Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 532, 2024 г.

**А. В. Иванов**

# ЛОКАЛЬНОЕ ТЕПЛОВОЕ ЯДРО

## §1. Введение

Тепловые ядра играют важную роль в современной теоретической физике и математике, см. [1–4]. Они появляются в разнообразных областях, например, при доказательстве теоремы Атьи–Зангера–Патоди [5,6] или в процессе перенормировки квантово-полевых моделей [7–13]. Более широкий спектр их применения можно найти в работах [14, 15]. Хорошо известно, что явная формула для теплового ядра может быть найдена только в некоторых специальных случаях. Этот факт приводит к необходимости работать с асимптотическими разложениями, коэффициенты которых могут быть вычислены рекуррентно. Одно из таких разложений является ключевым объектом метода собственного времени [16, 17], который позволяет исследовать спектральные функции для эллиптических операторов, например, типа Лапласа или Дирака. К сожалению, в статьях, посвященных приложениям, граница между стандартным тепловым ядром и основной частью его асимптотического разложения стирается, поскольку их разность не влияет на окончательные ответы. Однако эти объекты отличаются существенным образом, и было бы полезно помнить об их сходствах и отличиях.

В работе рассматривается локальное тепловое ядро [18] оператора типа Лапласа (1), которое является специальной частью асимптотического разложения стандартного теплового ядра при малых значениях собственного времени. В данном случае локальность означает, что объект определен в некотором гладком открытом выпуклом (нормальная окрестность каждой из его точек) множестве $U$ гладкого риманова многообразия $\mathcal{M}$. В частности, последнее условие подразумевает, что информация об оставшейся части многообразия $\mathcal{M}\setminus U$ и

*Ключевые слова*: мировая функция Синджа, тепловое ядро, коэффициент Сили–деВитта, оператор Лапласа, риманово многообразие, асимптотика при больших временах, интеграл по траекториям.

Работа финансово поддержана Министерством науки и высшего образования РФ, грант 075-15-2022-289, и фондом развития теоретической физики и математики «БАЗИС», грант “Молодая Математика России”.

любые граничные условия не влияют на локальное тепловое ядро. Основная цель работы – обсудить такие свойства, как единственность, симметрия коэффициентов, продолжение на в окрестность диагонали $\{(x,x),\,x\in\mathcal{M}\}\subset\mathcal{M}\times\mathcal{M}$, семейство специальных функций, а также поведение при конечных и больших временах.

Статья имеет следующую структуру. В разделе 2 вводится локальное тепловое ядро и описывается его отличие от стандартного теплового ядра. Затем, в разделе 3, изучается ряд свойств, упомянутых выше, доказываются леммы и выводятся некоторые дополнительные формулы. Отметим, что некоторые из обсуждаемых свойств (первые две леммы) хорошо известны, поэтому соответствующие пояснения приведены для ясности и полноты описания. В заключении обсуждаются результаты и формулируются несколько интересных задач для дальнейших исследований.

## §2. Определения

Пусть $\mathcal{M}$ – это $d$-мерное гладкое риманово многообразие, а $\mathcal{A}$ – его атлас. Гладкость подразумевает, что многообразие также является хаусдорфовым и паракомпактным. Для наглядности будем приводить определения локальных объектов на координатной карте $(U_\alpha,\phi_\alpha)\in\mathcal{A}$. К примеру, $g^{\mu\nu}(x)$, где $\mu,\nu\in\{1,\ldots,d\}$, является метрическим тензором в точке $x$, где $\phi_\alpha^{-1}(x)=p\in U_\alpha\subset\mathcal{M}$. Конечно, последний матричнозначный оператор является симметричным и вещественнозначным. Далее введем эрмитово гладкое векторное расслоение $\mathcal{H}$ над $\mathcal{M}$ и соответствующие компоненты 1-формы связности Янга–Миллса $B_\mu(x)$. После этого определим оператор Лапласа в локальных координатах

$$A(x)=-g^{-1/2}(x)D_{x^\mu}g^{1/2}(x)g^{\mu\nu}(x)D_{x^\nu}-v(x). \tag{1}$$

Здесь $D_{x^\mu}=\partial_{x^\mu}+B_\mu(x)$ – ковариантная производная, $v(x)$ – гладкий матричнозначный эрмитов потенциал, а $g(x)$ – определитель метрического тензора. Пусть также оператор Лапласа снабжен соответствующими граничными условиями на $\mathcal{M}$, так что спектральная задача корректна, а оператор симметричен. Кроме того, будем предполагать, что операторные коэффициенты имеют ненулевой радиус сходимости ряда Тейлора в каждой точке $\mathcal{M}$. Более того, потребуем, чтобы этот радиус всегда был больше фиксированной положительной константы.

После этого можно сформулировать задачу для стандартного теплового ядра $\widehat{K}(p,q;\tau)$. Пусть $p,q\in\mathcal{M}$, $p\in U_\alpha$ и $q\in U_\beta$, $(U_\alpha,\phi_\alpha)$ и

$(U_\beta, \phi_\beta)$ из атласа $\mathcal{A}$, тогда имеем

$$\begin{cases} \big(\partial_\tau + A\big(\phi_\alpha(p)\big)\big)\widehat{K}(p,q;\tau) = 0 \ \text{ для всех } \ \tau > 0; \\ \widehat{K}(p,q;0) = g^{-1/2}\big(\phi_\alpha(p)\big)\delta(p-q); \\ \text{граничные условия.} \end{cases}$$

Из постановки задачи видно, что стандартное тепловое ядро является глобальным объектом и зависит от граничных условий. В отличие от него, основной объект статьи, локальное тепловое ядро, не наследует подобные свойства.

