Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 532, 2024 г.

В. Д. Волков, В. А. Стукопин

ГРУППОИД ВЕЙЛЯ И ЕГО ДЕЙСТВИЕ НА АФФИННОМ СУПЕРЯНГИАНЕ

§1. Введение

В данной работе мы рассматриваем янгиан $Y_\hbar(\widehat{sl}(m|n,\Pi))$ аффинной специальной линейной супералгебры Каца–Муди $\widehat{sl}(m|n,\Pi)$, заданный произвольной системой простых корней Π и определяем действие группоида Вейля на суперянгианах такого вида. Мы определяем коумножение на аффинном суперянгиане и показываем, что действия элементов группоида Вейля являются изоморфизмами ассоциативных супералгебр, но, вообще говоря, не изоморфизмами супералгебр Хопфа.

В работе мы используем два эквивалентных задания аффинного суперянгиана, одно в терминах новой системы образующих Дринфельда ([1, 2, 5, 8]), а второе в терминах мимнималистской системы образующих ([5, 6, 8, 11]), приводим явный вид изоморфизма между этими реализациями (см. [11]). Мы рассматриваем группоид Вейля ([11, 15, 20,22]), который действует изоморфизмами в категории суперянгианов $Y_\hbar(\widehat{sl}(m|n,\Pi))$ (со структурой ассоциативной супералгебры (см. [11])) аффинных специальных линейных супералгебр Каца–Муди $\widehat{sl}(m|n,\Pi)$, определяемых системами простых корней Π. Мы исследуем связь этого действия со структурами супералгебр Хопфа. Мы определяем действие группоида Вейля на суперянгианах в минималистской реализации, подразумевая, что на суперянгианы Дринфельда это действие переносится при помощи упомянутого выше изоморфизма.

Следует отметить, что конструкция янгиана общей линейной алгебры Ли в так называемой реализации Фаддеева–Решетихина–Тахтаджяна появилась в связи с применением алгебраического анзатца Бете для изучения квантовых интегрируемых моделей с квантовой рациональной R-матрицей до появления самого термина “янгиан” (см. для

Ключевые слова: Янгиан аффинной супералгебры Каца–Муди, группоид Вейля, квантовая группа Вейля, супералгебра Каца–Муди–Ли.

Работа выполнена в центре фундаментальной математики МФТИ, проект FSMG-2023-0013. Данная работа поддержана грантом РНФ 23-21-00282.

ссылок [1, 7, 19]). Само определение янгиана было дано В. Г. Дринфельдом, это был один из наиболее важных для приложений примеров квантовых групп. Дринфельд определил янгиан конечномерной простой алгебры Ли как квантование (или плоская деформация) биалгебры Ли полиномиальных токов $\mathfrak{g}[z]$ ([7]) и, в частности, таким образом дал объяснение алгебраической природы рациональных решений квантового уравнения Янга–Бакстера. В. Г. Дринфельд дал три реализации (представления) янгиана и доказал их эквивалентность. Одна из этих реализаций называется дринфельдовской реализацией (или новой реализацией Дринфельда) и задается образующими $\{h_{i,r}, x_{i,r}^{\pm} | r \in \mathbb{Z}_{\geqslant 0}\}$, причем эти образующие в случае, когда второй индекс равен нулю совпадают с образующими Шевалле $\{h_i, x_i^{\pm}\}$ алгебры Ли $\mathfrak{g}$. Отметим, что янгиан является алгеброй Хопфа и наделен коумножением. Правда в реализации Дринфельда неизвестны явные формулы для коумножения для всех образующих в общем случае. Определение янгиана в реализации Дринфельда естественно может быть распространено на случай когда $\mathfrak{g}$ является как супералгеброй Ли ([8, 16, 17]), так и аффинной алгеброй Каца–Муди (с симметризуемой матрицей Картана) ([3–5]). Это обобщение для аффинных алгебр впервые было сделано С. Левендорским и С. Боярченко в частном случае аффинной алгебры Каца–Мули типа $A_1^{(1)}$ ([3]), а также в общем случае аффинной алгебры типа $A_n^{(1)}$ $(n > 1)$ Н. Гуэем (см., например, [4]). Определение структуры хопфовой алгебры на аффинном янгиане является более сложной задачей, но эта задача относительно недавно была решена в работе Н. Гуэя, Х. Накаджимы и К. Вендландта (см. [5]). Известно, что янгианы тесно связаны с W-алгебрами. В случае супералгебры Ли $sl(m|n)$ также известно определение янгиана, как в представлении Дринфельда, так и в так называемом представление Решетихина–Тахтаджяна–Фаддева (РТФ представлении). Связь между янгианами и W-алгебрами также изучалась в случае янгианов конечномерных супералгебр Ли. В последнее время стали рассматриваться также колчанные реализации аффинных янгианов ([12, 13]), восходящие к фундаментальной работе [14].

В статье Р. Габердиэля, В. Ли, К. Пэна и Х. Чжана [21] был определен янгиан $Y(\widehat{gl}(1|1))$ для аффинной супералгебры Ли $\widehat{gl}(1|1)$. Также, недавно М. Уэда рассмотрел аффинный суперянгиан $Y(\widehat{sl}(m|n))$ для выделенной системы простых корней (содержащей минимально возможное число нечетных корней) ([24]).

Следует сказать о том, что базисная супералгебра Ли, в отличие от простой алгебры Ли, может быть задана разными диаграммами Дынкина, что объясняется тем, что она имеет разные неэквивалентные системы простых корней (или, что то же самое, имеет несопряженные борелевские подалгебры). В данной работе мы рассматриваем аффинный суперянгиан $Y_\hbar(\widehat{sl}(m|n,\Pi))$ для произвольной системы простых корней Π (или расширенной системы аффинных корней $\widetilde{\Pi}$) и задаем действие группоида Вейля на суперянгианах (см. также [11]).

В работе [11] показано, что для любых двух различных систем аффинных простых корней $\widetilde{\Pi}_1$ и $\widetilde{\Pi}_2$ соответствующие аффинные суперянгианы $Y_\hbar(\widetilde{sl}(m|n,\Pi_1))$ и $Y_\hbar(\widetilde{sl}(m|n,\Pi_2))$ изоморфны. Но изоморфизм в категории супералгебр Хопфа должен индуцировать изоморфизм суперянгианов борелевскх подалгебр, что в случае суперянгианов не всегда имеет место. Используя этот утверждение мы исследуем в данной работе структуры супералгебр Хопфа на аффинном суперянгиане.

