Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 532, 2024 г.

А. В. Иванов

УСЛОВИЕ ПРИМЕНИМОСТИ ОБРЕЗАНИЯ В ДВУМЕРНЫХ МОДЕЛЯХ

§1. Введение

Регуляризация играет ключевую роль при анализе расходящихся интегралов и сингулярных функций в квантово-полевых моделях [1,2]. Данная работа посвящена регуляризации обрезанием в координатном представлении [3–10], основная идея которой заключается в изменении фундаментального решения для свободного оператора Лапласа в некоторой малой окрестности начала координат. Ясно, что при такой деформации существует произвол, который, как показывает практика, может приводить к появлению «недопустимых» функций. К примеру, собственные значения деформированного оператора могут менять знак, из-за чего гауссов интеграл теряет сходимость. Некоторые дополнительные обсуждения регуляризаций на примере двумерных скалярных теорий, а также их применение, могут быть найдены в работах [11–14].

В недавней работе [15] было предложено условие допустимости для регуляризации обрезанием в евклидовом пространстве с размерностью больше двух, которое накладывает ряд ограничений на вид деформации. Было показано, что существует семейство деформаций, удовлетворяющих такому условию. К сожалению, в двумерном случае возникает дополнительный произвол в формулировке, который является следствием возможности появления логарифмических сингулярностей. В данной работе планируется обобщить условие на двумерный случай, а также применить полученную регуляризацию к двухпетлевым расходимостям в нелинейной сигма-модели, см. [8,16–24].

Ключевые слова: регуляризация обрезанием, функция Грина, фундаментальное решение, деформация, координатное представление, сигма-модель, две петли, эффективное действие.

Работа поддержана Российским Научным Фондом, грант 23-11-00311.

Статья имеет следующую структуру. В секции 2 представлена основная постановка задачи, обсуждается произвол в деформации фундаментального решения, а также формулируется условие допустимости обрезания в двумерном случае. В секции 3 представлены некоторые свойства деформирующей функции и конкретные примеры. В секции 4 обсуждаются двухпетлевые сингулярности в двумерной нелинейной σ-модели. В заключении содержатся некоторые замечания.

§2. Постановка задачи

Рассмотрим евклидово пространство $\mathbb{R}^2$ со стандартным скалярным произведением векторов $(\,\cdot\,,\cdot\,)$. Определим оператор Лапласа $A(x)$ и его фундаментальное решение $G(x)$, которые в декартовых координатах имеют вид

$$A(x)=-\partial^2_{x_1}-\partial^2_{x_2},\;\; G(x)=-\frac{\ln(|x|)}{2\pi}.$$

Решение $G(\cdot)$ можно рассматривать в качестве главного приближения функции Грина [25, 26], поэтому исследование его свойств является полезной задачей. Прямой подстановкой можно убедиться в справедливости соотношения $A(x)G(x-y)=\delta(x-y)$ в смысле обобщенных функций на классе Шварца $S(\mathbb{R}^2)$, см. [27].

Упомянутая выше регуляризация заключается в деформации фундаментального решения в замкнутом шаре $\mathrm{B}_{1/\Lambda}$ радиуса $1/\Lambda$ и с центром в начале координат и представима в виде

$$\begin{aligned}G(x)\xrightarrow{\text{рег.}}G^{\Lambda,\mathbf{f}}(x)&=\frac{\mathbf{f}\big(\Lambda,|x|^2\Lambda^2\big)}{4\pi}+\frac{1}{2\pi}\begin{cases}\quad L, & \text{для } \ |x|\leqslant 1/\Lambda;\\ -\ln(|x|\sigma), & \text{для } \ |x|>1/\Lambda,\end{cases}\\ &=\frac{\mathbf{f}\big(\Lambda,|x|^2\Lambda^2\big)}{4\pi}+G^{\Lambda,\mathbf{0}}(x).\end{aligned}\tag{1}$$

Здесь $L=\ln(\Lambda/\sigma)$, Λ – регуляризующий параметр, $\sigma=1$ – обезразмеривающая величина, и $\mathbf{f}(\Lambda,\cdot)\in C\big([0,+\infty),\mathbb{R}\big)$ – вспомогательная деформирующая функция, удовлетворяющая свойствам

$$\operatorname{supp}\big(\mathbf{f}(\Lambda,\cdot)\big)\subset[0,1]\;\text{ и }\;A(x)\mathbf{f}\big(\Lambda,|x-y|^2\Lambda^2\big)\xrightarrow{\Lambda\to+\infty}0.\tag{2}$$

Для такого вида деформации справедлив переход $A(x)G^{\Lambda,\mathbf{f}}(x-y)\to\delta(x-y)$ при снятии регуляризации $\Lambda\to+\infty$ в смысле обобщенных функций на $S(\mathbb{R}^2)$. Из построения следует равенство $G(x)=G^{\Lambda,\mathbf{f}}(x)$ для всех $|x|>1/\Lambda$. В отличие от случая с размерностью больше двух, деформирующая функция имеет дополнительный аргумент Λ. Это связано с тем фактом, что присутствие логарифмической сингулярности вида L является естественным в двумерном случае. Таким образом, функцию можно выписать в виде

$$\mathbf{f}(\Lambda, \cdot\,) = \mathbf{f}(\cdot) + L\mathbf{f}_1(\cdot).$$

Хотя присутствие второго слагаемого в последней формуле и является логичным, можно привести несколько серьезных аргументов, которые запрещают его наличие.

