определённую цепочку вложений алгебр Гельфанда–Цетлина, изображённую на следующей коммутативной диаграмме

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r, hook, "\iota_0^*"] & \mathrm{GZ}_1 \arrow[r, hook, "\iota_1^*"] \arrow[d, hook, "\mathrm{id}_{\mathrm{GZ}_1}"] & \mathrm{GZ}_2 \arrow[r, hook, "\iota_2^*"] \arrow[d, hook, "\mathrm{id}_{\mathrm{GZ}_2}"] & \cdots \arrow[r, hook, "\iota_{n-1}^*"] & \mathrm{GZ}_n \arrow[r, hook, "\iota_n^*"] \arrow[d, hook, "\mathrm{id}_{\mathrm{GZ}_{n-1}}"] & \cdots \\
0 \arrow[r, hook, "\iota_0^*"] & U(\mathfrak{gl}_1\mathbb{C}) \arrow[r, hook, "\iota_1^*"] & U(\mathfrak{gl}_2\mathbb{C}) \arrow[r, hook, "\iota_2^*"] & \cdots \arrow[r, hook, "\iota_{n-1}^*"] & U(\mathfrak{gl}_n\mathbb{C}) \arrow[r, hook, "\iota_n^*"] & \cdots,
\end{tikzcd} \tag{4.6}$$

Используя верхнюю цепочку вложений алгебр GZ_n диаграммы (4.6), можно корректно определить бесконечную алгебру Гельфанда–Цетлина GZ_∞. Так, копредел верхней цепочки мы будем понимать как алгебру $\mathrm{GZ}_\infty = \varinjlim \mathrm{GZ}_n$. Легко видеть, что алгебра Гельфанда–Цетлина GZ_∞ порождена всеми коэффициентами всех квантовых миноров $A_m(u)$, то есть $\mathrm{GZ}_\infty = \langle\{a_{mi}\}_{1\leqslant i\leqslant m\leqslant\infty}\rangle$. Таким образом, спектральная задача (4.5) может быть поставлена и на базис в неприводимых $\mathfrak{gl}_\infty\mathbb{C}$-модулях. Далее, используя бесконечную алгебру Гельфанда–Цетлина GZ_∞, мы, по аналогии с алгеброй $\mathfrak{gl}_n\mathbb{C}$, определим базис Гельфанда–Цетлина в неприводимых представлениях алгебры $\mathfrak{gl}_\infty\mathbb{C}$.

§5. Полиномиальные представления алгебры $\mathfrak{gl}_\infty\mathbb{C}$

Перейдём к рассмотрению интересующей нас алгебры $\mathfrak{gl}_\infty\mathbb{C}$. В первую очередь ограничим класс рассматриваемых нами неприводимых представлений. А именно, аналогично конечномерному случаю определим старший вес как упорядоченный набор $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots)$, такой, что

$$\lambda_1 \geqslant \lambda_2 \geqslant \ldots \qquad \text{и} \qquad \forall i \in \mathbb{N}^* \implies \lambda_i \in \mathbb{N}, \tag{5.1}$$

причём существует такое число $N \in \mathbb{N}^*$, что для любого $n > N$ все $\lambda_n = 0$.

Как и в случае $\mathfrak{gl}_n\mathbb{C}$, отождествим все старшие веса с соответствующими диаграммами Юнга. Обозначим через $\mathbb{C}^\infty$ прямую сумму всех одномерных подпространств, натянутых на векторы e_i, иными словами $\mathbb{C}^\infty = \bigoplus\limits_{i\in\mathbb{N}^*} \langle e_i\rangle$. Векторы e_i можно воспринимать как столбцы размерности $\infty\times 1$, в которых на каждом месте стоят нули, а на i-ом месте стоит единица. Иными словами, $e_i = (\delta_{ij})_{j\in\mathbb{N}^*}$. Зададим действие алгебры $\mathfrak{gl}_\infty\mathbb{C}$ на пространстве $\mathbb{C}^\infty$ обычным умножением матрицы на вектор, то есть $E_{ij} \cdot e_k = \delta_{jk} e_i$. Представление $\mathbb{C}^\infty$ будем называть тавтологическим представлением алгебры $\mathfrak{gl}_\infty\mathbb{C}$.