Для дальнейшего рассмотрения введем открытое выпуклое множество $U \subset \mathcal{M}$, которое по определению является нормальной окрестностью каждой из своих точек. Такое множество содержит единственный геодезический отрезок для любых двух точек $p, q \in U$. Согласно предложению 7 из главы 5 книги [19], каждая точка $\mathcal{M}$ имеет выпуклую окрестность, из чего следует существование заявленного множества $U$. Для наглядности будем предполагать, что множество $U \subset U_\alpha$ такое, что $\phi_\alpha(p) = x$ и $\phi_\alpha(q) = y$. Более того, потребуем, чтобы множество было столь мало, что все коэффициенты можно было бы разложить в ковариантный ряд Тейлора. Теперь введем локальное тепловое ядро $K(x, y; \tau)$, которое является решением следующей задачи

$$\begin{cases} \big(\partial_\tau + A(x)\big)K(x,y;\tau) = 0 \ \text{ для всех } \ \tau > 0; \\ K(x,y;0) = g^{-1/2}(x)\delta(x-y); \\ \text{имеет специальный вид разложения при } \ \tau \to +0. \end{cases} \tag{2}$$

Последнее условие может быть представлено в виде следующего соотношения при $\tau \to +0$

$$K(x,y;\tau) = \frac{\Delta^{1/2}(x,y)}{(4\pi\tau)^{d/2}} e^{-\sigma(x,y)/2\tau} \sum_{k=0}^{+\infty} \tau^k a_k(x,y), \tag{3}$$

где $a_k(x, y)$, $k \geqslant 0$, – коэффициенты Сили–деВитта (также Адамара, Минакшисундарама [20] и Гилки [21]), см. [1, 22]. Далее, $\sigma(x, y)$ – мировая функция Синджа [23, 24], и $\Delta(x, y)$ – детерминант Ван-Влек—Моретта [25], который определяется формулой

$$\Delta(x,y) = \big(g(x)g(y)\big)^{-1/2} \det\left(-\frac{\partial^2\sigma(x,y)}{\partial x^\mu \partial y^\nu}\right).$$

Как следует из определений, ядра можно сравнивать только в окрестности $U$ из-за локального характера второго объекта. Фактически, локальное тепловое ядро является частью стандартного теплового ядра специального вида, которая приводит к $\delta$-функции в пределе $\tau \to +0$. При этом стандартное ядро содержит дополнительную часть, которая обеспечивает выполнение граничных условий. Итак, для $p, q \in U$, упомянутых выше, можно записать соотношение

$$\lim_{\tau\to+0}\Big(\widehat{K}(\phi_\alpha^{-1}(x), \phi_\alpha^{-1}(y); \tau) - K(x, y; \tau)\Big) = 0.$$

Отметим, что в некоторых особых случаях оба ядра могут быть равны друг другу, например, для оператора $A(x) = -\partial_{x_\mu}\partial_{x^\mu}$ на $\mathbb{R}^d$. В этом случае можно выбрать только одно выпуклое множество $U = \mathbb{R}^d$.

## §3. Свойства

Большинство функций, описанных в этом разделе, имеют аргументы $x$ и $y$, такие что $\phi_\alpha^{-1}(x), \phi_\alpha^{-1}(y) \in U$. Поэтому удобно ввести в рассмотрение упрощенные обозначения

$$K(\tau) = K(x, y; \tau),\ \Delta = \Delta(x, y),\ a_k = a_k(x, y),\ D_\mu = D_{x^\mu},\ A = A(x),$$

$$\sigma = \sigma(x, y),\ \ \sigma_\mu = \partial_{x^\mu}\sigma,\ \ \sigma^\mu = \partial_{x_\mu}\sigma.$$

**3.1. Единственность и симметрия.** Асимптотическое поведение локального теплового ядра при $\tau \to +0$ является довольно сильным ограничением, которое делает решение задачи (2) в некотором смысле единственным. Действительно, после подстановки (3) в задачу получаются весьма примечательные рекуррентные соотношения [1]

$$\sigma^\mu D_\mu a_0 = 0,\ \ a_0|_{y=x} = 1,\ \ (k+1+\sigma^\mu D_\mu)a_{k+1} = -\Delta^{-1/2}A\Delta^{1/2}a_k, \quad (4)$$

где $k \geqslant 0$.

Как известно, первое уравнение для $a_0$ приводит к упорядоченной по траектории экспоненте [26], которая является гладкой по построению. Далее, уравнение для $a_1$ содержит ненулевую правую часть, которая также является гладкой. Следовательно, ответ для $a_1$ может быть представлен в виде суммы гладкой части и ядра оператора $(1+\sigma^\mu D_\mu)$ в виде

$$a_1 = (\text{гладкая часть}) + \alpha a_0 \sigma^{-1/2},$$

где $\alpha = \alpha(x, y)$ – ядро для $\sigma^\mu\partial_\mu$. В последнем вычислении было использовано равенство $\sigma_\mu\sigma^\mu = 2\sigma$, см. формулу (2.20) в [24]. Сохранив только гладкую часть, перейдем к следующему коэффициенту. Продолжение этой процедуры приводит в $k$-м порядке к соотношению вида

$$a_k = (\text{гладкая часть}) + \alpha a_0 \sigma^{-k/2},$$

и так далее. После такого наблюдения можно сформулировать следующий хорошо известный результат.

**Лемма 1.** *Решение задачи* (2) *в виде асимптотического ряда* (3) *с гладкими коэффициентами является единственным.*

Существует множество способов вычисления гладких частей, включая упрощенные частные случаи. К сожалению, это выходит за рамки нашей статьи, поэтому приведем лишь несколько ссылок на некоторые общие методы [15, 27–34]. Кроме того, отметим, что явная замкнутая формула существует только на диагонали, $y = x$, благодаря которой коэффициент Сили–деВитта $a_k|_{y=x}$ может быть представлен как конечная нелинейная комбинация потенциала, компонент 1-формы связности, метрики и их ковариантных производных.