- Во-первых, следует обратить внимание на масштабное преобразование. При $x \to \alpha x$, где $\alpha > 0$, первоначальная функция преобразуется по закону

  $$G(x) \to G(\alpha x) = G(x) - \frac{\ln(\alpha)}{2\pi}.$$

  В свою очередь, в деформированном случае преобразование приобретает вид

  $$G^{\Lambda,\mathbf{f}}(x) \to G^{\Lambda,\mathbf{f}}(\alpha x) = G^{\Lambda',\mathbf{f}}(x) - \frac{\ln(\alpha)}{2\pi} - \ln(\alpha)\mathbf{f}_1\big(|x|^2(\Lambda')^2\big),$$

  где $\Lambda' = \alpha\Lambda$ – новый параметр регуляризации. Таким образом, желание сохранить «правильное» масштабное преобразование приводит к необходимости выбрать $\mathbf{f}_1 \equiv 0$.
- Во-вторых, следует обратить внимание на первую квантовую поправку в двумерной нелинейной σ-модели. Как известно, см. [8, 24], первая квантовая поправка равна логарифму детерминанта и, с учетом пертурбативного разложения, сингулярная часть пропорциональна интегралу вида

  $$\int\limits_{\mathrm{B}_{1/\sigma}} \mathrm{d}^2x\,\Big(\partial_{x_\mu}G^{\Lambda,\mathbf{f}}(x)\Big)\Big(\partial_{x^\mu}G^{\Lambda,\mathbf{f}}(x)\Big)$$
  $$= \frac{L^2}{4\pi}\int\limits_0^1 \mathrm{d}s\, s\Big(\mathbf{f}_1'(s)\Big)^2 + \frac{L}{2\pi}\int\limits_0^1 \mathrm{d}s\, s\mathbf{f}'(s)\mathbf{f}_1'(s) + \frac{L}{2\pi}.$$

  Учитывая то, что первая поправка должна быть пропорциональна первой степени логарифма и не должна зависеть от регуляризации, получаем требование $\mathbf{f}_1 \equiv 0$.

Исходя из последних замечаний, в данной работе будем предполагать, что регуляризующая функция не содержит логарифмической сингулярности и представима в виде

$$\mathbf{f}(\Lambda,\,\cdot\,)=\mathbf{f}(\cdot).$$

В работе [15] было предложено и изучено условие применимости обрезания в координатном представлении в пространстве с размерностью $n>2$. Оно заключается в требовании, чтобы плотность в импульсном представлении была неотрицательной

$$\widehat{G}^{\Lambda,\mathbf{f}}(y)=\int\limits_{\mathbb{R}^2}\mathrm{d}^2x\,e^{i(y,x)}G^{\Lambda,\mathbf{f}}(x)\geqslant 0, \tag{3}$$

для всех $y\in\mathbb{R}^n$ и $\Lambda>N>0$ для некоторого фиксированного $N>0$. Преобразование Фурье следует понимать в смысле обобщенных функций. Такое условие накладывает дополнительное ограничение на функцию $\mathbf{f}(\cdot)$. Подставим разложение (1) в неравенство (3) и воспользуемся формулами, см. (20) и (30) из [6] и теоремой 4.15 из [28],

$$\widehat{G}^{\Lambda,\mathbf{0}}(y)=\frac{J_0(|y|/\Lambda)}{|y|^2}\quad\text{и}\quad J_0(|y|)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{\mathrm{S}^1}\mathrm{d}\sigma(\widehat{x})\,e^{i(\widehat{x},y)}, \tag{4}$$

где $J_0(\cdot)$ – функция Бесселя первого рода, S^1 – единичная окружность с центром в нуле, $\mathrm{d}\sigma(\widehat{x})$ – стандартная мера на окружности с $\widehat{x}\in\mathrm{S}^1\subset\mathbb{R}^2$. К примеру, можно выбрать параметризацию вида $\widehat{x}_1=\cos(\phi)$ и $\widehat{x}_2=\sin(\phi)$, где $\phi\in[0,2\pi)$ и $\mathrm{d}\sigma(\widehat{x})=\mathrm{d}\phi$. Далее, обозначая параметр $s=|y|/\Lambda$, неравенство (3) может быть переписано в явном виде следующим образом

$$\frac{s^2}{2}\int\limits_0^1\mathrm{d}t\,tJ_0(st)\mathbf{f}(t^2)+J_0(s)\geqslant 0 \tag{5}$$

для всех $s\geqslant 0$.

§3. Некоторые свойства

Сформулируем ряд утверждений о деформирующей функции $\mathbf{f}(\cdot)$ и выполнимости условия допустимости (5). Прежде всего следует показать, что множество функций, удовлетворяющих неравенству, не пусто. Для этого достаточно воспользоваться леммой 2 из [15]. Как было отмечено в заключении этой работы, доказательство леммы справедливо и для двумерного случая. Тогда для рассматриваемой задачи утверждение имеет следующий вид.