Напомним, что, в случае алгебры $\mathfrak{gl}_n\mathbb{C}$, любое её неприводимое полиномиальное представление являлось решением универсальной задачи (2.8). Это наблюдение мотивирует определить неприводимые полиномиальные представления V^λ алгебры $\mathfrak{gl}_\infty\mathbb{C}$ как решения аналогичной универсальной задачи. А именно, представление V^λ алгебры $\mathfrak{gl}_\infty\mathbb{C}$ мы будем называть полиномиальным, если существует универсальное симметризующее отображение $\Phi_{uni} : (\mathbb{C}^\infty)^{\times\lambda} \longrightarrow V^\lambda$. То есть такое отображение, что для любого симметризующего отображения $\Phi : (\mathbb{C}^\infty)^{\times\lambda} \longrightarrow F$ существует единственное отображение $\varphi : V^\lambda \longrightarrow F$, такое, что $\Phi = \varphi \circ \Phi_{uni}$. Иными словами, для любых Φ и F как выше существует единственное отображение φ, делающее следующую диаграмму коммутативной

$$\begin{tikzcd}
(\mathbb{C}^\infty)^{\times\lambda} \arrow[r, "\Phi_{uni}"] \arrow[dr, "\Phi"'] & V^\lambda \arrow[d, dashed, "\varphi"] \\
& F.
\end{tikzcd} \tag{5.2}$$

Вообще говоря, мы ещё не задали действие алгебры $\mathfrak{gl}_\infty\mathbb{C}$ на пространствах V^λ, поэтому, формально говоря, мы не имеем право их называть $\mathfrak{gl}_\infty\mathbb{C}$-модулями. Однако, несмотря на возможную путаницу, мы и дальше будем придерживаться введённой терминологии. Итак, определив представления V^λ, в первую очередь покажем их существование и единственность (с точностью до изоморфизма), это будет результатом следующего предложения.

Предложение 5.1. *Для любого старшего веса λ представления V^λ существуют и единственны с точностью до изоморфизма.*

Доказательство. Зафиксируем старший вес $\lambda = \lambda_1 \geqslant \ldots \geqslant \lambda_N \geqslant 0 \geqslant \ldots$ представления V^λ. Назовём отображение f полусимметризующим, если оно удовлетворяет только первым двум условиями (2.4) и (2.5). Рассмотрим аналогичную универсальную задачу с полусимметризующими отображениями: если $\Phi'_{uni} : (\mathbb{C}^\infty)^{\times\lambda} \longrightarrow W^\lambda$ – полусимметризующее отображение такое, что для любого полусимметризующего отображения $\Phi : (\mathbb{C}^\infty)^{\times\lambda} \longrightarrow F$ существует единственное отображение $\varphi' : W^\lambda \longrightarrow F$, такое, что $\Phi = \varphi' \circ \Phi'_{uni}$. Иными словами, для любых Φ и F как выше существует единственное отображение φ', делающее следующую диаграмму коммутативной

$$\begin{tikzcd}
(\mathbb{C}^\infty)^{\times\lambda} \arrow[r, "\Phi'_{uni}"] \arrow[dr, "\Phi"'] & W^\lambda \arrow[d, dashed, "\varphi'"] \\
& F,
\end{tikzcd} \tag{5.3}$$

Из универсальных свойств тензорного произведения очевидно, что решением будет пространство $W^\lambda = \bigotimes\limits_{k=1}^{N} \bigwedge^{\lambda_k} \mathbb{C}^\infty$, а универсальное отображение Φ'_{uni} задаётся формулой

$$\Phi'_{uni} : \begin{array}{|c|c|cc|c|} \cline{1-2}\cline{4-5} v_1^{(1)} & v_1^{(2)} & \cdots & & v_1^{(N)} \\ \cline{1-2}\cline{4-5} v_2^{(1)} & v_2^{(2)} & \cdots & & v_{\lambda_N}^{(N)} \\ \cline{1-2}\cline{4-5} \vdots & \vdots \\ \cline{1-2} v_{\lambda_1}^{(1)} & v_{\lambda_2}^{(2)} \\ \cline{1-2} \end{array} \longmapsto \bigotimes_{k=1}^{N} \bigwedge_{i=1}^{\lambda_k} v_i^{(k)}. \tag{5.4}$$