В оставшейся части этого подраздела обсудим одно неочевидное свойство коэффициентов Сили–деВитта. Можно утверждать, что эрмитово сопряжение коэффициента приводит к перестановке аргументов. Существует два способа доказать это свойство. Первый из них [35, 36] более трудоемкий и связан с анализом внутренних функциональных свойств коэффициентов и рекуррентных соотношений из (4), в то время как второй [37] связан с анализом асимптотики для стандартного теплового ядра при $\tau \to +0$. При этом последнее доказательство было сделано только для компактных многообразий.

В действительности можно расширить второй способ на наш случай, потому что рассматривается локальное тепловое ядро на множестве $U$. Для этого необходимо сформулировать вспомогательную задачу для стандартного теплового ядра на $U$, например, в следующем виде

$$\begin{cases} \big(\partial_\tau + A(x)\big)\widehat{K}_U(x,y;\tau) = 0 \text{ для всех } x, y \in U, \text{ и } \tau > 0; \\ \widehat{K}_U(x,y;0) = g^{-1/2}(x)\delta(x-y); \\ \text{условие Дирихле на } \partial\overline{U}. \end{cases}$$

Затем, согласно результату из [37], получаем симметрию, упомянутую выше. Дополнительно следует и симметрия для локального теплового ядра, поскольку коэффициенты Сили–деВитта единственны. Итак, можно сформулировать результат.

**Лемма 2.** *При описанных выше условиях верно равенство*

$$\big(a_k(x,y)\big)^\dagger = a_k(y,x)$$

*для* $k \geqslant 0$, *и, в частности,*

$$\big(K(x,y;\tau)\big)^\dagger = K(y,x;\tau).$$

**3.2. О продолжении.** Обсудим глобальные свойства локального теплового ядра. Известно, что оно существует и единственно в некоторой небольшой выпуклой окрестности. Но что можно сказать о расширении на $\mathcal{M}$? В данном контексте следует обратить внимание на два довольно сильных ограничения. Первое связано с возможностью разложения коэффициентов оператора $A$ в ковариантный ряд Тейлора. Второе связано с необходимостью иметь единственную геодезическую в каждой окрестности для двух выбранных точек, поскольку в противном случае мировая функция Синджа теряет свою гладкость.

Рассмотрим следующую процедуру. Возьмем открытое покрытие $\mathcal{C}$ многообразия $\mathcal{M}$, в котором каждое открытое множество $V \in \mathcal{C}$ входит в некоторое множество $U_\alpha$ из атласа $(U_\alpha, \phi_\alpha) \in \mathcal{A}$, и оно настолько мало, что коэффициенты оператора $A$ можно разложить в ковариантный ряд Тейлора. Далее, определим выпуклое покрытие $\mathcal{R}$ многообразия как покрытие $\mathcal{M}$ выпуклыми открытыми множествами, такими, что

$$\text{если } V_1, V_2 \in \mathcal{R} \text{ и } V_1 \cap V_2 \neq \varnothing, \text{ тогда } V_1 \cap V_2 \text{ выпукло.}$$

После этого, используя лемму 10 из главы 5 книги [19], потребуем, чтобы покрытие $\mathcal{R}$ обладало еще одним свойством: каждый элемент $\mathcal{R}$ содержится в некотором элементе $\mathcal{C}$.

Это означает, что каждый элемент $V$ из $\mathcal{R}$ является открытым выпуклым множеством по построению и удовлетворяет двум ограничениям, упомянутым выше. Следовательно, к каждому элементу $\mathcal{R}$ можно применить лемму 1. Кроме того, лемма применима к $V_1 \cap V_2$, если $V_1, V_2 \in \mathcal{R}$ и $V_1 \cap V_2 \neq \varnothing$. Это означает, что можно перенести локальное тепловое ядро с $V_1$ на $V_2$, см. рисунок 1. Действительно, рассмотрим этот процесс подробнее, начиная с $q_1, p_1 \in V_1$ и заканчивая в $q_2, p_2 \in V_2$. Пусть соответствующие карты будут $(U_\alpha, \phi_\alpha)$ и $(U_\beta, \phi_\beta)$. Тогда определим два пути $\gamma_i : [0,1] \to V_1 \cup V_2$, $i = 1, 2$, таких, что

$$\gamma_1(0) = q_1,\ \gamma_2(0) = p_1,\ \gamma_1(1) = q_2,\ \gamma_2(1) = p_2,$$

$$\text{и существует такое } s \in [0,1] \text{ что } \gamma_i : [0,s] \to V_1 \text{ и } \gamma_i : [s,1] \to V_2.$$

Следовательно, локальное тепловое ядро переходит из окрестности $V_1$ в $V_2$, когда параметр изменяется от 0 до 1. Обратим внимание, что в точке $s$ происходит замена локальных координат.

Более того, можно перенести локальное тепловое ядро из любого $V_1 \in \mathcal{R}$ в любое другое $V_2 \in \mathcal{R}$. Для этого необходимо выбрать несколько элементов из $\mathcal{R}$, которые соединяют $V_1$ и $V_2$, и через которые можно проложить непрерывный путь. Кроме того, такие перемещения не зависят от траектории, поскольку в каждой окрестности локальное тепловое ядро единственно.

Теперь можно сформулировать следующий результат.