Лемма 1. *Пусть* $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. *Рассмотрим набор мультииндексов* $\{\alpha_i\}_{i=1}^{k}$, *компоненты которых являются положительными числами из интервала* $(0, 1/2]$ *и удовлетворяют соотношению*

$$2 \sum_{j=1}^{\dim(\alpha_i)} (\alpha_i)_j \leqslant 1 \quad \text{для всех } i \in \{1, \ldots, k\}.$$

Далее для каждого мультииндекса α_i *определим интеграл вида*

$$\mathrm{H}_{\alpha_i}^{\Lambda}(G)(x) = \left(\prod_{j=1}^{2\dim(\alpha_i)} \int_{\mathrm{S}^1} \frac{\mathrm{d}\sigma(\widehat{x}_j)}{2\pi} \right) G\left(x + \Lambda^{-1} \sum_{m=1}^{\dim(\alpha_i)} \left(\widehat{x}_{2m} + \widehat{x}_{2m-1}\right)(\alpha_i)_m \right)$$

и набор положительных чисел $\{\kappa_i\}_{i=1}^{k}$, *таких что* $\kappa_1 + \ldots + \kappa_k = 1$. *Тогда функция*

$$\sum_{i=1}^{k} \kappa_i \mathrm{H}_{\alpha_i}^{\Lambda}(G)(x)$$

имеет деформацию $G^{\Lambda,\mathbf{f}}(x)$ *вида* (1), *и деформирующая функция* $\mathbf{f}(\cdot)$ *выписывается в виде*

$$\mathbf{f}(s) = \begin{cases} 4\pi \sum_{i=1}^{k} \kappa_i \mathrm{H}_{\alpha_i}^{1}(G)(\sqrt{s}\widehat{x}), & \text{для } s \leqslant 1; \\ 0, & \text{для } s > 1. \end{cases} \tag{6}$$

В то же время обобщение на двумерный случай допускает и лемма 4 из [15], которая содержит построение функции, удовлеворяющей условию допустимости в строгой формулировке, то есть со знаком $>$ вместо $\geqslant$, а также представимой с использованием набора операторов усреднения.

Лемма 2. *В условиях леммы* 1 *рассмотрим предельный случай* $k \to +\infty$, *а также выберем* $\dim \alpha_i = 1$ *и* $(\alpha_i)_1 = 1/2$ *для всех значений* i. *Далее обозначим через* $\mathbf{f}_s(\cdot)$ *деформирующую функцию* (6), *отвечающую выбранному частному случаю, и введем два набора положительных чисел* $\{\varkappa_i\}_{i=1}^{+\infty}$ *и* $\{r_i\}_{i=1}^{+\infty}$, *удовлетворяющих следующим условиям*

$$\sum_{i=1}^{+\infty} \varkappa_i = 1, \quad \lim_{i \to +\infty} (r_i) = 0, \quad \sum_{i=1}^{+\infty} \varkappa_i r_i^{-2} < +\infty.$$

Пусть $r=\max_{i\geqslant 1}(r_i)$. *Затем каждому* r_i *сопоставим деформированное фундаментальное решение* $G^{\Lambda/r_i,\mathbf{f}_s}$. *Тогда функция*

$$\sum_{i=1}^{+\infty}\varkappa_i G^{\Lambda/r_i,\mathbf{f}_s}$$

является деформацией $G^{\Lambda/r,\mathbf{f}}$ *вида* (1), *а соответствующая деформирующая функция* $\mathbf{f}(\cdot)$ *решает неравенство* (5) *в строгой формулировке.*

В качестве примера можно привести явный вид для некоторого конкретного случая. К примеру, рассмотрим в условиях леммы 1 ситуацию $k=1$, $\dim(\alpha_1)=1$ и $(\alpha_1)_1=1/2$. Тогда функция

$$G^{1,\widehat{\mathbf{f}}}(x)=\int\limits_{\mathrm{S}^1}\frac{\mathrm{d}\sigma(\widehat{x}_1)}{2\pi}\int\limits_{\mathrm{S}^1}\frac{\mathrm{d}\sigma(\widehat{x}_2)}{2\pi}\,G\Big(x+\big(\widehat{x}_1+\widehat{x}_2\big)/2\Big)$$

считается явно. Действительно, применяя оператор $A(x)$ и пользуясь равенством из [15], получаем

$$A(x)G^{1,\widehat{\mathbf{f}}}(x)=\frac{1}{\pi^2}\begin{cases}|x|^{-1}\big(1-|x|^2\big)^{-1/2}, & \text{для } |x|\leqslant 1;\\ 0, & \text{для } |x|>1.\end{cases}\tag{7}$$

Далее, учитывая сферическую симметрию, оператор Лапласа можно представить в виде $A(x)\to -|x|^{-1}\partial_{|x|}|x|\partial_{|x|}$. Затем, интегрируя с учетом условий сшивания, деформирующая функция выписывается в виде

$$\widehat{\mathbf{f}}(t)=\frac{4}{\pi}\int\limits_{\sqrt{t}}^{1}\mathrm{d}r\,\frac{\arcsin(r)}{r}$$

для $t\leqslant 1$, и $\widehat{\mathbf{f}}(t)=0$ для $t>1$. В качестве дополнительной проверки можно рассмотреть выполнимость неравенства (5), которое следует из цепочки равенств

$$\frac{s^2}{2}\int\limits_0^1\mathrm{d}t\,tJ_0(st)\widehat{\mathbf{f}}(t^2)=\frac{2s}{\pi}\int\limits_0^1\mathrm{d}t\,\arcsin(t)J_1(st)=\Big(J_0(s/2)\Big)^2-J_0(s).$$