Определим подпространство U^λ пространства W^λ как подпространство, порождённое всеми разностями $\Phi'_{uni}(w) - \sum \Phi'_{uni}(w')$, где суммирование подразумевается по тем $w' \in (\mathbb{C}^\infty)^{\times\lambda}$, получающимся из w обменом между двумя фиксированными столбцами, при выбранном подмножестве в правом из выбранных столбцов (см. 2.7). Как известно (см. [7] гл.3), факторпространство W^λ/U^λ обладает следующим универсальным свойством: для проекции $\pi^\lambda : W^\lambda \longrightarrow W^\lambda/U^\lambda : w \mapsto [w]$, переводящей элемент w в свой класс сопряжённости $[w]$, и любого линейного отображения $\varphi' : W^\lambda \longrightarrow F$ существует единственное линейное отображение $\varphi : W^\lambda/U^\lambda \longrightarrow F$, такое, что $\varphi' = \varphi \circ \pi^\lambda$. Иными словами, для любых φ' и F как выше существует единственное отображение φ, делающее следующую диаграмму коммутативной

$$\begin{tikzcd} W^\lambda \arrow[r, "\pi^\lambda"] \arrow[dr, "\varphi'"'] & W^\lambda/U^\lambda \arrow[d, dashed, "\varphi"] \\ & F. \end{tikzcd} \tag{5.5}$$

Так, коммутативные диаграммы (5.3) и (5.5) можно достроить до диаграммы (5.2) с симметризующими отображениями. Иначе говоря, коммутативность диаграмм (5.3) и (5.5) индуцирует коммутативность следующей диаграммы

$$\begin{tikzcd} (\mathbb{C}^\infty)^{\times\lambda} \arrow[r, "\Phi'_{uni}"] \arrow[rr, bend left, "\Phi_{uni}"] \arrow[dr, "\Phi"'] & W^\lambda \arrow[r, "\pi^\lambda"] \arrow[d, dashed, "\varphi'"] & W^\lambda/U^\lambda \arrow[dl, dashed, "\varphi"] \\ & F, & \end{tikzcd} \tag{5.6}$$

где $\Phi_{uni} = \pi^\lambda \circ \Phi'_{uni}$.

Таким образом, коммутативная диаграмма (5.6) даёт решение исходной задачи, тем самым доказывая существование полиномиальных представлений V^λ. А именно, для каждого полиномиального представления V^λ имеет место изоморфизм векторных пространств

$$V^{\lambda} \cong \Big(\bigotimes_{k=1}^{N} \bigwedge^{\lambda_k} \mathbb{C}^{\infty} \Big) / U^{\lambda}. \tag{5.7}$$

Наконец, в соответствии с этой формулой определим действие алгебры $\mathfrak{gl}_{\infty}\mathbb{C}$ на пространстве V^{λ}, чем оправдаем название "полиномиальное представление". Действие элемента $g \in \mathfrak{gl}_{\infty}\mathbb{C}$ задаётся как обычное действие алгебры Ли на факторпространстве и тензорном произведении, а действие на пространство $\mathbb{C}^{\infty}$ задаётся как действие тавтологического представления. Другими словами, имеет место формула

$$g \cdot [\, v_1^{(1)} \wedge v_2^{(1)} \wedge \dots \,] = [\, g \cdot v_1^{(1)} \wedge v_2^{(1)} \wedge \dots + v_1^{(1)} \wedge g \cdot v_2^{(1)} \wedge \dots + \dots \,]. \tag{5.8}$$

Теперь докажем единственность с точностью до изоморфизма. Предположим противное, пусть для того же старшего веса λ существует полиномиальное представление $\widetilde{V}^{\lambda}$, не изоморфное V^{λ}. Тогда $\widetilde{V}^{\lambda}$ – тоже решение универсальной задачи (5.2), причём для любых $\widetilde{\Phi}$ и F следующая диаграмма коммутативна

$$\begin{tikzcd} (\mathbb{C}^{\infty})^{\times\lambda} \arrow[r, "\widetilde{\Phi}_{uni}"] \arrow[dr, "\widetilde{\Phi}"'] & \widetilde{V}^{\lambda} \arrow[d, dashed, "\widetilde{\varphi}"] \\ & F. \end{tikzcd} \tag{5.9}$$

Пусть $\widetilde{\Phi} = \Phi_{uni}$ и $F = V^{\lambda}$, тогда, по универсальному свойству V^{λ}, существует единственное симметризующее отображение $\varphi : V^{\lambda} \longrightarrow \widetilde{V}^{\lambda}$, делающее следующую диаграмму коммутативной

$$\begin{tikzcd} (\mathbb{C}^{\infty})^{\times\lambda} \arrow[r, "\widetilde{\Phi}_{uni}"] \arrow[dr, "\Phi_{uni}"'] & \widetilde{V}^{\lambda} \arrow[d, dashed, shift left, "\widetilde{\varphi}"] \\ & V^{\lambda}. \arrow[u, dashed, shift left, "\varphi"] \end{tikzcd} \tag{5.10}$$