В основе нашего исследования, как отмечено выше, лежит построение действие группоида Вейля на суперянгианах (см. также [11, 15, 22]), порожденного суперотражениями весовой решетки относительно простых корней. Суперотражения и индуцируют упомянутые выше изоморфизмы. Мы рассматриваем два представления аффинного суперянгиана, а именно так называемое минималистическое представление (в случае янгиана такое представление было введено С. Левендорским [6], в суперслучае рассмотрено в [8]) и новую реализацию Дринфельда ([1, 2, 7]), которая для суперянгианов рассмотрена в работе [8] (см. также [16–18, 22]).

Как уже отмечено выше, в данной работе мы рассматриваем конструкцию коумножения в суперянгиане в случае произвольной реализации аффинной супералгебры Ли типа $\widehat{sl}(m|n)$. Подчеркнем, что в случае суперянгиана не имеет места аналог теоремы В. Г. Дринфельда о единственности квантования бисупералгебры Ли полиномиальных токов (с коскобкой, определяемой рациональной r-матрицей Янга) и как следствие утверждение о единственности операции коумножения на янгиане, заданном как ассоциативная супералгебра. В суперслучае возможны различные структуры коумножения, связанные с наличием разных диаграмм Дынкина у одной и той же супералгебры Ли или с наличием несопряженных борелевских подалгебр. Другими словами, единственность квантования имеет место при фиксации треугольного разложения супералгебры Ли или диаграммы

Дынкина. Этот же эффект имеет место и для аффинных суперянгианов. Мы и в этом случае фиксируем треугольное разложение соответствующей простой супералгебры Ли, то есть реализацию $sl(m|n,\Pi)$ и описываем при этом условии коумножение на аффинном суперянгиане $Y_\hbar(\widehat{sl}(m|n,\Pi))$. Собственно, наличие этого эффекта неединственности коумножения и явилось одним из мотивов для написания данной работы. Следует сказать, что разные структуры коумножения связаны друг с другом скручиванием при помощи твистов, определяемых нечетными отражениями группоида Вейля. В данной работе мы явно не описываем эти твисты, надеясь рассмотреть этот вопрос в отдельной работе.

Мы не рассматриваем здесь и теорию представлений аффинного суперянгиана, а также зависящее от параметра коумножение на суперянгиане, аналогичное рассмотренному в работах [5, 10], для случаев янгиана специальной линейной супералгебры и аффинной алгебры Каца–Муди, что естественнее также сделать в рамках отдельной работы. Отметим, что данная работа является продолжением работы [11], на которую мы ссылаемся.

Мы будем использовать следующие обозначения. Пусть $\mathbb{C}$ – поле комплексных чисел, $\mathbb{N}$ – множество натуральных чисел, $\mathbb{Z}$ – кольцо целых чисел, $\mathbb{Z}_+$ – множество неотрицательных чисел, $\hbar$ будет всегда обозначать параметр деформации. Через $K[u]$, $K[[u]]$ будем обозначать кольцо многочленов, соответственно, формальных степенных рядов, с коэффициентами из кольца K, I – множество, индексирующее систему простых аффинных корней $\widetilde{\Pi} = \{\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_m, \ldots, \alpha_{m+n-1}\} = \Pi \bigcup \alpha_0$ аффинной супералгебры Каца-Муди типа $A^{(1)}(m-1, n-1)$. Выделенная система ее аффинных простых корней $\widetilde{\Pi}^{\mathrm{dist}} = \Pi^{\mathrm{dist}} \bigcup \alpha_0$ содержит два нечетных корня α_0, α_m.

§2. Предварительные сведения. Аффинные супералгебры Каца–Муди

В этом параграфе мы напомним основные определения теории супералгебр Ли (см. также [20]). Пусть, если не оговорено противное, $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(m|n) = A(m-1, n-1)$.

Пусть $\Pi = \Pi_e \cup \Pi_{\mathrm{odd}}$ система простых корней супералгебры Ли $sl(m|n) = sl(m|n, \Pi)$. Здесь Π_e (Π_{odd}) обозначает множество четных (нечетных) простых корней. Мы напомним определение аффинизации

$\widehat{sl}(m|n)$ супералгебры Ли $sl(m|n)$, а также определение аффинной супералгебры Ли $A^{(1)}(m-1,n-1) = sl^{(1)}(m|n)$.

Определение 1. *Пусть* $g = sl(m|n,\Pi)$. *Тогда супералгебра Ли* $\widetilde{g}$ *определяется как* $g \otimes \mathbb{C}[t^{\pm 1}] \oplus \mathbb{C}c \oplus \mathbb{C}d$ *со следующими определяющими коммутационными соотношениями:*

$$[a \otimes t^s, b \otimes t^u] = [a,b] \otimes t^{s+u} + \delta_{s+u}\kappa(a,b)c,$$

Пусть c *– центральный элемент* $\widetilde{g}$,

$$[d, a \otimes t^s] = sa \otimes t^s.$$

Мы определяем супералгебру $\widehat{g} \subset \widetilde{g}$ как $g \otimes \mathbb{C}[t^{\pm 1}] \oplus \mathbb{C}c$. Имеет место следующее представление супералгебры Ли $\widehat{sl}(m|n,\Pi)$ как супералгебры Каца–Муди.

Пусть $\widetilde{\Pi} = \Pi \cup \{\alpha_0\}$ расширенная (аффинная) система простых корней, $\widetilde{\Pi}_e$ ($\widetilde{\Pi}_{\mathrm{odd}}$) ее подмножества четных (нечетных) корней. Супералгебра Ли $\widetilde{sl}(m|n,\Pi)$ изоморфна супералгебре Ли $sl^{(1)}(m|n,\widetilde{\Pi})$ определяемой образующими $\{x_i^{\pm}, h_i, d | 0 \leqslant i \leqslant m+n-1\}$ и следующими соотношениями

$$[d,h_i] = 0, \quad [d,x_i^+] = \delta_{i0}x_i^+ \quad [d,x_i^-] = -\delta_{i0}x_i^-$$

$$\begin{gathered}[h_i,h_j] = 0, \quad [h_i,x_j^{\pm}] = \pm a_{i,j}x_j^{\pm}, \quad [x_i^+,x_j^-] = \delta_{i,j}h_i,\\ ad(x_i^{\pm})^{1+|a_{i,j}|}x_j^{\pm} = 0\end{gathered} \tag{2.1}$$

$$[x_k^{\pm}, x_k^{\pm}] = 0, \quad i \in \widetilde{\Pi}_{\mathrm{odd}}, \tag{2.2}$$

$$[[x_{k-1}^{\pm}, x_k^{\pm}], [x_k^{\pm}, x_{k+1}^{\pm}]] = 0, \quad k \in \widetilde{\Pi}_{\mathrm{odd}}. \tag{2.3}$$

Отметим, что образующие $x_m^{\pm}$ and $x_0^{\pm}$ – нечетные, а остальные образующие – четные в случае выделенной системы простых корней $\widetilde{\Pi}^{\mathrm{dist}}$.