**Лемма 3.** *При описанных выше условиях локальное тепловое ядро является единственным на*

$$\mathfrak{R} = \bigcup_{V \in \mathcal{R}} V \times V.$$

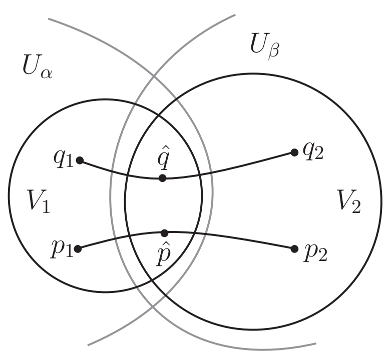


Рис. 1. Переход аргументов теплового ядра из $q_1, p_1 \in V_1 \subset U_\alpha$ в $q_2, p_2 \in V_2 \subset U_\beta$ вдоль кривых $\gamma_i : [0,1] \to V_1 \cup V_2$, $i = 1, 2$. Здесь $\widehat{q} = \gamma_1(s)$ и $\widehat{p} = \gamma_2(s)$ для некоторого $s \in [0,1]$.

Аналогичные обсуждения были описаны в недавней статье [38], посвященной мировой функции Синджа. В представленном контексте лемма 3 является расширением результата на локальное тепловое ядро. Дополнительно отметим, что $\mathfrak{R}$ на самом деле является окрестностью диагонали $\mathcal{M} \times \mathcal{M}$. Такое множество не единственно. Это означает, что можно построить другое множество $\mathcal{R}'$, удовлетворяющее упомянутым выше свойствам. В этом случае также можно получить третье множество $\mathcal{R}''$, такое, что

любое $V'' \in \mathcal{R}''$ лежит в $V \cap V'$ для некоторых $V \in \mathcal{R}$ и $V' \in \mathcal{R}'$.

Следовательно, используя уникальность, получаем, что локальное тепловое ядро имеет одинаковые значения на перекрывающихся множествах из $\mathcal{R}$ и $\mathcal{R}'$. К сожалению, после такой процедуры максимальное расстояние между $x$ и $y$ в каждом множестве уменьшается.

В заключение подраздела упомянем о двух интересных ситуациях. Первая из них – это случай компактного многообразия, который приводит к $\mathcal{R}$ с конечным числом элементов. Второй – это $\mathcal{M} = \mathbb{R}^d$ с $g^{\mu\nu}(x) = \delta^{\mu\nu}$ для всех точек. Если коэффициенты оператора имеют бесконечно большой радиус сходимости, то в этом случае можно получить набор с единственным элементом $\mathcal{R} = \{\mathcal{M}\}$.

**3.3. Специальные функции.** В данном подразделе рассмотрим семейство специальных функций, применимых для разложения локального теплового ядра. Воспользуемся обозначениями из недавней статьи [18], в которой были представлены эти функции. Далее, принимая во внимание результаты леммы 3, будем предполагать, что открытое выпуклое множество $U$ принадлежит $\mathcal{R}$. Для удобства аргументы $x, y \in U$ будем опускать, поскольку это не вызывает никакой путаницы.

Определим набор функций соотношением

$$\Psi_k = \Delta^{1/2} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-\sigma/2)^{n-k} a_n}{\Gamma(n-k+1)}, \tag{5}$$

где $k \in \mathbb{Z}$. Наше определение соответствует $\Psi_k^\omega$ с $\omega = \sigma(x, y)$ из формулы (25) в [18]. Такие функции удовлетворяют весьма примечательному соотношению, см. лемму 1 в [18],

$$A\Psi_k = (d/2 - 1 - k)\Psi_{k+1} \text{ для } k \in \mathbb{Z}, \tag{6}$$

из которого видно, что на множестве специальных функций оператор Лапласа является оператором сдвига. Далее, используя разложение экспоненты из (3) по степеням $\tau^{-k}$ и изменяя порядок суммирования, получаем следующий результат.

**Лемма 4.** *Пусть $x, y \in U \in \mathcal{R}$ из построенного выше множества. Тогда локальное тепловое ядро* (3) *имеет следующее представление* *в терминах функций* (5)

$$K(\tau)=\frac{1}{(4\pi\tau)^{d/2}}\sum_{k\in\mathbb{Z}}\tau^k\Psi_k.$$

Для дальнейшего обсуждения введем два вспомогательных объекта для четномерного случая

$$K_-(\tau)=\frac{1}{(4\pi)^{d/2}}\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{\Psi_{d/2-1-k}}{\tau^{1+k}},\quad K_+(\tau)=\frac{1}{(4\pi)^{d/2}}\sum_{k=0}^{+\infty}\tau^k\Psi_{d/2+k}.$$

Легко проверить, что обе функции удовлетворяют уравнению теплового ядра $(\partial_\tau+A)K_\pm(\tau)=0$. Это возможно благодаря наличию локальных нулевых мод $A\Psi_{d/2-1}=0$ в четномерном случае.

**Лемма 5.** *Пусть $x,y\in U\in\mathcal{R}$ из построенного выше множества, $\tau>0$, и $s\in\mathbb{R}$, такой что $\tau+s>0$. Тогда локальное тепловое ядро* (3) *имеет следующую структуру*

$$K(\tau+s)=e^{-sA}K(\tau)=e^{s\partial_\tau}K(\tau). \tag{7}$$

*Если размерность $d$ четная, тогда $K(\tau)=K_-(\tau)+K_+(\tau)$, и*

$$K_\pm(\tau+s)=e^{-sA}K_\pm(\tau)=e^{s\partial_\tau}K_\pm(\tau). \tag{8}$$

**Доказательство.** Начнем с первого соотношения из (7) в предположении $|s|<\tau$. Оно следует из прямого применения экспоненциального оператора $\exp(-sA)$ к локальному тепловому ядру с использованием соотношения (6) и следующего тождества

$$\frac{1}{\tau^k}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{\Gamma(k+n)(-s/\tau)^n}{\Gamma(k)\Gamma(n+1)}=\frac{1}{(\tau+s)^k}.$$

Последний ряд сходится, потому что $|s/\tau|<1$. Для $-k\in\mathbb{N}$ получается стандартное биномиальное разложение. Далее, случай $s>\tau$ следует из предыдущего, потому что можно выбрать такое $N\in\mathbb{N}$, что $s/N<\tau$. Тогда экспонента переписывается через произведение вида

$$e^{-sA}=\prod_{i=1}^{N}e^{-(s/N)A},$$

и предыдущая процедура может быть применена $N$ раз.