Заметим, что $\widetilde{\varphi} \circ \varphi \circ \Phi_{uni} = \widetilde{\varphi} \circ \widetilde{\Phi}_{uni} = \Phi_{uni} = \mathrm{id}_{V^{\lambda}} \circ \Phi_{uni}$, но отображение $\widetilde{\varphi} \circ \varphi$ единственно, а значит равно тождественному $\widetilde{\varphi} \circ$

$\varphi = \mathrm{id}_{V^\lambda}$. Аналогичные рассуждения показывают, что $\varphi \circ \widetilde{\varphi} = \mathrm{id}_{\widetilde{V}^\lambda}$. Таким образом, $\widetilde{V}^\lambda \cong V^\lambda$. Получили противоречие, значит решение универсальной задачи (5.2) является единственным с точностью до изоморфизма. □

Таким образом, все полиномиальные представления алгебры $\mathfrak{gl}_\infty\mathbb{C}$ корректно определены. Далее будет показано, что все полиномиальные представления алгебры $\mathfrak{gl}_\infty\mathbb{C}$ неприводимы и обладают вектором старшего веса. Также будет показано, что разные старшие веса задают разные (с точностью до изоморфизма) полиномиальные представления.

§6. Базис Гельфанда–Цетлина в неприводимых полиномиальных представлениях алгебры $\mathfrak{gl}_\infty\mathbb{C}$

Перейдём к построению базиса Гельфанда–Цетлина в неприводимых $\mathfrak{gl}_\infty\mathbb{C}$-модулях. Как говорилось раньше, определим базис Гельфанда–Цетлина в неприводимом представлении V аналогично конечномерному случаю. А именно, базис $\{e_T\}$ неприводимого представления V алгебры $\mathfrak{gl}_\infty\mathbb{C}$ мы будем называть базисом Гельфанда–Цетлина, если алгебра Гельфанда–Цетлина GZ_∞ действует на нём диагонально. Заметим, что мы ещё не знаем, что полиномиальные представления V^λ неприводимы. Для доказательства этого факта построим в представлении V^λ некоторый базис, который вскоре и окажется искомым базисом Гельфанда–Цетлина. Однако перед этим определим бесконечные схемы Гельфанда–Цетлина, которыми будут индексироваться элементы нашего базиса. Для фиксированного старшего веса $\lambda = \lambda_1 \geqslant \lambda_2 \geqslant \ldots$, бесконечная схема Гельфанда–Цетлина – это упорядоченный набор элементов λ_{ij}

$$\Lambda = \begin{bmatrix} \cdots & & \cdots & & \cdots & & \cdots & & \cdots \\ & \lambda_{n,1} & & \lambda_{n,2} & & \cdots & & \lambda_{n,n} & \\ & & \cdots & & \cdots & & \cdots & & \\ & & & \lambda_{21} & & \lambda_{22} & & & \\ & & & & \lambda_{11} & & & & \end{bmatrix}, \qquad (6.1)$$

где для любых $1 \leqslant j \leqslant i \leqslant \infty$ элементы λ_{ij} определяются как количество клеток, меньшее, либо равное i в j-й строке некоторой полустандартной таблицы Юнга формы λ (см. [2]).

Для полиномиального представления V^λ со старшим весом $\lambda = \lambda_1 \geqslant \ldots \geqslant \lambda_N \geqslant 0 \geqslant \ldots$, используя определённые выше бесконечные схемы Гельфанда–Цетлина, определим элементы $e_\Lambda \in V^\lambda$ формулой

$$e_\Lambda = \overrightarrow{\prod_{2\leqslant k<\infty}} \prod_{i=1}^{k-1} z_{ki}^{\lambda_{ki}-\lambda_{k-1,i}} \cdot v_\lambda, \tag{6.2}$$

где члены в упорядоченном произведении упорядочены в соответствии с возрастанием индекса k, а вектор $v_\lambda \in V^\lambda$ имеет вид

$$v_\lambda = [\,(e_1\wedge e_2\wedge\ldots\wedge e_{\lambda_1})\otimes(e_1\wedge e_2\wedge\ldots\wedge e_{\lambda_2})\otimes\ldots\otimes(e_1\wedge e_2\wedge\ldots\wedge e_{\lambda_N})\,]. \tag{6.3}$$

Заметим, что в правой части выражения (6.2) лишь конечное число разностей $\lambda_{ki} - \lambda_{k-1,i}$ отлично от нуля. Поэтому в действительности упорядоченное произведение имеет лишь конечное число слагаемых, а значит действие на вектор v_λ определено корректно. Для элементов e_Λ сформулируем и докажем следующую лемму.