Пусть $\widetilde{\Pi} = \{\alpha_i\}_{0\leqslant i\leqslant m+n-1}$ – множество простых корней аффинной супералгебры $\widetilde{sl}(m|n)$ и δ обозначает корень $\sum\limits_{0\leqslant i\leqslant m+n-1}\alpha_i$, а $\theta = \sum\limits_{1\leqslant i\leqslant m+n-1}\alpha_i$, так, что $\alpha_0 = \delta - \theta$. Будем обозначать через Δ (соответственно, Δ_+) множество корней (положительных) супералгебры Ли $\widetilde{sl}(m|n)$.

Рассмотрим упорядоченное множество весов супералгебры Ли $sl(m|n,\Pi)$ (см. [11,20]). Мы дополнили это множество нулевым корнем α_0, введем также корень δ, который дуален d, то есть d: $\langle\delta, d\rangle = 1$ и он биортогонален картановской подалгебре $sl(m|n,\Pi)$. Мы можем рассматривать простой корень α_i, $i=1,\ldots,m+n-1$ как разность рядом расположенных весов в соответствии с заданным порядком. Нулевой корень будет задаваться как разность $\alpha_0=\delta-\theta$ и мы его фиксируем, остальные простые корни образуют систему простых корней, которая является выделенной при определенном выше порядке весов, и переходит в другую систему простых корней при изменении упорядочения весов. Определим (симметрическую) матрицу Картана как симметрическую матрицу с матричными элементами, определяемыми формулами: $a_{i,i}=0$, если α_i нечетный корень, а остальные матричные элементы определяются следующей формулой

$$a_{ij}=2\frac{(\alpha_i,\alpha_j)}{(\alpha_i,\alpha_i)}. \tag{2.4}$$

Отметим, что матрица Картана супералгебры Ли $sl(m|n,\Pi)$ или ее аффинного аналога содержит диагональные блоки

$$\begin{pmatrix}\pm 2 & \mp 1\\ \mp 1 & \ldots\end{pmatrix} \tag{2.5}$$

для четных корней,

$$\begin{pmatrix}0 & \pm 1\\ \pm 1 & \ldots\end{pmatrix} \tag{2.6}$$

для нечетных корней.

§3. Аффинный суперянгиан

Пусть S_k – симметрическая группа и $\widehat{sl}(m|n,\Pi)$ – супералгебра Ли, определяемая неразложимой матрицей Картана $(a_{ij})_{i,j\in I}$, где I – множество вершин расширенной диаграммы Дынкина, соответствующей $\widehat{sl}(m|n,\Pi)$. Отметим, что элементы I, индексируются числами $\{0,1,\ldots,m+n-1\}$ и мы будем, не оговаривая это специально, отождествлять эти два множества, когда мы хотим зафиксировать выделенный порядок на множестве простых корней $\Pi=\Pi_e+\Pi_{\mathrm{odd}}$, где Π_e (Π_{odd}) множества четных (нечетных) простых корней. Мы положим $\{a,b\}$ как $ab+ba$.

Определим сначала суперянгиан $Y_\hbar(\widehat{sl}(m|n,\Pi))=Y_\hbar(sl^{(1)}(m|n,\widetilde{\Pi}))$ для системы простых корней $\widetilde{\Pi}$.

Определение 2. *Суперянгиан* $Y_\hbar(\widehat{sl}(m|n,\Pi)) = Y_\hbar(sl^{(1)}(m|n,\widetilde{\Pi}))$ – *это ассоциативная супералгебра с единицей над кольцом формальных степенных рядов* $\mathbb{C}[h]$, *порожденная образующими* $x^{\pm}_{i,r}$, $h_{i,r}$, *для* $i \in \{0,1,\ldots,m+n-1\}$ *и* $r \in \mathbb{Z}_{\geqslant 0}$, *которые удовлетворяют следующим определяющим соотношениям*

$$[h_{i,r}, h_{j,s}] = 0, \tag{3.1}$$

$$[h_{i,0}, x^{\pm}_{j,s}] = \pm a_{ij} x^{\pm}_{j,s}, \tag{3.2}$$

$$[x^{+}_{i,r}, x^{-}_{j,s}] = \delta_{ij} h_{i,r+s}, \tag{3.3}$$

$$[h_{i,r+1}, x^{\pm}_{j,s}] - [h_{i,r}, x^{\pm}_{j,s+1}] = \pm\frac{\hbar a_{ij}}{2}\{h_{i,r}, x^{\pm}_{j,s}\}, \tag{3.4}$$

$$[x^{\pm}_{i,r+1}, x^{\pm}_{j,s}] - [x^{\pm}_{i,r}, x^{\pm}_{j,s+1}] = \pm\frac{\hbar a_{ij}}{2}\{x^{\pm}_{i,r}, x^{\pm}_{j,s}\}, \tag{3.5}$$

$$\begin{gathered}\sum_{\sigma\in S_k}[x^{\pm}_{i,r_{\sigma(1)}}, [x^{\pm}_{i,r_{\sigma(2)}}, \ldots, [x^{\pm}_{i,r_{\sigma(k)}}, x^{\pm}_{j,s}]\ldots]] = 0,\\ \text{для} \quad i \neq j \quad \text{и} \quad k = 1 + |a_{ij}|,\end{gathered} \tag{3.6}$$

$$[x^{\pm}_{i,r}, x^{\pm}_{i,s}] = 0, \quad (\alpha_i \in \widetilde{\Pi}_{\mathrm{odd}}), \tag{3.7}$$

$$\begin{gathered}[[x^{\pm}_{i-1,0}, x^{\pm}_{i,0}], [x^{\pm}_{i,0}, x^{\pm}_{i+1,0}]] = 0,\\ (\alpha_i = \widetilde{\Pi}_{\mathrm{odd}}), (x^{\pm}_{-1,s} := x^{\pm}_{m+n-1,s}).\end{gathered} \tag{3.8}$$

Мы можем определить суперянгиан $Y_\hbar(\widehat{sl}(m|n,\Pi))$ также следующим эквивалентным образом.

Определение 3. *Суперянгиан* $Y_\hbar(\widehat{sl}(m|n,\Pi)) = Y_\hbar(sl^{(1)}(m|n,\widetilde{\Pi}))$ *это унитальная ассоциативная* $\mathbb{C}[h]$ – *супералгебра, порожденная элементами* $x^{\pm}_{i,r}$, $h_{i,r}$, *для* $i \in \{0,1,\ldots,m+n-1\}$ *и* $r \in \mathbb{Z}_{\geqslant 0}$, *удовлетворяющими соотношениям* (3.1)–(3.7) *и следующему соотношению, эквивалентному соотношению* (3.8)

$$[[x^{\pm}_{i-1,k}, x^{\pm}_{i,0}], [x^{\pm}_{i,0}, x^{\pm}_{i+1,t}]] = 0, \quad (\alpha_i \in \widetilde{\Pi}_{\mathrm{odd}}). \tag{3.9}$$

Заметим, что a_{ij}, *здесь и выше, это элементы матрицы Картана* $A = (a_{ij})_{ij\in I}$ *супералгебры Ли* $\widehat{sl}(m|n,\Pi) = sl^{(1)}(m|n,\widetilde{\Pi})$, *определяемые системой простых корней* $\widetilde{\Pi}$.