Кроме того, второе соотношение в (7) следует из замены $A$ на $-\partial_\tau$ с использованием уравнения теплопроводности из (2). Формулы из (8) могут быть получены таким же образом. $\square$

На самом деле, используя последние две леммы, можно переписать локальное тепловое ядро в более элегантной форме

$$K(\tau) = e^{-\tau A}\delta_A, \text{ где } \delta_A(x,y) = \lim_{\epsilon\to+0} K(x,y;\epsilon),$$

а также была введена регуляризация $\delta$-функции. Это означает, что можно поместить экспоненту $\exp(-\tau A)$ под знак предела и применить лемму 5.

**3.4. Интеграл по путям и зависимость от времени.** Последний подраздел посвящен обсуждению поведения при конечных и больших временах. По сравнению с асимптотикой при малых значениях $\tau \to +0$, которая фактически встроена в определение (2), форма поведения при больших значениях времени не очевидна и зависит от локальных свойств потенциалов. Действительно, в качестве примера можно рассмотреть $\mathbb{R}^d$ с $g^{\mu\nu}(x) = \delta^{\mu\nu}$ для всех значений аргумента. Построим локальное тепловое ядро для оператора $-\partial_{x_\mu}\partial_{x^\mu} - v(x)$ в двух непересекающихся открытых выпуклых множествах $V_1$ и $V_2$, в которых потенциал $v(x)$ равен константам $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ соответственно. Предположим, что $c_1 \neq c_2$, тогда получим существенно различное поведение локальных тепловых ядер

$$K(x,y;\tau) = \frac{e^{-|x-y|^2/4\tau}}{(4\pi\tau)^{d/2}} e^{c_i\tau} \text{ для } x_i, y_i \in V_i, \;\; i = 1,2.$$

Их асимптотические поведения отличаются экспоненциальным множителем. Этот простой пример показывает, что нельзя ввести единственный анзац для поведения при больших временах, не зависящий от потенциала, как это было сделано в случае малых значений (3).

Как правило, асимптотика при больших временах изучается в контексте стандартного теплового ядра, поскольку в этом случае можно пользоваться методами спектральной теории дифференциальных операторов, которая является достаточно мощным инструментом в подобном анализе. Полезно отметить два популярных способа постановки упомянутой задачи: первый [3, 39] дает оценки в терминах наименьшего собственного значения на компактных многообразиях, в то время как второй [40, 41] предлагает использовать анзац специального вида.

К сожалению, стандартные спектральные методы не работают в случае локального теплового ядра, поскольку игнорируются граничные условия и, как следствие, теряется корректно поставленная спектральная задача. Однако существует другой инструмент, интеграл по траекториям, который приводит к некоторым результатам. Далее будем пользоваться обозначениями и определениями из [15, 42–47].

Пусть $V \in \mathcal{R}$ и $(U_\alpha, \phi_\alpha) \in \mathcal{A}$ такие, что $V \in U_\alpha$. В этом случае получаем звездообразное множество $\phi_\alpha(V) = \tilde{V} \subset \mathbb{R}^d$. Как было отмечено во введении, предполагается, что $g^{\mu\nu}(x)$, $B_\mu(x)$ и $v(x)$ разложимы в сходящиеся ряды Тейлора в $\tilde{V}$. Давайте вручную расширим определения на множество $\mathbb{R}^d$ следующим образом

$$g^{\mu\nu}(x), B_\mu(x), v(x) \text{ на } \tilde{V} \to \tilde{g}^{\mu\nu}(x), \tilde{B}_\mu(x), \tilde{v}(x) \text{ на } \mathbb{R}^d,$$

таким образом, чтобы первоначальные и конечные объекты были бы равны друг другу на $\tilde{V}$. Более того, потребуем дополнительные более строгие условия: $\tilde{g}^{\mu\ nu}(x) = \delta^{\mu\nu}$, и все потенциалы можно разложить в сходящийся ряд Тейлора. Тогда, согласно теоремам 4 и 5 из [15], можно записать следующее представление для локального теплового ядра

$$K(x, y; \tau) = \frac{1}{(4\pi)^{d/2}} \int\limits_{\mathcal{W}_{y,x}} \mathcal{D}_\tau u\, e^{-S_\tau[u]} P_t \exp\left[\int\limits_0^\tau dt\, M_1(u(t))\right], \quad (9)$$

где

$$\int\limits_{\mathcal{W}_{0,0}} \mathcal{D}_\tau u\, e^{-S_\tau[u]} = \tau^{-d/2},$$

а также были использованы

$$S_\tau[u] = \frac{1}{4}\int\limits_0^\tau dt\, \dot{u}_\mu(t)\dot{u}^\mu(t), \quad M_s(u(t)) = -\dot{u}^\mu(t)\tilde{B}_\mu(u(t)) + s\tilde{v}(u(t)),$$

$\mathcal{W}_{y,x}$ – это набор непрерывных путей в $\mathbb{R}^d$ с началом в точке $y$ и концом в точке $x$, а точка $\dot{u}$ обозначает производную $du(t)/dt$. Обратим внимание, что в общем случае $M(\cdot)$ является матричнозначной функцией, из-за чего получается упорядоченная по времени экспонента $P_t$ вместо обычной.