Лемма 6.1. *Для полиномиального представления V^λ семейство векторов $\{e_\Lambda\}_{\Lambda\in\Lambda_\infty(\lambda)}$, индексируемых всеми бесконечными схемами Гельфанда–Цетлина, образует базис векторного пространства V^λ.*

Доказательство. Пусть $\mathfrak{h}^n \subset \mathfrak{gl}_n\mathbb{C}$ – подалгебра Картана, E_{ij} – матричная единица, $\deg E_{ij} = j - i$ – степень матричной единицы и $\mathfrak{g}_q = \langle\{E_{ij} \mid \deg E_{ij} = q\}\rangle$ – линейная оболочка матричных единиц степени q. Для алгебры $\mathfrak{gl}_n\mathbb{C}$ у нас есть треугольное разложение $\mathfrak{gl}_n\mathbb{C} = \mathfrak{n}_-^n \oplus \mathfrak{h}^n \oplus \mathfrak{n}_+^n$, где $\mathfrak{n}_-^n = \bigoplus\limits_{n>q>0} \mathfrak{g}_q$, а $\mathfrak{n}_+^n = \bigoplus\limits_{n<q<0} \mathfrak{g}_q$. Введём для алгебры $\mathfrak{gl}_\infty\mathbb{C}$ аналогичное разложение, а именно, определим подалгебру Картана $\mathfrak{h}^\infty = \mathfrak{g}_0$ и подпространства $\mathfrak{n}_-^\infty = \bigoplus\limits_{q>0} \mathfrak{g}_q$ и $\mathfrak{n}_+^\infty = \bigoplus\limits_{q<0} \mathfrak{g}_q$. Тогда имеет место треугольное разложение $\mathfrak{gl}_\infty\mathbb{C} = \mathfrak{n}_-^\infty \oplus \mathfrak{h}^\infty \oplus \mathfrak{n}_+^\infty$. Для старшего веса λ определим представления $V_n^\lambda = \mathfrak{n}_-^n \cdot v_\lambda$ алгебры $\mathfrak{gl}_n\mathbb{C}$. Теперь вернёмся к диаграмме (3.5). Заметим, что при вложении $d_e\iota_{n-1}$ подпространство $\mathfrak{n}_-^{n-1}$ вкладывается в $\mathfrak{n}_-^n$, то есть $d_e\iota_{n-1}(\mathfrak{n}_-^{n-1}) \subset \mathfrak{n}_-^n$.

Это наблюдение индуцирует следующую диаграмму вложений

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r, hook, "d_e\iota_0"] \arrow[d, squiggly] & \mathfrak{n}_-^1 \arrow[r, hook, "d_e\iota_1"] \arrow[d, squiggly] & \mathfrak{n}_-^2 \arrow[r, hook, "d_e\iota_2"] \arrow[d, squiggly] & \cdots \arrow[r, hook, "d_e\iota_{n-1}"] & \mathfrak{n}_-^n \arrow[r, hook, "d_e\iota_n"] \arrow[d, squiggly] & \cdots \\
V_0^\lambda \arrow[r, hook, "\#\iota_0"] & V_1^\lambda \arrow[r, hook, "\#\iota_1"] & V_2^\lambda \arrow[r, hook, "\#\iota_2"] & \cdots \arrow[r, hook, "\#\iota_{n-1}"] & V_n^\lambda \arrow[r, hook, "\#\iota_n"] & \cdots ,
\end{tikzcd} \tag{6.4}$$

где $\#\iota_n$ – некоторое вложение, переводящее старший вектор $v_\lambda \in V_n^\lambda$ в старший вектор $v_\lambda \in V_{n+1}^\lambda$.

Нижняя цепочка вложений пространств V_n^λ образует направленную систему и имеет копредел $\varinjlim V_n^\lambda = V^\lambda$. Отсюда, в частности, видно, что полиномиальное представление V^λ порождается действием подпространства $\mathfrak{n}_-^\infty$ на вектор v_λ, то есть $V^\lambda = \mathfrak{n}_-^\infty \cdot v_\lambda$. Определим степень $\deg\Lambda$ схемы Гельфанда–Цетлина Λ как наименьшее число N, такое, что для любых $k > N$ все разности $\lambda_{ki} - \lambda_{k-1,i}$ элементов схемы Гельфанда–Цетлина Λ равны нулю для любых i. Введём подмножества $\Lambda_\infty^n(\lambda) \subset \Lambda_\infty(\lambda)$ как множества, состоящие из всех схем Гельфанда–Цетлина степени n, иначе говоря, $\Lambda_\infty^n(\lambda) = \{\Lambda \in \Lambda_\infty(\lambda) \mid \deg\Lambda = n\}$. Тогда имеет место равенство