Замечание 1. Отметим, что аффинный суперянгиан является также супералгеброй Хопфа. Далее мы определим операцию коумножения на аффинном суперянгиане.

Мы также определим аффинный суперянгиан супералгебры Каца-Муди $\widetilde{sl}(m|n,\Pi)$.

Определение 4. *Предположим, что* $m,n \geqslant 2$ *and* $m \neq n$. *Пусть* $Y_\hbar(\widetilde{sl}(m|n))$ *– ассоциативная супералгебра над полем комплексных чисел* $\mathbb{C}$ (*точнее, семейство супералгебр зависящее от параметра* $\hbar \in \mathbb{C}$ *или супералгебра над* $\mathbb{C}[[\hbar]]$), *порожденная образующими* $\{x^{\pm}_{i,r}, h_{i,r}, d | i \in \{0,1,\dots,m+n-1\}, r \in \mathbb{Z}_{\geqslant 0}\}$, *удовлетворяющими соотношениям* (3.1)–(3.8), *а также соотношениям*

$$\begin{aligned} [d,h_{i,r}]=0, \quad [d,x^{+}_{i,r}] &= \begin{cases} x^{+}_{i,r}, & \text{\textit{если}} \quad i=0,\\ 0, & \text{\textit{если}} \quad i\neq 0,\end{cases}\\ [d,x^{-}_{i,r}] &= \begin{cases} -x^{-}_{i,r}, & \text{\textit{если}} \quad i=0,\\ 0, & \text{\textit{если}} \quad i\neq 0.\end{cases}\end{aligned} \tag{3.10}$$

Отметим, что в случае, так называемой, выделенной системы простых корней Π^{dist} только два нечетных корня занумерованных индексами m и 0.

Пусть $\widetilde{h}_{i,1} = h_{i,1} - \frac{\hbar}{2} h^2_{i,0}$. Пусть также $\widetilde{\Pi}$ – произвольная система простых корней специальной линейной супералгебры Каца–Муди.

Имеет место следующее утверждение (см. [11]).

Предложение 1. *Пусть* $\widetilde{sl}(m|n,\Pi)(\cong sl^{(1)}(m|n,\widetilde{\Pi}))$ *– аффинная супералгебра Каца- Муди типа* $A(m-1,n-1)$, $m \neq n$ *и* $m,n \geqslant 2$. *Тогда аффинный суперянгиан* $Y_\hbar(\widetilde{sl}(m|n,\Pi))$ *изоморфен ассоциативной супералгебре, порожденной образующими* $x^{\pm}_{\alpha_i,r}$, $h_{\alpha_i,r}, d$, ($\alpha_i \in \widetilde{\Pi}$, $r \in \{0,1\}$), *удовлетворяющими следующим определяющим соотношениям:*

$$[h_{\alpha_i,r}, h_{\alpha_j,s}] = 0, \tag{3.11}$$

$$[x^{+}_{\alpha_i,s}, x^{-}_{\alpha_j,r}] = \delta_{ij} h_{\alpha_i,k+r}, \tag{3.12}$$

$$[h_{\alpha_i,0}, x^{\pm}_{\alpha_i,r}] = \pm a_{ij} x^{\pm}_{\alpha_j,r}, \tag{3.13}$$

$$[x^{\pm}_{\alpha_i,k+1}, x^{\pm}_{\alpha_j,r}] - [x^{\pm}_{\alpha_i,k}, x^{\pm}_{\alpha_j,r+1}] = \pm\frac{\hbar a_{ij}}{2}\{x^{\pm}_{\alpha_i,k}, x^{\pm}_{\alpha_j,r}\}, \tag{3.14}$$

$$[\widetilde{h}_{\alpha_i,1}, x^{\pm}_{\alpha_j,r}] = \pm a_{ij} x^{\pm}_{\alpha_j,r+1}, \tag{3.15}$$

$$(ad x^{\pm}_{\alpha_i,0})^{(1+|a_{ij}|)}(x_{\alpha_j,0})^{\pm} = 0 \quad (i\neq j), \tag{3.16}$$

$$[x^{\pm}_{\alpha_i,0}, x^{\pm}_{\alpha_i,0}] = 0, \quad \text{\textit{для каждого нечетного корня}}\ \alpha_i, \tag{3.17}$$

$$[[x^{\pm}_{\alpha_{i-1},0}, x^{\pm}_{\alpha_i,0}], [x^{\pm}_{\alpha_i,0}, x^{\pm}_{\alpha_{i+1},0}]] = 0, \ \textit{для каждого нечетного корня } \alpha_i. \tag{3.18}$$

$$\begin{gathered}
[d, h_{\alpha_i,r}] = 0, \quad [d, x^{+}_{\alpha_i,r}] = \begin{cases} x^{+}_{\alpha_i,r}, & \textit{если} \quad i = 0, \\ 0, & \textit{если} \quad i \neq 0, \end{cases} \\
[d, x^{-}_{\alpha_i,r}] = \begin{cases} -x^{-}_{\alpha_i,r}, & \textit{если} \quad i = 0, \\ 0, & \textit{если} \quad i \neq 0. \end{cases}
\end{gathered} \tag{3.19}$$

Здесь $r = 0, 1$.

Замечание 2. Отметим, что мы здесь использовали новую реализацию Дринфельда в качестве определения аффинного суперянгиана. Сформулированное выше предложение утверждает, что эта реализация эквивалентна минималистской реализации. Следует сказать, что минималистская реализация является упрощенным вариантом первого определения Дринфельда янгиана и является следствием определения янгиана как плоской деформации биалгебры Ли полиномиальных токов. Поэтому было бы естественно использовать в качестве определения и аффинного суперянгиана минималистское представление аффинного суперянгиана и тогда формулировка теоремы не изменилась, но ее утверждение состояло в том, что аффинный суперянгиан может быть описан в новой реализации Дринфельда, то есть как суперянгиан Дринфельда. При таком подходе аффинный суперянгиан появляется вместе со структурой супералгебры Хопфа. Поскольку мы начинаем с категории ассоциативных супералгебр, мы предпочли использовать в качестве исходного определения аффинного суперянгиана его представление как суперянгиана Дринфельда, с естественной структурой ассоциативной супералгебры, вводя потом на нем коумножение, как дополнительную структуру, индуцированную с естественной структуры коумножения на суперянгиане в минималистской реализации.