Регуляризация с двойным усреднением может успешно применяться в теориях, в которых вершины не содержат производных. В качестве примера таких теорий можно привести суперперенормируемые скалярные теории ϕ^4 и ϕ^6. В других теориях такая регуляризация может оказаться недостаточной. Действительно, если в диаграмме появляется комбинация вида $A(x)G^{\Lambda,\widehat{\mathbf{f}}}(x)$, то в точке $x=0$ очевидным образом согласно формуле (7) появляется расходимость. В этом случае следует использовать большее количество усреднений. Рассмотрим для примера частный случай из леммы 2 с параметрами

$$k=1,\quad n\in\mathbb{N},\quad \dim(\alpha_1)=n,\quad (\alpha_1)_i=1/(2n)$$

для всех $i\in\{1,\ldots,n\}$. Тогда справедливо представление

$$A(x)\mathrm{H}^{\Lambda}_{\alpha_1}(G)(x)=\frac{1}{4\pi^2}\int\limits_{\mathbb{R}^2}\mathrm{d}^2y\,e^{i(x,y)}\Big(J_0\big(|y|/(2n\Lambda)\big)\Big)^{2n},$$

где были использованы формулы из (4). В частности, при $x=0$ получаем интеграл

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{+\infty}\mathrm{d}r\,r\Big(J_0\big(r/(2n\Lambda)\big)\Big)^{2n}=\frac{2n^2\Lambda^2}{\pi}\int\limits_0^{+\infty}\mathrm{d}r\,r\Big(J_0\big(r\big)\Big)^{2n},$$

который сходится при $n>2$. Таким образом, появление в вершинах производных приводит к необходимости применять «более сильную» регуляризацию.

§4. Нелинейная σ-модель

Рассмотрим применение регуляризации на примере двухпетлевого вклада в двумерной нелинейной σ-модели, классическое действие для которой будем обозначать $S_{\mathrm{cl}}[\,\cdot\,]$. Ранее похожая задача уже изучалась [8, 24], однако сама регуляризация вводилась «наивным» способом без учета связи квантового уравнения движения и квантового действия. Дело в том, что до введения регуляризации уравнение движения является вариационной производной эффективного действия по фоновому полю. Такую связь можно сохранить и после введения регуляризации. Действительно, после применения метода фонового поля, см. [29–33], квантовое действие становится функционалом, зависящим от вещественного фонового поля B^a_μ, а квадратичая форма, при помощи которой производится функциональное интегрирование, приобретает вид

$$\frac{1}{2}\int\limits_{\mathbb{R}^2}\mathrm{d}^2x\,\phi(x)^aA^{ab}(x)\phi^b(x), \tag{8}$$

где $\phi^a(\cdot)$ – флуктуация, и оператор Лапласа определяется формулой

$$A^{ab}(x) = A(x)\delta^{ab}/2 + f^{acb}B^c_\mu(x)\partial_{x_\mu}/2.$$

Здесь f^{abc} – полностью антисимметричные вещественные структурные константы для алгебры Ли $\mathfrak{su}(n)$, $\mu = 1, 2$, $a, b, c \in \{1, \ldots, \dim \mathfrak{su}(n)\}$. Классическое действие как функция фонового поля выписывается в виде

$$S_{\mathrm{cl}}[B] = \int\limits_{\mathbb{R}^2} \mathrm{d}^2x\, B^a_\mu(x)B^a_\mu(x).$$

Можно проверить, что если вводить регуляризацию путем деформации свободного оператора Лапласа $A(x) \to A^\Lambda(x)$, то желаемая связь сохранится. В данной работе используется деформация такого вида, что функция Грина преобразуется по закону (1). С учетом вышеизложенных предположений, эффективное действие допускает представление

$$W_{\mathrm{eff}}[B,\Lambda] = \frac{S_{\mathrm{cl}}[B]}{4\gamma^2} + W_1[B,\Lambda] + \gamma^2 W_2[B,\Lambda] + \mathcal{O}\big(\gamma^4\big),$$

где γ – константа связи. Известно, см. результаты [8, 23, 24] с учетом пертурбативной формулы для детерминанта по степеням потенциала, что $W_1[B,\Lambda]$ имеет логарифмическую сингулярность вида

$$-c_2 S_{\mathrm{cl}}[B]\ln(\Lambda/\sigma)/(16\pi),$$

где константа c_2 следует из нормировки $f^{abc}f^{abe} = c_2\delta^{ce}$.

Далее заметим, что в качестве оператора Лапласа в (8) можно брать симметризованную версию, то есть

$$A^{ab}(x) \to \widehat{A}^{ab}(x) = A^\Lambda(x)\delta^{ab}/2 + f^{acb}B^c_\mu(x)\partial_{x_\mu}/4 + \partial_{x_\mu}f^{acb}B^c_\mu(x)/4,$$

так как $\phi(x)^a f^{acb}\phi^b(x) = 0$. Именно для такого оператора и будет строиться пертурбативное разложение для функции Грина. Обозначим для удобства

$$V^{ab}(x) = f^{acb}B^c_\mu(x)\partial_{x_\mu}/2 + \partial_{x_\mu}f^{acb}B^c_\mu(x)/2.$$

Тогда, пользуясь формальным применением второго резольвентного тождества, функция Грина для регуляризованного оператора может быть выписана в виде

$$\frac{1}{2}G^{ab}_\Lambda(x,y) = G^{\Lambda,\mathbf{f}}(x-y)\delta^{ab} + \sum_{k=1}^{3}\eta^{ab}_k(x,y),$$