Преобразуем представление (9), чтобы подчеркнуть его зависимость от параметра $\tau$. Во-первых, сделаем следующую замену $u(t) \to u(t) + y + t(x-y)/\tau$ и таким образом перейдем от множества $\mathcal{W}_{y,x}$ непрерывных путей к множеству $\mathcal{W}_{0,0}$ непрерывных петель. Затем выполним цепочку замен

$$t \to t\tau, \quad u(\tau t) \to \sqrt{\tau}u(t) \;\text{ и }\; \mathcal{D}_\tau u \to \mathcal{D}_1 u,$$

после чего получим еще одно представление

$$K(x,y;\tau)=\frac{e^{-|x-y|^2/4\tau}}{(4\pi\tau)^{d/2}}\int\limits_{\mathcal{W}_{0,0}}\mathcal{D}_1 u\, e^{-S_1[u]}P_t\exp\Bigg[\int\limits_0^1 dt\, M_\tau\big(\sqrt{\tau}u+y+t(x-y)\big)\Bigg].$$

Эта формула более показательна, потому что она распадается на множители. Действительно, ее первая часть совпадает с первой частью из локального теплового ядра (3), в то время как второй множитель, интеграл по траекториям, представляет собой сумму коэффициентов Сили–деВитта. В то же время вся зависимость от параметра $\tau$ включена в упорядоченную по времени экспоненту. Для простой проверки можно отметить, что

$$P_t\exp\Bigg[\int\limits_0^1 dt\, M_\tau\big(\sqrt{\tau}u+y+t(x-y)\big)\Bigg]\Bigg|_{\tau=0}=a_0(x,y).$$

Далее произведем еще одну замену вида $u(t)\to u(t)-(y-z)/\sqrt{\tau}-t(x-y)/\sqrt{\tau}$, где $z\in\mathbb{R}^d$ – это вспомогательная точка. Следовательно, получаем

$$K(x,y;\tau)=\frac{1}{(4\pi\tau)^{d/2}}\int\limits_{\mathcal{W}_{(y-z)/\sqrt{\tau},(x-z)/\sqrt{\tau}}}\mathcal{D}_1 u\, e^{-S_1[u]}P_t\exp\Bigg[\int\limits_0^1 dt\, M_\tau\big(\sqrt{\tau}u+z\big)\Bigg],$$

на основании чего можно сформулировать еще один результат.

**Лемма 6.** *Рассмотрим локальное тепловое ядро* (3) *как функцию компонент связности $\tilde{B}_\mu(\cdot)$ и потенциала $\tilde{v}(\cdot)$. Тогда, при соблюдении описанных выше условий, верно соотношение*

$$\begin{aligned}&K(x,y;\tau)\big[\tilde{B}_\mu(\cdot),\tilde{v}(\cdot)\big]=\tau^{-d/2}\\&\quad\times K\big((x-z)/\sqrt{\tau},(y-z)/\sqrt{\tau};1\big)\big[\sqrt{\tau}\tilde{B}_\mu\big(\sqrt{\tau}(\cdot)+z\big),\tau\tilde{v}\big(\sqrt{\tau}(\cdot)+z\big)\big],\end{aligned}$$

*и, в частности, когда $z=y=x$, получаем*

$$K(x,x;\tau)\big[\tilde{B}_\mu(\cdot),\tilde{v}(\cdot)\big]=\tau^{-d/2}K(0,0;1)\big[\sqrt{\tau}\tilde{B}_\mu\big(\sqrt{\tau}(\cdot)+x\big),\tau\tilde{v}\big(\sqrt{\tau}(\cdot)+x\big)\big].$$

Последняя формула имеет вполне естественную структуру и может быть получена непосредственно из формулы (3) с использованием соответствующего масштабирования координат, компонент связности и потенциала в коэффициентах Сили–деВитта. Действительно, используя структуру коэффициентов на диагонали, см. [15, 33], и их расположение, и применяя следующую цепочку замен

$$\tilde{B}_\mu(\cdot) \to \tilde{B}_\mu\big((\cdot)/\sqrt{\tau}\big)/\sqrt{\tau}, \quad \tilde{v}(\cdot) \to \tilde{v}\big((\cdot)/\sqrt{\tau}\big)/\tau, \quad x \to \sqrt{\tau}x,$$

получаем соответствующее изменение коэффициента

$$a_k(x,x) \to a_k(x,x)/\tau^k \ \text{ для } \ k \in \mathbb{N} \cup \{0\}.$$

Рассмотрим несколько простых примеров. Первый случай связан с довольно популярной наглядной ситуацией, когда функции $\tilde{B}_\mu(x) = \xi_\mu$ и $\tilde{v} = c$ на самом деле не зависят от переменных и, более того, абелевы. В этом случае получаем

$$\int_0^1 dt\, M_\tau\big(\sqrt{\tau}u + y + t(x-y)\big) = -(x-y)^\mu \xi_\mu + \tau c$$

и

$$K(x,y;\tau) = \frac{e^{-|x-y|^2/4\tau}}{(4\pi\tau)^{d/2}} e^{-(x-y)^\mu \xi_\mu + \tau c} \ \text{ для всех } \ x, y \in \mathbb{R}^d \ \text{ и } \ \tau > 0.$$

Второй пример позволяет сделать одну простую оценку. Действительно, пусть компоненты 1-формы связности равны нулю $\tilde{B}_\mu = 0$, в то время как потенциал $\tilde{v}(x)$ является скалярным и удовлетворяет неравенству $v(x) < c$ для некоторой константы $c$ и всех значений аргумента $x$. Тогда получим

$$P_t \exp\bigg[\int_0^1 dt\, M_\tau\big(\sqrt{\tau}u + y + t(x-y)\big)\bigg] < e^{\tau c}$$

и

$$K(x,y;\tau) < \frac{e^{-|x-y|^2/4\tau}}{(4\pi\tau)^{d/2}} e^{\tau c} \ \text{ для всех } \ x, y \in \mathbb{R}^d \ \text{ и } \ \tau > 0.$$

## §4. Заключение

В статье было рассмотрено локальное тепловое ядро (3), которое на самом деле является $\delta$-образующей частью стандартного теплового ядра. Были продемонстрированы отличительные особенности обоих объектов и их связь. Были выведены новые соотношения и формулы представления для локального теплового ядра, приведен ряд наглядных примеров. Также в работе обсуждались такие свойства, как глобальность, единственность и поведение асимптотики в разных областях.