§4. Группоид Вейля

Пусть s элемент группоида Вейля $\widehat{W}$ ([20]). Определено естественное действие элементов $\widehat{W}$ на системе аффинных простых корней $\widetilde{\Pi}$ супералгебры Ли $A(m,n)$, именно, для $s \in \widehat{W}$ $s : \widetilde{\Pi} \to \widetilde{\Pi}_1$. Мы можем также определить действие группоида Вейля $\widehat{W}$ на суперянгианах вида $Y(\widehat{sl}(m|n, \Pi))$. Именно, элементы $\widehat{W}$ индуцируют отображения

$Y(\widehat{sl}(m|n,\Pi)) \to Y(\widehat{sl}(m|n,\Pi_1))$. Другими словами элементы w группоида Вейля определяют изоморфизмы T_w в категории суперянгианов вида $Y(\widehat{sl}(m|n,\Pi))$, которые мы называем квантовыми суперотражениями. Таким образом, $\widehat{W}$ является группоидом в категорном смысле.

Отметим, что каждый четный элемент $s \in \widehat{W}$ определяет автоморфизм $T_s : Y(\widehat{sl}(m|n,\Pi)) \to Y(\widehat{sl}(m|n,\Pi))$. Четные отображения образуют группу Вейля и элементы группы Вейля индуцируют автоморфизмы T_s суперянгиана $Y(\widehat{sl}(m|n,\Pi))$. Мы получаем определенное действие группы Вейля на каждом суперянгиане $Y(\widehat{sl}(m|n,\Pi))$, который мы рассматриваем как объект упомянутой выше категории.

Отметим, что точно такое же определение группоида Вейля может быть дано и в случае аффинного суперянгиана $Y(\widetilde{sl}(m|n,\Pi))$.

Предложение 2. *Для каждого элемента $s \in \widehat{W}$ существует изоморфизм $T_s : Y_\hbar(\widehat{sl}(m|n,\Pi)) \to Y_\hbar(\widehat{sl}(m|n,\Pi_1)$ такой, что T_s является автоморфизмом тогда и только тогда, когда s является четным отражением.*

Для четных простых отражений мы можем определить отображения $T_{\alpha_j} : Y_\hbar(\widehat{sl}(m|n,\Pi)) \to Y(\widehat{sl}_\hbar(m|n,\Pi))$ [23], следующими формулами (см. [23]).

$$T_{\alpha_i}(x^{\pm}_{\alpha_j,0}) = \begin{cases} -x^{\mp}_{\alpha_i,0}, & \text{если} \quad i=j, \quad a_{i,i} \neq 0, \\ \pm[x^{\pm}_{\alpha_i,0}, x^{\pm}_{\alpha_j,0}], & \text{если} \quad a_{i,j} = \pm 1, \\ x^{\pm}_{\alpha_j,0}, & \text{если} \quad a_{i,j} = 0, \end{cases}$$

$$T_{\alpha_i}(h_{\alpha_j,0}) = \begin{cases} -h_{\alpha_i,0}, & \text{если} \quad i=j, \quad a_{i,i} \neq 0, \\ h_{\alpha_i,0} + h_{\alpha_j,0}, & \text{если} \quad a_{i,j} = \pm 1, \\ h_{\alpha_j,0}, & \text{если} \quad a_{i,j} = 0, \end{cases}$$

$$T_{\alpha_i}(x^{\pm}_{\alpha_j,1}) = \begin{cases} -x^{\mp}_{\alpha_i,1} + \frac{\hbar}{2}\{h_{\alpha_i,0}, x^{\mp}_{\alpha_i,0}\}, & \text{если} \quad i=j, \quad a_{i,i} \neq 0, \\ \pm[x^{\pm}_{\alpha_i,0}, x^{\pm}_{\alpha_j,1}], & \text{если} \quad a_{i,j} = \pm 1, \\ x^{\pm}_{\alpha_j,1}, & \text{если} \quad a_{i,j} = 0, \end{cases}$$

$$T_{\alpha_i}(\widetilde{h}_{\alpha_j,1}) = \begin{cases} -\widetilde{h}_{\alpha_i,1} - \hbar\{x^{+}_{\alpha_i,0}, x^{-}_{\alpha_i,0}\}, & \text{если} \quad i=j, \quad a_{i,i} \neq 0, \\ \widetilde{h}_{\alpha_j,1} + \widetilde{h}_{\alpha_i,1} + \frac{\hbar}{2}\{x^{+}_{\alpha_i,0}, x^{-}_{\alpha_i,0}\}, & \text{если} \quad a_{i,j} = \pm 1, \\ \widetilde{h}_{\alpha_j,1}, & \text{если} \quad a_{i,j} = 0. \end{cases}$$

Определим теперь квантовые нечетные отражения. Пусть α_i – нечетный простой корень, то есть $|\alpha_i| = 1$, и пусть $s_i : \widetilde{\Pi} \to \widetilde{\Pi'}$ отражение относительно этого нечетного корня (“нечетное отражение”). Пусть также $\beta_j := s(\alpha_j) \in \widetilde{\Pi'}$ – образ корня простого корня α_j исходной системы простых корней $\widetilde{\Pi}$ под действием этого отражения $s_i = s_{\alpha_i}$. Определим гомоморфизмы

$$T_i = T_{\alpha_i} : Y_\hbar(\widehat{sl}(m|n, \Pi)) \to Y_\hbar(\widehat{sl}(m|n, \Pi')),$$
$$(T_i = T_{\alpha_i} : Y_\hbar(sl^{(1)}(m|n, \Pi)) \to Y_\hbar(sl^{(1)}(m|n, \Pi')))$$

следующими формулами.