где

$$\eta_1^{ab}(x,y) = -\int\limits_{\mathbb{R}^2} \mathrm{d}^2x_1\, G^{\Lambda,\mathbf{f}}(x-x_1)V^{ab}(x_1)G^{\Lambda,\mathbf{f}}(x_1-y),$$

$$\eta_2^{ab}(x,y) = \int\limits_{\mathbb{R}^{2\times 2}} \mathrm{d}^2x_1\mathrm{d}^2x_2\, G^{\Lambda,\mathbf{f}}(x-x_1)V^{ac}(x_1) \times G^{\Lambda,\mathbf{f}}(x_1-x_2)V^{cb}(x_2)G^{\Lambda,\mathbf{f}}(x_2-y),$$

$$\eta_3^{ab}(x,y) = \sum_{k=3}^{+\infty}(-1)^k \int\limits_{\mathbb{R}^{2\times k}} \mathrm{d}^2x_1\ldots\mathrm{d}^2x_k\, G^{\Lambda,\mathbf{f}}(x-x_1) \times V^{ac_1}(x_1)G^{\Lambda,\mathbf{f}}(x_1-x_2)\cdot\ldots\cdot V^{c_{k-1}b}(x_k)G^{\Lambda,\mathbf{f}}(x_k-y).$$

Такое представление является не только формальным разложением по степеням потенциала, но и показывает гладкость составляющих компонент. Ясно, что с ростом индекса гладкость функций увеличивается. Выпишем ряд очевидных соотношений, которые следуют из построения и свойств (2) для регуляризующей функции $\mathbf{f}(\cdot)$

$$\Big(\widehat{A}^{ac}(x)\big|_{\mathrm{reg.}}\Big)G_\Lambda^{cb}(x,y) = G_\Lambda^{ac}(x,y)\Big(\widehat{A}^{cb}(y)\big|_{\mathrm{reg.}}\Big) = \delta^{ab}\delta(x-y),$$

$$G_\Lambda^{ab}(x,y) = G_\Lambda^{ba}(y,x),$$

$$V^{aa}(x)=0,\ \ \eta_1^{aa}(x,y)=0, \tag{9}$$

$$V^{ac}(x)\eta_2^{cb}(x,y) + \Big(A(x)\delta^{ac}+V^{ac}(x)\Big)\eta_3^{cb}(x,y) \xrightarrow{\Lambda\to+\infty} 0, \tag{10}$$

$$A(x)G^{\Lambda,\mathbf{f}}(x-y)\Big|_{y=x} = \frac{\Lambda^2}{4\pi}\Big(A(x)\mathbf{f}\big(|x|^2\big)\Big)\Big|_{x=0} \equiv \frac{\Lambda^2\alpha_1(\mathbf{f})}{4\pi}. \tag{11}$$

Ясно, что часть равенств нужно понимать в смысле обобщенных функций на $S(\mathbb{R}^2)$. Далее введем два вспомогательных сингулярных интеграла

$$\mathrm{I}_1 = \int\limits_{\mathrm{B}_{1/\sigma}} \mathrm{d}^2x\,\Big(\partial_{x_\mu}G^{\Lambda,\mathbf{f}}(x)\Big)\Big(\partial_{x^\mu}G^{\Lambda,\mathbf{f}}(x)\Big)G^{\Lambda,\mathbf{f}}(x),$$

$$\mathrm{I}_2 = \int\limits_{\mathrm{B}_{1/\sigma}} \mathrm{d}^2x\,\Big(\partial_{x_\mu}G^{\Lambda,\mathbf{f}}(x)\Big)\Big(\partial_{x^\mu}G^{\Lambda,\mathbf{f}}(x)\Big).$$

Прямой подстановкой представления (1) можно убедиться в следующих равенствах

$$\mathrm{I}_1 \overset{\text{s.p.}}{=} \frac{1}{8\pi^2}\left(L^2 + L\int\limits_0^1 \mathrm{d}s\, s\Big(\mathbf{f}'(s)\Big)^2\right) \equiv \frac{L^2 + L\alpha_2(\mathbf{f})}{8\pi^2},$$
$$\mathrm{I}_2 \overset{\text{s.p.}}{=} \frac{L}{2\pi} \overset{\text{s.p.}}{=} G^{\Lambda,\mathbf{f}}(0),$$

где $L = \ln(\Lambda/\sigma)$, и знак $\overset{\text{s.p.}}{=}$ показывает равенство сингулярных составляющих. Обратим внимание, что в рамках данной секции фиксированный параметр σ не обязательно должен быть равен единице, поэтому предполагаем лишь $\sigma > 0$. Это связано с тем фактом, что нелокальные и гладкие составляющие функции Грина не дают вклада в окончательный ответ.

Как известно, двухпетлевая поправка к классическому действию в нелинейной сигма-модели состоит из девяти диаграмм, см. рисунки 2 и 3 в работе [8], которые ранее были изучены для широкого класса регуляризаций, включающего также и размерную. Деформация, представленная в данной работе не полностью вписывается в критерии такого класса. В связи с этим для начала покажем, что к восьми из девяти диаграмм можно применить полученные результаты, а одну следует все же пересчитать. Для этого обратим внимание на следующую цепочку равенств

$$\partial_{x_\nu}\left(\eta_1^{ab}(x,y) - \frac{(x-y)^\mu}{4}f^{acb}\big(B_\mu^c(x) + B_\mu^c(y)\big)G^{\Lambda,\mathbf{f}}(x-y)\right)\bigg|_{y=x}$$
$$= \int\limits_{\mathbb{R}^2}\mathrm{d}^2z\,\Big(\partial_{z_\nu}G^{\Lambda,\mathbf{f}}(x-z)\Big)V^{ab}(z)G^{\Lambda,\mathbf{f}}(z-x)$$
$$-\frac{1}{2}f^{acb}B_\nu^c(x)G^{\Lambda,\mathbf{f}}(0) \overset{\text{s.p.}}{=} \frac{1}{2}f^{acb}B_\nu^c(x)\Big(\mathrm{I}_2 - G^{\Lambda,\mathbf{f}}(0)\Big) \overset{\text{s.p.}}{=} 0.$$