Кроме того, было бы удобно дать один комментарий о продолжении локального теплового ядра. Как было показано, можно построить выпуклое покрытие, которое позволяет переносить объект из одного множества в другое. Но это покрытие не является единственным. Возникает естественный вопрос: как построить множество с наибольшими окрестностями, чтобы расширить определение локального теплового ядра $K(x, y; \tau)$ как можно дальше от диагонали $x = y$? Конечно, это новое покрытие должно быть выпуклым в соответствии с определением, сформулированным выше.

Отметим, что локальное тепловое ядро в фиксированном открытом выпуклом множестве $U$ не образует стандартную структуру $C_0$-полугруппы, поскольку

$$\int\limits_{\overline{U}} d^d z \, \sqrt{g(z)} K(x, z; \tau_1) K(z, y; \tau_2) \neq K(x, y; \tau_1 + \tau_2)$$

в общем случае для $\tau_1, \tau_2 > 0$. Это равенство содержит граничные слагаемые, которые появляются после интегрирования по частям.

Автор благодарит Н. В. Харук и Д. В. Василевича за полезные комментарии.

## Список литературы

1. B. S. DeWitt, *Dynamical Theory of Groups and Fields*, Gordon and Breach, New York (1965).
2. P. B. Gilkey, *Invariance Theory, the Heat Equation, and the Atiyah–Singer Index Theorem*, CRC Press, Boca Raton (1994).
3. N. Berline, E. Getzler, M. Vergne, *Heat Kernels and Dirac Operators*, Berlin, Springer (2004).
4. D. Fursaev, D. Vassilevich, *Operators, Geometry and Quanta: Methods of Spectral Geometry in Quantum Field Theory*, Springer Dordrecht (2011).
5. A. V. Ivanov, D. V. Vassilevich, *Atiyah–Patodi–Singer index theorem for domain walls.* — J. Phys. A: Math. Theor., **53** (2020), 305201.
6. A. V. Ivanov, *Index Theorem for Domain Walls.* — J. Phys. A: Math. Theor. **54** (2021), 095203.
7. I. Jack, H. Osborn, *Two-loop background field calculations for arbitrary background fields.* — Nucl. Phys. B, **207** (1982), 474–504.
8. J. P. Bornsen, A. E. M. van de Ven, *Three-loop Yang–Mills $\beta$-function via the covariant background field method.* — Nucl. Phys. B, **657** (2003), 257–303.

9. A. V. Ivanov, N. V. Kharuk, *Quantum equation of motion and two-loop cutoff renormalization for $\phi^3$ model.* — Zap. Nauchn. Sem. POMI, **487** (2019), 151–166; English transl., J. Math. Sci. **257**, No. 4 (2021), 526–536.
10. A. V. Ivanov, N. V. Kharuk, *Two-loop cutoff renormalization of 4-D Yang–Mills effective action.* — J. Phys. G: Nucl. Part. Phys. **48** (2020), 015002.
11. A. V. Ivanov, N. V. Kharuk, *Formula for two-loop divergent part of 4-D Yang–Mills effective action.* — Eur. Phys. J. C **82** (2022), 997.
12. P. V. Akacevich, A. V. Ivanov, *On two-loop effective action of 2D sigma model.* — Eur. Phys. J. C **83** (2023) , 653.
13. A. V. Ivanov, N. V. Kharuk, *Three-loop divergences in effective action of 4-dimensional Yang–Mills theory with cutoff regularization: $\Gamma_4^2$-contribution.* — Zap. Nauchn. Sem. POMI, **520** (2023), 162–188.
14. D. V. Vassilevich, *Heat kernel expansion: user's manual.* — Phys. Rept. **388** (2003), 279–360.
15. A. V. Ivanov, N. V. Kharuk, *Heat kernel: Proper-time method, Fock–Schwinger gauge, path integral, and Wilson line*. TMF, **205**, No. 2 (2020), 242–261; Theoret. and Math. Phys., **205**, No. 2 (2020), 1456–1472.
16. V. A. Fock, *Die Eigenzeit in der Klassischen- und in der Quanten- mechanik.* — Sow. Phys., **12 (1937)** , 404–425.
17. J. Schwinger, *On gauge invariance and vacuum polarization.* — Phys. Rev. **82** (1951) , 664–679.
18. A. V. Ivanov, N. V. Kharuk, *Special Functions for Heat Kernel Expansion.* — Eur. Phys. J. Plus **137** (2022), 1060.
19. B. O'Neill, *Semi-Riemannian Geometry With Applications to Relativity*, Academic Press (1983).
20. G. W. Gibbons, *Quantum field theory in curved spacetime*, General Relativity, An Einstein Centenary Survey, 639–679 (1979)
21. P. B. Gilkey, *The spectral geometry of a Riemannian manifold.* — J. Differ. Geom., **10** (1975), 601–618.
22. R. T. Seeley, *Complex powers of an elliptic operator.* — Singular Integrals, Proc. Sympos. Pure Math. **10** (1967), 288–307.
23. J. L. Synge, *A characteristic function in Riemannian space and its application to the solution of geodesic triangles.* — London Math. Soc. **32** (1931), 241–258.
24. J. L. Synge, *Relativity: The general theory*, North-Holland Publishing Company, Amsterdam (1960).
25. J. H. van Vleck, *The correspondence principle in the statistical interpretation of quantum mechanics.* — Proc. Nat. Acad. Sci. **14** (1928), 178–188.
26. A. V. Ivanov, N. V. Kharuk, *Ordered exponential and its features in Yang–Mills effective action.* — Commun. Theor. Phys. **75** (2023), 085202.
27. S. A. Fulling, G. Kennedy, *The resolvent parametrix of the general elliptic linear differential operator: a closed form for the intrinsic symbol.* — Amer. Math. Soc. **310** (1988), 583–617.
28. A. O. Barvinsky, G. A. Vilkovisky, *Beyond the Schwinger–DeWitt technique: converting loops into trees and in-in currents.* — Nucl. Phys. B. **282** (1987), 163–188.