$$T_i(x^+_{\alpha_j,0}) = \begin{cases} -x^-_{s_i(\alpha_i),0}, & \text{если} \quad i = j, \\ [x^+_{s_i(\alpha_i),0}, x^+_{s_i(\alpha_j),0}], & \text{если} \quad a_{ij} = \pm 1, \\ x^+_{\alpha_j,0}, & \text{если} \quad a_{ij} = 0, \end{cases} ,$$

$$T_i(x^-_{\alpha_j,0}) = \begin{cases} -x^+_{s_i(\alpha_i,0)}, & \text{если} \quad i = j, \\ [x^-_{s_i(\alpha_i),0}, x^-_{s_i(\alpha_j),0}], & \text{если} \quad a_{ij} = \pm 1, \\ x^-_{s_i(\alpha_j),0}, & \text{если} \quad a_{ij} = 0, \end{cases}$$

$$T_i(h_{\alpha_j,0}) = \begin{cases} -h_{s_i(\alpha_i),0}, & \text{если} \quad i = j, \\ h_{s_i(\alpha_i),0} + h_{s_i(\alpha_j),0}, & \text{если} \quad a_{ij} = \pm 1, \\ h_{s_i(\alpha_j),0}, & \text{если} \quad a_{ij} = 0, \end{cases}$$

$$T_i(x^+_{\alpha_j,1}) = \begin{cases} -x^-_{s_i(\alpha_i),1}, & \text{если} \quad i = j, \\ [x^+_{s_i(\alpha_i),0}, x^+_{s_i(\alpha_j),1}], & \text{если} \quad a_{ij} = \pm 1, \\ x^+_{s_i(\alpha_j),1}, & \text{если} \quad a_{ij} = 0, \end{cases}$$

$$T_i(x^-_{\alpha_j,1}) = \begin{cases} -x^+_{s_i(\alpha_i),1}, & \text{если} \quad i = j, \\ -[x^-_{s_i(\alpha_i),0}, x^-_{s_i(\alpha_j),1}], & \text{если} \quad a_{ij} = \pm 1, \\ x^-_{s_i(\alpha_j),1}, & \text{если} \quad a_{ij} = 0, \end{cases}$$

$$T_i(\widetilde{h}_{\alpha_j,1}) = \begin{cases} -\widetilde{h}_{s_i(\alpha_i),1}, & \text{если} \quad i = j, \\ \widetilde{h}_{s_i(\alpha_j),1} + \widetilde{h}_{s_i(\alpha_i),1} + \frac{\hbar}{2}\{x^+_{s_i(\alpha_i),0}, x^-_{s_i(\alpha_i),0}\}, & \text{если} \quad a_{ij} = \pm 1, \\ \widetilde{h}_{s_i(\alpha_i),1}, & \text{если} \quad a_{ij} = 0. \end{cases}$$

Отметим, что квантовые отражения относительно нечетных корней (квантовые “нечетные отражения”) являются четными отображениями, то есть морфизмами в суперкатегории суперянгианов или в суперкатегории квантового группоида Вейля ([11], см. также ниже заключительное замечание). Отметим, что доказательство предыдущей теоремы сугубо техническое и сводится к проверке того, что определенные выше отображения T_{α_i} совместимы с определяющими соотношениями суперянгиана $Y_\hbar(\widehat{sl}(m|n,\Pi))$. Необходимые для доказательства вычисления проделаны в работах [11, 23].

§5. Коумножение

В этом параграфе мы рассмотрим различные коумножения на суперянгиане и их связь со структурой положительной части суперянгиана, порожденной борелевской подалгеброй исходной супералгебры Ли.

В этом параграфе мы определим коумножение для аффинного суперянгиана $Y_\hbar(\widehat{sl}(m|n,\Pi)$ и рассмотрим отношение между структурой коумножения коскобкой на биалгебре Ли полиномиальных токов со значениями в аффинной супералгебре Ли. Нам потребуется конструкция пополнения градуированной алгебры.

Пусть $A = \bigoplus_{i\in\mathbb{Z}} A(i)$ градуированная алгебра. Для всех $i \in \mathbb{Z}$, мы зададим топологию на $A(i)$ такую, что для $a \in A(i)$ пусть множества $\{a + \sum_{r>N} A(i-r)\cdot A(r) | N \in \mathbb{Z}_{\geqslant 0}\}$ образуют фундаментальную систему открытых окрестностей точки a. Стандартное относительно градуировки пополнение A is $\bigoplus_{i\in\mathbb{Z}} \widehat{A}(i)$, where $\widehat{A}(i)$ это пополнение пространств $A(i)$. По определению $\widehat{A}(i)$, мы получаем, что

$$\widehat{A} = \bigoplus_{i\in\mathbb{Z}} \lim_{\leftarrow N} A(i)/\sum_{r>N} A(i-r)\cdot A(r).$$

Как и раньше мы используем обозначение $\widehat{sl}(m|n,\Pi)$ для аффинной супералгебры Ли $\widehat{sl}(m|n)$, определяемой системой простых корней Π.

Определим градуировку на янгиане $Y_\hbar(sl(m|n,\Pi))$ задав степень образующих формулами

$$\deg(h_{i,r}) = 0, \quad \deg(x^{\pm}_{i,r}) = \pm 1, \quad i \in I, \ \ r \in \mathbb{Z}_{\geqslant 0},$$

подразумевая. что степень произведения равна сумме степеней сомножителей, а степень суммы равна максимальной из степеней слагаемых.

Имеет место следующее разложение

$$Y(\widehat{sl}(m|n,\Pi)) \simeq Y^- \otimes Y^0 \otimes Y^+,$$

где $Y^\pm$ $(Y^0))$ обозначает подалгебру супералгебры $Y(\widehat{sl}(m|n,\Pi))$ порожденную $x_{ir}^\pm$ (h_{ir} и $h \in \mathfrak{h}$) с $i \in I$ или $\alpha_i \in \widetilde{\Pi}$ и $r \geqslant 0$. Таким образом, получаем разложение

$$Y^+ = \bigoplus_{k=0}^{\infty} Y^+[k],$$

где $Y^+[k]$ линейная оболочка всех мономов степени $k > 0$ в Y^+.

Тогда мы получаем, что

$$Y(\widehat{sl}(m|n,\Pi) = \bigoplus_{k=0}^{\infty} \widetilde{Y}[k],$$

где $\widetilde{Y}[k] = Y^{\leqslant 0} \otimes Y^+[k]$ and $Y^{\leqslant 0}$ подалгебра $Y(\widehat{sl}(m|n,\Pi)$, порожденная x_{ir}^- и h_{ir}, $h \in \mathfrak{h}$ для $i \in I, r \geqslant 0$.