Следовательно, если при построении двухпетлевой диаграммы участвуют только функции Грина без производных и/или с одной производной, то около диагонали может быть использовано разложение вида

$$G_\Lambda^{ab}(x,y) = 2G^{\Lambda,\mathbf{f}}(x-y)a_0^{ab}(x,y) + 2PS_\Lambda^{ab}(x,y),$$

где $a_0^{ab}(x,y)$ – упорядоченная операторная экспонента, которая решает задачу

$$(x-y)^\mu\big(\partial_{x^\mu}\delta^{ab}-f^{aeb}B_\mu^e(x)/2\big)a_0^{bc}(x,y)=0,\ \ a_0^{bc}(x,x)=1.$$

Именно такого разложения достаточно для подсчета сингулярных составляющих во всех диаграммах на рис. 2 из [8], а также в первой и третьей диаграммах на рис. 3. Следовательно, промежуточный ответ может быть выписан в виде

$$W_2[B,\Lambda]\overset{\text{s.p.}}{=}\frac{c_2^2S_{\text{cl}}[B]}{32}\Big(-2\mathrm{I}_1+\big(G^{\Lambda,\mathbf{f}}(0)\big)^2\Big)+\frac{d(\Lambda)}{48},$$

где оставшаяся девятая диаграмма имеет следующее представление

$$d(\Lambda)=\int\limits_{\mathbb{R}^2}\mathrm{d}^2x\,\bigg(f^{gbd}f^{cba}G_\Lambda^{ga}(x,x)\Big(\partial_{x_\mu}\big(\partial_{y^\mu}\delta^{dh}\\ -f^{deh}B_\mu^e(y)\big)G_\Lambda^{hc}(y,x)\Big)\Big|_{y=x}-\kappa\bigg),\quad(12)$$

в котором константа κ не зависит от фонового поля и равна

$$\kappa=-\frac{\Lambda^2c_2\alpha_1(\mathbf{f})}{\pi}G^{\Lambda,\mathbf{f}}(0)\dim(\mathfrak{su}(\mathfrak{n})).$$

Вычислим сингулярную составляющую для последнего интеграла. Для этого заметим, что функцию Грина на диагонали можно представить в виде

$$G_\Lambda^{ga}(x,x)=2\delta^{ga}G^{\Lambda,\mathbf{f}}(0)+\rho^{ga}(x).$$

При этом симметричная по индексам функция $\rho^{ga}(x)$ и ее первая производная являются конечными и не содержат сингулярных составляющих. Следовательно, интегрируя по частям в (12) и пользуясь симметричностью функций, получим представление вида

$$d(\Lambda)\overset{\text{s.p.}}{=}\int\limits_{\mathbb{R}^2}\mathrm{d}^2x\,\bigg(f^{gbd}f^{cba}G_\Lambda^{ga}(x,x)\Big(2\widehat{A}^{dh}(y)G_\Lambda^{hc}(y,x)\Big)\Big|_{y=x}-\kappa\bigg)\\ \overset{\text{s.p.}}{=}-2c_2G^{\Lambda,\mathbf{f}}(0)\int\limits_{\mathbb{R}^2}\mathrm{d}^2x\,\Big(\widehat{A}^{ch}(y)\big(G_\Lambda^{hc}(y,x)-2\delta^{hc}G^{\Lambda,\mathbf{f}}(y-x)\big)\Big)\Big|_{y=x}\\ -\frac{c_2\Lambda^2\alpha_1(\mathbf{f})}{2\pi}\int\limits_{\mathbb{R}^2}\mathrm{d}^2x\,\rho^{aa}(x),$$

где дополнительно были использованы соотношения

$$f^{gbd}f^{cba}\partial_{x_\mu}\rho^{ga}(x)f^{dec}=0,$$
$$f^{gbd}f^{cba}G_\Lambda^{ga}(x,x)f^{deh}G_\Lambda^{hc}(x,x)\overset{\text{s.p.}}{=}0.$$

Далее, применяя равенства (9), (10) и (11), получаем

$$\begin{aligned}\Big(\widehat{A}^{ch}(y)\big(G_\Lambda^{hc}(y,x)-2\delta^{hc}G^{\Lambda,\mathbf{f}}(y-x)\big)\Big)\Big|_{y=x}&\\ =\Big(V^{ab}(y)\eta_1^{ba}(y,x)+A(y)\eta_2^{aa}(y,x)\Big)\Big|_{y=x}+o(1)&\\ =\frac{3c_2}{8\pi}B_\mu^a(x)B_\mu^a(x)\alpha_3(\mathbf{f})+o(1),&\end{aligned}$$

где

$$\alpha_3(\mathbf{f})=\frac{4\pi}{3}\int\limits_{\mathbb{R}^{2\times2}}\mathrm{d}^2x\mathrm{d}^2y\,\big(\omega(x)-\delta(x)\big)G^{1,\mathbf{f}}(x-y)\omega(y),$$
$$\omega(x)=-\partial_{x_\mu}\partial_{x^\mu}G^{1,\mathbf{f}}(x).$$