$$\Lambda_\infty(\lambda) = \bigcup_{n>0} \Lambda_\infty^n(\lambda). \tag{6.5}$$

Как было сказано выше, в произведении (6.2) имеется лишь конечное число слагаемых. Более строго, если $\Lambda \in \Lambda_\infty^n(\lambda)$, то $e_\Lambda = \overrightarrow{\prod\limits_{2\leqslant k<\infty}} \prod\limits_{i=1}^{k-1} z_{ki}^{\lambda_{ki}-\lambda_{k-1,i}} \cdot v_\lambda = \overrightarrow{\prod\limits_{2\leqslant k\leqslant n}} \prod\limits_{i=1}^{k-1} z_{ki}^{\lambda_{ki}-\lambda_{k-1,i}} \cdot v_\lambda$. Однако для всех представлений V_n^λ алгебры $\mathfrak{gl}_n\mathbb{C}$ множество $\{e_\Lambda\}_{\Lambda\in\Lambda_\infty^n(\lambda)}$ образует базис, а следовательно множество $\{e_\Lambda\}_{\Lambda\in\Lambda_\infty(\lambda)} = \bigcup\limits_{n>0} \{e_\Lambda\}_{\Lambda\in\Lambda_\infty^n(\lambda)}$ образует базис в полиномиальном представлении V^λ. $\square$

Докажем, что базис $\{e_\Lambda\}_{\Lambda\in\Lambda_\infty(\lambda)}$ полиномиального представления V^λ является искомым базисом Гельфанда–Цетлина. Однако перед этим необходимо показать, что полиномиальные представления V^λ являются неприводимыми и определены корректно. Это будет результатом следующих лемм.

Лемма 6.2. *Полиномиальное представление V^λ алгебры $\mathfrak{gl}_\infty\mathbb{C}$ является неприводимым представлением со старшим весом.*

Доказательство. Для начала покажем, что вектор $v_\lambda \in V^\lambda$ является вектором старшего веса. То, что $\mathfrak{n}_-^\infty \cdot v_\lambda = V^\lambda$, было доказано в предыдущей лемме. Покажем справедливость оставшихся свойств. Заметим, что имеет место равенство $\mathfrak{n}_+^\infty = \bigcup\limits_{n>0} \mathfrak{n}_+^n$. Но, для любого $n \in \mathbb{N}^*$ действие $\mathfrak{n}_+^n$ на вектор v_λ даёт нуль-вектор, а значит, $\mathfrak{n}_+^\infty \cdot v_\lambda = 0$. Аналогично, имеет место равенство $\mathfrak{h}^\infty = \bigcup\limits_{n>0} \mathfrak{h}^n$. Но, для любого $n \in \mathbb{N}^*$ действие элемента $E_{ii} \in \mathfrak{h}^n$ на вектор v_λ даёт $\lambda_i v_\lambda$, а значит $\forall E_{ii} \in \mathfrak{h}^\infty \implies E_{ii} \cdot v_\lambda = \lambda_i v_\lambda$. Таким образом, все полиномиальные представления являются представлениями со старшим весом. Покажем их неприводимость.

Введём на пространстве V^λ положительно определённую эрмитову форму $\langle\cdot|\cdot\rangle$, объявив базисные элементы e_Λ ортогональными. Пусть $U \subset V^\lambda$ – нетривиальное инвариантное относительно действия алгебры $\mathfrak{gl}_\infty\mathbb{C}$ подпространство. Рассмотрим к нему ортогональное дополнение $U^\perp$ относительно формы $\langle\cdot|\cdot\rangle$. Понятно, что подпространство $U^\perp$ так же инвариантно относительно действия алгебры $\mathfrak{gl}_\infty\mathbb{C}$. Действительно, для любого $g \in \mathfrak{gl}_\infty\mathbb{C}$ следует, что $g \cdot U \subset U$. Но, по определению ортогонального дополнения, верно, что $\langle U|U^\perp\rangle = 0$. Тогда $\langle g \cdot U|U^\perp\rangle = \langle U|g^\dagger \cdot U^\perp\rangle = 0$, где $g^\dagger$ – эрмитово сопряжённая матрица. Следовательно $g^\dagger \cdot U^\perp \subset U^\perp$, а значит $U^\perp$ – инвариантное подпространство. Так, имеет место разложение на неприводимые представления $V^\lambda = U \oplus U^\perp$. Пусть вектор старшего веса v_λ принадлежит подпространству U. Действие алгебры $\mathfrak{gl}_\infty\mathbb{C} \cdot v_\lambda = V^\lambda$. С другой стороны, U – инвариантное подпространство, а значит $\mathfrak{gl}_\infty\mathbb{C} \cdot v_\lambda \subset U$. Следовательно подпространство $U = V^\lambda$, а $U^\perp = 0$. □