Для каждого $n \in \mathbb{Z}_{\geqslant 0}$ пусть $Y_{\geqslant n}$обозначает подпространство $\bigoplus_{k=n}^{\infty} Y[k]$ в Y^+. Пусть A_n, q_n обозначает левый $Y_\hbar(m|n,\Pi)$-модуль A_n и естественное факторотображение q_n, определяемые следующим образом

$$A_n = Y_\hbar(\widehat{sl}(m|n,\Pi))/Y_\hbar(\widehat{sl}(m|n,\Pi))Y_{\geqslant n+1}, \quad q_n : Y_\hbar(\widehat{sl}(m|n,\Pi)) \to A_n.$$

Для каждого $n \in \mathbb{Z}_{\geqslant 0}$, отображение q_n при факторизации через A_n порождает

$Y_\hbar(\widehat{sl}(m|n,\Pi))$-модульный гомоморфизм $p_n : A_n \to A_{n-1}$ такой, что $p_n \circ q_n = q_{n-1}$. Следовательно, $(A_n, p_n)_{n \geqslant 0}$ образует обратную систему $Y_\hbar(\widehat{sl}(m|n,\Pi)$-модулей. Мы определим $\widehat{Y}_\hbar(\widehat{sl}(m|n,\Pi))$ как обратный предел этой системы.

$$\begin{aligned} \widehat{Y}_\hbar(\widehat{sl}(m|n,\Pi)) &:= \lim_{\leftarrow} A_n \\ &= \lim_{\leftarrow}(Y_\hbar(\widehat{sl}(m|n,\Pi))/Y_\hbar(\widehat{sl}(m|n,\Pi))Y_{\geqslant n+1}). \end{aligned} \tag{5.1}$$

Пусть $i : Y_\hbar(\widehat{sl}(m|n,\Pi)) \to \widehat{Y}_\hbar(\widehat{sl}(m|n,\Pi))$ это гомоморфизм $Y_\hbar(\widehat{sl}(m|n,\Pi))$-модулей, заданный формулой $X \mapsto (q_n(X))_{n \geqslant 0}$ для всех $X \in Y_\hbar(\widehat{sl}(m|n,\Pi))$. Легко видеть, что i является инъекцией.

Тогда $Y_\hbar(\widehat{sl}(m|n,\Pi))$ и $Y_\hbar(\widehat{sl}(m|n,\Pi))^{\otimes 2}$ становятся градуированными алгебрами. Мы определим $\widehat{Y}_\hbar(\widehat{sl}(m|n,\Pi))$ $(\widehat{Y_\hbar(\widehat{sl}(m|n,\Pi))^{\otimes 2}})$ как стандартные пополнения относительно заданных выше градуировок супералгебр $Y_\hbar(\widehat{sl}(m|n,\Pi))$ и $Y_\hbar(\widehat{sl}(m|n,\Pi))^{\otimes 2}$.

Теорема 1. *Гомоморфизм супералгебр*

$$\Delta : \widehat{Y}_\hbar(\widehat{sl}(m|n,\Pi)) \to Y_\hbar(\widehat{\widehat{sl}(m|n,\Pi))^{\otimes 2}$$

однозначно задается следующими формулами на образующих:

$$\Delta(h_{i,0}) = h_{i,0}\otimes 1 + 1\otimes h_{i,0}, \quad \Delta(x^{\pm}_{i,0}) = x^{\pm}_{i,0}\otimes 1 + 1\otimes x^{\pm}_{i,0}, \tag{5.2}$$

$$\begin{aligned}\Delta(h_{i,1}) &= h_{i,1}\otimes 1 + 1\otimes h_{i,1} + \hbar h_{i,0}\otimes h_{i,0}\\ &- \hbar \sum_{\alpha\in\Delta_+}\sum_{1\leqslant k_\alpha\leqslant \dim(\mathfrak{g}_\alpha)} (\alpha,\alpha_i)x^{k_\alpha}_{-\alpha}\otimes x^{k_\alpha}_{\alpha}\end{aligned} \tag{5.3}$$

Более того, Δ удовлетворяет условию коассоциативности.

Определим оператор (полу) Казимира Ω_+ формулой

$$\Omega_+ = \sum_{k=1}^{\dim\mathfrak{h}} h^{(k)}\otimes h_{(k)} + \sum_{\alpha\in\Delta_+}\sum_{k=1}^{\dim\mathfrak{g}_\alpha} x^{(k)}_{-\alpha}\otimes x^{(k)}_{\alpha}. \tag{5.4}$$

Отметим, что Ω_+ не совпадает с обычным оператором Казимира, когда $\mathfrak{g}$ конечномерная супералгебра Ли так как последний не содержит член $\sum_{\alpha\in\Delta_+}\sum_{k=1}^{\dim\mathfrak{g}_\alpha} x^{(k)}_{\alpha}\otimes x^{(k)}_{-\alpha}$. Заметим также, что в аффинном случае оператор Казимира заменяется обобщенным оператором Казимира (see [5,11]).

Пусть $\square(x) = x\otimes 1 + 1\otimes x$. Легко видеть, что половинный оператор Казимира Ω_+ не коммутирует с образующими $x^{\pm}$, h_i алгебры Ли $\widehat{sl}(m|n,\Pi)(\subset Y_\hbar(\widehat{sl}(m|n,\Pi)))$.

Предложение 3. *Имеют место следующие соотношения*

$$[\square(h),\Omega_+] = 0, \tag{5.5}$$

для $h\in\mathfrak{h}$, где $\mathfrak{h}$ – картановская подалгебра.

$$[\square(x^+_i),\Omega_+] = -x^+_i\otimes h_i, \tag{5.6}$$

$$[\square(x^-_i),\Omega_+] = h_i\otimes x^-_i, \tag{5.7}$$

для всех $i\in I$,

$$\Delta(h_{i,1}) = \square(h_{i,1}) + \hbar[h_{i,0}\otimes 1,\Omega_+]. \tag{5.8}$$

Отметим, что соотношение (5.8) тесно связано с определением аффинного суперянгиана как квантования бисупералегебры полиномиальных токов с коскобкой, определяемой аффинным аналогом рациональной r-матрицы Янга. Отметим также, что доказательство теоремы 1 существенно использует соотношения предложения 3.

Сформулируем основной результат данной работы.

Теорема 2. 1) *Отображения* T_{α_i}

$$T_{\alpha_i} : (Y_\hbar(\widehat{sl}(m|n,\Pi)),\Delta) \to (Y_\hbar(\widehat{sl}(m|n,\Pi')),\Delta')$$

являющиеся изоморфизмами ассоциативных супералгебр, в случае, когда α_i *– четный корень, являются автоморфизмами* ($\widetilde{\Pi} = \widetilde{\Pi'}$, $\Delta = \Delta'$) *и совместимы с коумножением, то есть*

$$(T_{\alpha_i} \otimes T_{\alpha_i})(\Delta(a)) = \Delta \circ T_{\alpha_i}(a), \quad \forall a \in Y_\hbar(\widehat{sl}(m|n,\Pi)). \tag{5.9}$$

2) *Отображения* T_{α_i}*, являющиеся изоморфизмами ассоциативных супералгебр, в случае, когда* α_i *– нечетный корень, не является гоморфизмом супераллгебр Хопфа, то есть*

$$(T_{\alpha_i} \otimes T_{\alpha_i})(\Delta) \neq \Delta' \circ T_{\alpha_i}. \tag{5.10}$$