Заметим, что функция $\omega(x)$ сферически симметричная и имеет носитель в шаре с центром в начале координат и радиусом один. Таким образом, собирая все промежуточные вычисления, ответы для оставшейся диаграммы и двухпетлевого вклада можно выписать в виде

$$d(\Lambda)\overset{\text{s.p.}}{=}-\frac{3c_2^2\alpha_3(\mathbf{f})L}{8\pi^2}S_{\mathrm{cl}}[B]-\frac{c_2\Lambda^2\alpha_2(\mathbf{f})}{2\pi}\int\limits_{\mathbb{R}^2}\mathrm{d}^2x\,\rho^{aa}(x),$$

$$W_2[B,\Lambda]\overset{\text{s.p.}}{=}\frac{c_2^2S_{\mathrm{cl}}[B]L}{2^7\pi^2}\Big(\mathbf{f}(0)-\alpha_2(\mathbf{f})-\alpha_3(\mathbf{f})\Big)-\frac{c_2\Lambda^2\alpha_1(\mathbf{f})}{96\pi}\int\limits_{\mathbb{R}^2}\mathrm{d}^2x\,\rho^{aa}(x).$$

Первое слагаемое $W_2[B,\Lambda]$ пропорционально классическому действию и может быть сокращено перенормировкой константы связи. Второе слагаемое является регуляризованным следом функции Грина. Такое слагаемое можно убрать добавлением в функциональный интеграл экспоненты вида

$$\exp\bigg(-\frac{\delta m}{2}\int\limits_{\mathbb{R}^2}\mathrm{d}^2x\,\phi^a(x)\phi^a(x)\bigg),\quad \delta m=\frac{c_2\Lambda^2\alpha_1(\mathbf{f})}{48\pi},$$

то есть путем введения массового параметра δm и вершины с двумя внешними линиями. Заметим, что $\alpha_1(\mathbf{f})>0$ из-за условия (3).

§5. Заключение

В работе была рассмотрена регуляризация обрезанием в координатном представлении в двумерном евклидовом пространстве. Было представлено условие применимости, а также показано, что можно подобрать такую деформацию фундаментального решения, чтобы условие выполнялось, в том числе и в строгой формулировке. На примере двумерной нелинейной сигма-модели был вычислен сингулярный вклад в двухпетлевой поправке квантового действия. В статье также обсуждаются перенормировка массового параметра и отсутствие «дополнительных» логарифмических сингулярностей на этапе деформации функции Грина.

В качестве актуальной задачи можно упомянуть вычисление сингулярной части в трехпетлевом слагаемом. В частности, это интересно по той причине, что можно будет более детально проследить за дальнейшей перенормировкой (или же ее отсутствием) массового параметра.

В секции 2 были представлены две причины, аргументирующие отсутствие слагаемого $L\mathbf{f}_1(\cdot)$, то есть деформации более общего типа. Если же в качестве примера рассмотреть не сигма-модель, а какую-нибудь скалярную теорию, вершины в которой не содержат производных, то второй аргумент (основной) перестанет быть актуальным. Это приводит к необходимости искать другие ограничения на вид слагаемого с $L\mathbf{f}_1(\cdot)$. Действительно, ведь в противном случае функцию можно выбрать в таком виде, что $\mathbf{f}_1(0) = -1$, и деформированное фундаментальное решение на диагонали будет конечным. Вероятно, общим ограничивающим условием является именно условие применимости, см. (3) и (5). В связи с этим было бы интересно изучить свойства функции

$$\int\limits_0^1 \mathrm{d}t\, t J_0(st)\mathbf{f}_1(t^2)$$

при $s \geqslant 0$ с учетом ограничений на $\mathbf{f}_1(\cdot)$, описанных выше. В частности, интересна ее знакоопределенность, ведь если она меняет знак, то можно подобрать такие s и N, что для всех $\Lambda > N$ условие будет нарушаться.

Автор выражает благодарность Н. В. Харук и А. Г. Пронько за полезные комментарии.

Список литературы

1. M. E. Peskin, D. V. Schroeder, *An Introduction to Quantum Field Theory*, Addison-Wesley (1995).
2. O. I. Zavialov, *Renormalized quantum field theory*, Kluwer Academic Publishers, Dodrecht, Boston (1990).
3. A. V. Ivanov, N. V. Kharuk, *Quantum equation of motion and two-loop cutoff renormalization for ϕ^3 model.* — Zap. Nauchn. Sem. POMI, **487** (2019), 151–166; J. Math. Sci. **257**, No. 4 (2021), 526–536.
4. A. V. Ivanov, N. V. Kharuk, *Two-loop Cutoff renormalization of 4-D Yang–Mills effective action.* — J. Phys. G: Nucl. Part. Phys. **48** (2020), 015002.
5. A. V. Ivanov, N. V. Kharuk, *Formula for two-loop divergent part of 4-D Yang–Mills effective action.* — Eur. Phys. J. C **82** (2022) , 997.
6. A. V. Ivanov, *Explicit Cutoff Regularization in Coordinate Representation.* — J. Phys. A: Math. Theor. **55** (2022), 495401.
7. A. V. Ivanov, N. V. Kharuk, *Three-loop divergences in effective action of 4-dimensional Yang–Mills theory with cutoff regularization:* Γ_4^2*-contribution.* — Zap. Nauchn. Sem. POMI **520** (2023), 162–188.
8. P. V. Akacevich, A. V. Ivanov, *On two-loop effective action of 2D sigma model.* — Eur. Phys. J. C **83** (2023), 653.
9. A. V. Ivanov, *Three-loop renormalization of the quantum action for a four-dimensional scalar model with quartic interaction with the usage of the background field method and a cutoff regularization*, (2024) arXiv:2402.14549 https://www.pdmi.ras.ru/preprint/2024/24-02.html
10. A. V. Ivanov, N. V. Kharuk, *Three-loop renormalization of the quantum action for a five-dimensional scalar cubic model with the usage of the background field method and a cutoff regularization*, (2024) arXiv:2404.07513 https://www.pdmi.ras.ru/preprint/2024/24-05.html
11. R. Poghossian, *Two dimensional renormalization group flows in next to leading order.* — J. High Energ. Phys. **2014** (2014), 167.
12. S. Rychkov, L. G. Vitale, *Hamiltonian truncation study of the Φ^4 theory in two dimensions.* — Phys. Rev. D **91** (2015), 085011.
13. M. Serone, G. Spada, G. Villadoro, $\lambda\phi^4$ *– Theory I: The symmetric phase beyond NNNNNNNNLO.* — J. High Energ. Phys. **2018** (2018), 148.
14. C. Delcamp, A. Tilloy, *Computing the renormalization group flow of two-dimensional ϕ^4 theory with tensor networks.* — Phys. Rev. Research **2** (2020), 033278.
15. A. V. Ivanov, *On a criterion for a cutoff regularization in the coordinate representation*, (2024),
`arXiv:2403.09218, https://www.pdmi.ras.ru/preprint/2024/24-04.html`