Лемма 6.3. *Полиномиальные представления с разными старшими весами не изоморфны.*

Доказательство. Зафиксируем полиномиальные представления V^λ и $V^{\lambda'}$ такие, что $\lambda \neq \lambda'$. Предположим противное, пусть $\rho : V^\lambda \longrightarrow V^{\lambda'}$ – изоморфизм представлений. При изоморфизме старший вектор v_λ переходит в старший вектор $v_{\lambda'}$. Тогда для любого $E_{ii} \in \mathfrak{h}^\infty$ верно, что $E_{ii} \cdot v_\lambda = \lambda_i v_\lambda$. По свойству сплетающего оператора ρ получаем, что $\lambda_i v_\lambda = \rho(E_{ii} \cdot v_\lambda) = E_{ii} \cdot \rho(v_\lambda) = E_{ii} \cdot v_{\lambda'} = \lambda'_i \cdot v_{\lambda'}$ для любого индекса

i. Получили противоречие, значит полиномиальные представления с разными старшими весами не изоморфны. □

Итак, все полиномиальные представления алгебры $\mathfrak{gl}_\infty\mathbb{C}$ являются неприводимыми представлениями со старшим весом, причём имеет место биекция между классами изоморфимов неприводимых представлений и множеством всех старших весов. Все эти свойства были унаследованы от аналогичных конечномерных представлений. В том же духе будет проведено доказательство следующей теоремы.

Теорема 6.1. *Базис $\{e_\Lambda\}_{\Lambda\in\Lambda_\infty(\lambda)}$ неприводимого полиномиального представления V^λ является базисом Гельфанда–Цетлина.*

Доказательство. Как говорилось ранее, бесконечная алгебра Гельфанда–Цетлина GZ_∞ порождается всеми коэффициентами всех квантовых миноров $A_m(u)$, то есть $\mathrm{GZ}_\infty = \langle\{a_{mi}\}_{1\leqslant i\leqslant m\leqslant\infty}\rangle$. Таким образом, достаточно показать, что все векторы e_Λ являются собственными векторами квантовых миноров $A_m(u)$. Заметим, что имеет место равенство $\{A_m(u)\}_{1\leqslant m<\infty} = \bigcup\limits_{n>0}\{A_m(u)\}_{1\leqslant m\leqslant n}$. Вследствие формулы (4.5), для любого $n\in\mathbb{N}$, все элементы множества $\{e_\Lambda\}_{\Lambda\in\Lambda^n_\infty(\lambda)}$ являются собственными векторами квантовых миноров $\{A_m(u)\}_{1\leqslant m\leqslant n}$. Следовательно, базис $\{e_\Lambda\}_{\Lambda\in\Lambda_\infty(\lambda)}$ является множеством собственных векторов всех квантовых миноров $\{A_m(u)\}_{1\leqslant m<\infty}$, а значит является базисом Гельфанда–Цетлина. □

Базис Гельфанда–Цетлина (6.2) имеет наиболее простой вид в фундаментальных представления алгебры $\mathfrak{gl}_\infty\mathbb{C}$. Аналогично случаю $\mathfrak{gl}_n\mathbb{C}$, для любого полиномиального представления V^λ алгебры $\mathfrak{gl}_\infty\mathbb{C}$ имеет место вложение

$$V^\lambda \hookrightarrow \bigotimes_{k\geqslant 0}\mathrm{Sym}^{a_k}\bigwedge^k\mathbb{C}^\infty, \tag{6.6}$$

где почти все числа $a_k\in\mathbb{N}$ равны нулю.