Доказательство. Опишем кратко схему доказательства теоремы. Доказательство основано на явной проверке соотношений на образующих первого порядка. Идея доказательства состоит в том, что в формулу (5.8) для коумножения элемента первого порядка $h_{\alpha_i,1}$ входит полу Казимир Ω_+, вид которого зависит от разбиения на положительные и отрицательные корни, а также элемент $h_{\alpha_i,0} \otimes 1$, содержащийся в коммутаторе с полу Казимиром. Поскольку в супералгебре Ли борелевские подалгебры несопряжены, упомянутое выше разбиение под действием нечетного отражение переходит в существенно другое, связанное с отличной от исходной борелевской подалгеброй, что собственно дает основание предполагать, что

$$T_{\alpha_i} \otimes T_{\alpha_i}(\Delta(h_{i,1})) - \Delta(T_{\alpha_i}(h_{\alpha_i,1})) \neq 0.$$

Этот факт и проверяется прямым вычислением. □

Замечание 3. В заключение отметим, что таким же образом, можно рассмотреть категорию аффинных $\hbar$-суперянгианов вида $Y_\hbar(\mathfrak{sl}^{(1)}(m|n,\widetilde{\Pi}))$, а морфизмы которой порождаются изоморфизмами

T_{α_i}. Определенную таким образом категорию мы и называем янгианным группоидом Вейля. Эта конструкция дана [11] и является аналогом конструкций группоидов Вейля, данных ранее в работах [15, 22]. Отметим, что все объекты этой категории изоморфны как ассоциативные супералгебры. Мы также начали исследование связи действия элементов группоида Вейля на суперянгианах с коумножениями на суперянгианах.

Список литературы

1. V. Chari, A. Pressley, *A guide to qua,ntum groups.* Camb.Univ.Press, Cambridge (1995).
2. В. Г. Дринфельд, *Новая реализация янгианов и квантовых аффинных алгебр.* — Доклады АН СССР **36** (1988), 212–216.
3. S. I. Boyarchenko, S. Z. Levendorskii, *On affine Yangians.* — Lett. Math. Phys. **32**, No. 4 (1993), 2691–274.
4. N. Guay, *Affine Yangians and deformed double current algebras in type A.* — Adv. Math. **211** (2007), 426–484.
5. N. Guay, H. Nakajima, C. Wendlandt, *Coproduct for Yangians of affine Kac-Moody algebras on generators and defining relations of Yangians.* — Adv. Math. **338** (2018), 865–911.
6. S. Z. Levendorskii, *On generators and defining relations of Yangians.* — J. Geom. Phys. **12**, No. 1 (1993), 1–11.
7. V. Drinfeld, *Quantum groups.* — In: Proc. Int. Cong. Math., Vol. 1, Berkley (1988), 789–820.
8. В. А. Стукопин, *О янгианах супералгебр Ли типа $A(m,n)$.* — Функцион. анализ и его прилож. **28**, No. 3 (1994), 85–88.
9. В. А. Стукопин, *Об изоморфизме янгиана $Y_\hbar(A(m,n))$ специальной линейной супералгебры Ли и квантовой петлевой супералгебры $U_q(LA(m,n))$.* — Теор. и матем. физика **198**, No. 1 (2019), 145–161.
10. В. А. Стукопин, *О связи категорий представлений янгиана специальной линейной супералгебры Ли и квантовой петлевой супералгебры.* — Теор. и матем. физика **204** No. 3 (2020), 466–484.
11. В. Д. Волков, В. А. Стукопин, *Аффинный суперянгиан и квантовый группоид Вейля.* — Теор. и матем. физика **216**, No. 3 (2023), 476–489.
12. D. Galakhov, M. Yamazaki, *Quiver Yangian and supersymmetric quantum mechanics.* — Commun. Math. Phys. **396**, No. 2 (2022), 713–785.
13. D. Galakhov, A. Morozov, N. Tselousov, *Quiver Yangian and supersymmetric quantum mechanics.* — `arxiv: 2402.05920v2 [hep-th]`
14. D. Maulik, A. Okounkov, *Quantum groups and quantum cohomology.* — `arxiv: 1211.1287v2 [math. AG]`
15. A. Mazurenko, V. Stukopin, *Classification of Hopf superalgebras associated with quantum special linear superalgebra at roots of unity using Weyl groupoid.* — `arxiv: 2111.06576 [math. QA]`

16. В. А. Стукопин, *О дубле янгиана супералгебры Ли типа* $A(m,n)$. — Функц. анализ и его прилож. **40** No. 2 (2006), 81–84.
17. V. Stukopin, *Yangians of classical Lie superalgebras: basic constructions, quantum double and universal R-matrix.* — Proceedings of Institute of Mathematics of NAS of Ukraine **50**, No. 3 (2004), 1195–1201.
18. В. А. Стукопин, *О представлениях янгиана супералгебры Ли типа* $A(m,n)$. — Известия РАН. Серия матем. **77**, No. 5 (2013), 179–202.
19. А. И. Молев, *Янгианы и классические алгебры Ли.* МЦНМО, Москва (2009).
20. I. M. Musson, *Lie superalgebras and enveloping algebras. Graduate Studies in Mathematics.* American Mathematical Society, Providence, Rhode Island (2012).
21. C. Peng M. R. Gaberdiel, W. Li, H. Zhang, *The supersymmetric affine Yangian.* — `arxiv: 1711.07449v.2 [math. hep-th]` 2018.
22. V. A. Stukopin, A. Mazurenko, *Classification of Hopf superalgebra structures on Drinfeld super Yangians.* — `arxiv: 2210.08365 [math. QA]` (2022).
23. Ryosuke Kodera, *Braid group action on affine Yangian.* — Symmetry, Integrability and Geometry: Methods and Applications **15** (2019), 28.
24. Mamoru Ueda *Construction of Affine Super Yangian.* — `arxiv: 1911.0666 v6 [math. RT]` (2021).

Volkov V. D., Stukopin V. A. The Weyl groupoid and its action on the affine super-Yangian.

We define the action of the Weyl groupoid on the affine super-Yangian $Y_\hbar(\widehat{sl}(m|n,\Pi))$ of the special linear Kac-Moody superalgebra $\hat{sl}(m|n,\Pi)$, given by an arbitrary system of simple roots Π. Affine super-Yangians of this type form a category. Morphisms in this category are given by the action of the elements of the Weyl groupoid. All super-Yangians from this category are isomorphic as associative superalgebras, but morphisms defined by the action of elements of a Weyl groupoid do not preserve coproducts. We describe coproducts on super-Yangians and their relation to the Weyl groupoid action.

Московский
физико-технический институт,
Центр фундаментальной математики МФТИ
E-mail: `volkov.vd@phystech.edu`

Поступило 30 мая 2024 г.

Московский
физико-технический институт,
Центр фундаментальной математики МФТИ,
Южный математический институт ВНЦ РАН
E-mail: `stukopin@mail.ru`