16. A. M. Polyakov, *Interaction of goldstone particles in two dimensions. Applications to ferromagnets and massive Yang-Mills fields.* — Phys. Lett. B, **59**, No. 1 (1975), 79–81.
17. A. A. Migdal, *Phase transitions in gauge and spin-lattice systems.* — Sov. Phys. JETP, **42**, No. 4 (1976), 743–746.
18. E. Brezin, J. Zinn-Justin, *Renormalization of the nonlinear σ model in $2+\varepsilon$ dimensions – application to the Heisenberg ferromagnets.* — Phys. Rev. Lett. **36** (1976), 691–694.
19. E. Brezin, J. Zinn-Justin, *Spontaneous breakdown of continuous symmetries near two dimensions.* — Phys. Rev. B, **14** (1976), 3110–3120.
20. E. Brezin, J. Zinn-Justin, J. C. Le Guillou, *Renormalization of the nonlinear σ model in $2+\varepsilon$ dimensions.* — Phys. Rev. D, **14**(10) (1976), 2615–2621.
21. S. Hikami, E. Brezin, *Three-loop calculations in the two-dimensional non-linear σ model.* — J. Phys. A: Math. Gen. **11** (1978), 1141.
22. D. Friedan, *Nonlinear models in $2+\varepsilon$ dimensions.* — Ann. Phys. **163** (1985), 318–419.
23. , 303–310. A. M. Polyakov, *Gauge Fields and Strings*, London, Taylor and Francis Group (1987).
24. A. A. Bagaev, *Two-loop calculations of the matrix σ-model effective action in the background field formalism.* — Theor. Math. Phys. **154**, No. 2 (2008), 303–310.
25. M. Lüscher, *Dimensional regularisation in the presence of large background fields.* — Annals Physics **142** (1982), 359–392.
26. A. V. Ivanov, N. V. Kharuk, *Special Functions for Heat Kernel Expansion.* — Eur. Phys. J. Plus **137** (2022), 1060.
27. I. M. Gel'fand, G. E. Shilov, *Generalized Functions, Volume 1: Properties and Operations*, AMS Chelsea Publishing **377** (1964).
28. E. Stein, G. Weiss, *Introduction to Fourier Analysis on Euclidean Spaces*, Princeton, NJ: Princeton University Press (1971).
29. B. S. DeWitt, *Quantum theory of gravity. 2. The manifestly covariant theory.* — Phys. Rev. **162** (1967), 1195–1239.
30. B. S. DeWitt, *Quantum theory of gravity. 3. Applications of the covariant theory.* — Phys. Rev. **162** (1967), 1239–1256.
31. G. 't Hooft, *The background field method in gauge field theories*, (Karpacz, 1975), Proceedings, Acta Universitatis Wratislaviensis, **1**, Wroclaw, 345–369 (1976)
32. L. F. Abbott, *Introduction to the background field method.* — Acta Phys. Polon. B, **13**, Nos. 1–2 (1982), 33–50.
33. I. Ya. Aref'eva, A. A. Slavnov, L. D. Faddeev, *Generating functional for the S-matrix in gauge-invariant theories.* — TMF **21**, No. 3 (1974), 311–321.

Ivanov A. V. Applicability condition of a cutoff in two-dimensional models.

The paper discusses a condition of applicability for a cutoff regularization in the coordinate representation in two-dimensional Euclidean space. Several important properties and examples are presented. Specifically, it is shown that the set of functions satisfying the condition is non-empty. Furthermore, a more stringent formulation of the condition is possible. Using the example of a two-loop quantum correction for a two-dimensional non-linear sigma model, the application of the cutoff regularization is demonstrated.

С.-Петербургское отделение
Математического института
им. В.А.Стеклова РАН,
наб. р. Фонтанки 27,
Санкт-Петербург 191023, Россия

С.-Петербургский международный
математический институт
им. Леонарда Эйлера,
Песочная наб. 10,
Санкт-Петербург 197022, Россия
E-mail: regul1@mail.ru

Поступило 14 мая 2024 г.