Так, для фундаментальных представлениях $\bigwedge^k\mathbb{C}^\infty$ базис Гельфанда–Цетлина имеет вид

$$\{e_\Lambda\}_{\Lambda\in\Lambda_\infty(\lambda)} = \{e_{i_1}\wedge e_{i_2}\wedge\ldots\wedge e_{i_k}\}_{1\leqslant i_1\leqslant i_2\leqslant\ldots\leqslant i_k<\infty}. \tag{6.7}$$

Как было отмечено ранее, все представления алгебры $\mathfrak{gl}_\infty\mathbb{C}$ являются так же представлениями группы $\mathrm{GL}_\infty\mathbb{C}$. Таким образом, базис (6.2) является базисом Гельфанда–Цетлина всех полиномиальных представлений V^λ группы $\mathrm{GL}_\infty\mathbb{C}$. Как видно из написанного выше, все идеи построения базиса Гельфанда–Цетлина в неприводимых $\mathfrak{gl}_\infty\mathbb{C}$-модулях основывались на сведении бесконечномерного случая к конечномерному. Эти идеи могут быть применены для построения базиса Гельфанда–Цетлина в неприводимых представлениях копределов всех классических алгебр Ли $A_\infty, B_\infty, C_\infty, D_\infty$ и других редуктивных алгебр.

Список литературы

1. P. V. Antonenko,, *The Gelfand–Tsetlin basis for infinite-dimensional representations of* $gl_n(\mathbb{C})$. — J. Physics A: Mathematical and Theoretical **55**, No. 22 (2022), 225201.
2. W. Fulton, *Young tableaux: with applications to representation theory and geometry*, Cambridge University Press (1997).
3. I. M. Gel'fand, M. L. Tsetlin, *Finite-dimensional representations of groups of orthogonal matrices.* — Dokl. Akad. Nauk SSSR, n. Ser. **71** (1950), 1017–1020.
4. I. M. Gel'fand, M. I. Graev, *Finite-dimensional irreducible representations of the unitary and complete linear group and special functions associated with them.* — Izv. RAN, Ser. Matem. **29**, No. 6 (1965), 1329–1356.
5. I. M. Gelfand, M. L. Tsetlin, *Finite-dimensional representations of the group of unimodular matrices.* — Dokl. Akad. Nauk SSSR **71**, No. 5 (1950), 825–828.
6. V. G. Kac, A. K. Raina, N. Rozhkovskaya, *Bombay Lectures on Highest Weight Representations of Infinite Dimensional Lie Algebras*, Vol. 29, World scientific (2013).
7. S. Mac Lane, *Categories for the Working Mathematician*, Vol. 5, Springer Science & Business Media (2013).
8. A. Molev, *Yangians and Classical Lie Algebras*, American Mathematical Soc. (2007).
9. A. Molev, O. Yakimova, *Monomial bases and branching rules.* — Transformation groups **26**, No. 3 (2021), 995–1024.
10. A. I. Molev, *Gelfand–Tsetlin bases for classical Lie algebras.* — Handbook of algebra **4** (2006), 109–170.
11. J. G. Nagel, M. Moshinsky, *Operators that lower or raise the irreducible vector spaces of* U_{n-1} *contained in an irreducible vector space of* U_n. — J. Math. Phys. **6**, No. 5 (1965), 682–694.
12. M. Nazarov, V. Tarasov, *Representations of Yangians with GelfandZetlin bases*, Walter de Gruyter GmbH & Co. KG Berlin, Germany (1998).
13. M. Nazarov, V. Tarasov, *Yangians and Gelfand-Zetlin bases.* — Publications of the Research Institute for Mathematical Sciences, **30**, No. 3 (1994), 459–478.
14. P. A. Valinevich, *Construction of the Gelfand–Tsetlin Basis for Unitary Principal Series Representations of the Algebra* $sl_n(\mathbb{C})$. — Theor. Math. Phys. **198**, No. 1 (2019), 145–155.
15. D. P. Zhelobenko, *The classical groups. Spectral analysis of their finite-dimensional representations.* — Russian Math. Surveys **17**, No. 1 (1962), 1.

Movchan E. A. Gelfand–Tsetlin basis for irreducible representations of the infinite-dimensional general linear group

We consider the problem of constructing a Gelfand–Tsetlin basis in irreducible representations of the infinite-dimensional general linear group. For finite-dimensional irreducible representations of a general linear group, all elements of the Gelfand–Tsetlin basis are parameterized by Gelfand–Tsetlin schemes. We extend this definition to infinite Gelfand–Tsetlin schemes, which, in turn, parameterize elements of the Gelfand–Tsetlin basis of an irreducible representation of the infinite-dimensional complete linear group. Using properties of co-limits of representations with the highest weight, we present an explicit form of the Gelfand–Tsetlin basis.

С.Петербургский
государствунный университет,
С.Петербург, Россия
E-mail: evgenymov@gmail.com

Поступило 4 июня 2024 г.