29. A. O. Barvinsky, G. A. Vilkovisky, *Covariant perturbation theory (II). Second order in the curvature. General algorithms.* — Nucl. Phys. B. **333** (1990), 471–511.
30. A. O. Barvinsky, G. A. Vilkovisky, *Covariant perturbation theory (III). Spectral representations of the third-order form factors.* — Nucl. Phys. B **333** (1990), 512–524.
31. A. O. Barvinsky, Yu. V. Gusev, V. V. Zhytnikov, G. A. Vilkovisky, *Covariant Perturbation Theory (IV). Third Order in the Curvature*, Report of the University of Manitoba, Winnipeg, 1–192 (1993).
32. I. G. Avramidi, *Heat Kernel and Quantum Gravity*, New York: Springer, Vol. 64, 1–149 (2000).
33. A. V. Ivanov, *Diagram technique for the heat kernel of the covariant Laplace operator.* — TMF **198**, No. 1 (2019), 113–132; Theoret. and Math. Phys. **198**, No. 1 (2019), 100–117.
34. A. V. Ivanov, N. V. Kharuk, *Non-recursive formula for trace of heat kernel.* — International Conference on Days on Diffraction, DD 2019, 2019, pp. 74–77, 10.1109/DD46733.2019.9016557
35. V. Moretti, *Proof of the symmetry of the off-diagonal heat-kernel and Hadamard's expansion coefficients in general $C^\infty$ Riemannian manifolds.* — Comm. Math. Phys. **208**(2) (1999), 283–308.
36. V. Moretti, *Proof of the symmetry of the off-diagonal Hadamard/Seeley–DeWitt's coefficients in $C^\infty$ Lorentzian manifolds by a local Wick rotation.* — Commun. Math. Phys. **212**(1) (2000), 165–189.
37. M. Ludewig, *Strong short-time asymptotics and convolution approximation of the heat kernel.* — Ann. Glob. Anal. Geom. **55** (2019), 371–394.
38. V. Moretti, *On the global Hadamard parametrix in QFT and the signed squared geodesic distance defined in domains larger than convex normal neighbourhoods.* — Lett. Math. Phys. **111** (2021), 130.
39. A. Grigor'yan, *Estimates of heat kernels on Riemannian manifolds*, Cambridge University Press, London Mathematical Society Lecture Note Series **273**, 140–225 (1999)
40. A. O. Barvinsky, V. F. Mukhanov, *New nonlocal effective action.* — Phys. Rev. D. **66** (2002), 065007.
41. A. O. Barvinsky, Yu. V. Gusev, V. F. Mukhanov, D. V. Nesterov, *Nonperturbative late time asymptotics for the heat kernel in gravity theory.* — Phys. Rev. D *68* (2003), 105003.
42. . P. J. Daniell, *Integrals in An Infinite Number of Dimensions.* — Ann. Math. **20**, No. 4 (1919), 281–288.
43. P. Cartier, C. DeWitt–Morette, *A Rigorous Mathematical Foundation of Functional Integration.* — NATO ASI Series, **361**, Springer, Boston (1997), 1–50.
44. F. Bastianelli, P. van Nieuwenhuizen, *Path integrals and anomalies in curved space*, Cambridge Monographs on Mathematical Physics, Cambridge University Press, Cambridge (2006).
45. S. A. Franchino Vinas, P. A. G. Pisani, *Semi-transparent boundary conditions in the worldline formalism.* — J. Phys. A: Math. Theor. **44** (2011), 295401.
46. O. Corradini, C. Schubert, J. P. Edwards, N. Ahmadiniaz, *Spinning Particles in Quantum Mechanics and Quantum Field Theory*, arXiv:1512.08694v2 (2021)

47. A. V. Ivanov, *Notes on functional integration.* — Zap. Nauchn. Sem. POMI, **487** (2019), 140–150; J. Math. Sci **257**, No. 4 (2021), 518–525.

Ivanov A. V. Local heat kernel.

The paper is devoted to a local heat kernel, which is a special component of the standard heat kernel. Localization means that all considerations are performed in an open convex subset of a smooth Riemannian manifold. We discuss such properties and concepts as uniqueness, a symmetry of the Seeley–DeWitt coefficients, extension to the entire manifold, a family of special functions, and the late-time asymptotic behavior using the path integral approach.

С.-Петербургское отделение
Математического института
им. В.А.Стеклова РАН,
наб. р. Фонтанки 27,
Санкт-Петербург 191023, Россия

Поступило 15 мая 2024 г.

С.-Петербургский международный
математический институт
им. Леонарда Эйлера,
Песочная наб. 10,
Санкт-Петербург 197022, Россия

*E-mail*: regul1@mail.ru