Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 531, 2024 г.

В. А. Петров, Г. С. Шульга

ТЕОРЕМА ПУХЛИКОВА–ХОВАНСКОГО ДЛЯ ОРИЕНТИРОВАННЫХ ТЕОРИЙ КОГОМОЛОГИЙ

Посвящается памяти Николая Александровича Вавилова

В [1] А. В. Пухликов и А. Г. Хованский описали кольцо когомологий (или кольцо Чжоу, что в данном случае одно и то же) проективного торического многообразия как кольцо дифференциальных операторов по модулю аннулятора многочлена объёма соответствующего многогранника. Аналогичный результат верен и для многообразия полных флагов относительно специальной линейной группы (с многогранником Гельфанда–Цетлина). Недавно Л. В. Монин и Е. Ю. Смирнов в [5] перенесли эти результаты на K-теорию Гротендика; при этом вместо дифференцирований надо брать конечные разности, а вместо многочлена объёма – многочлен Эрхарта, считающий число целочисленных точек внутри многогранника.

И кольцо Чжоу, и кольцо Гротендика являются примерами ориентированных теорий когомологий в смысле Левина и Мореля [4]. Мы обобщаем результат Монина и Смирнова на произвольную ориентированную теорию когомологий. Многочлен, играющий роль многочлена объёма, считается при этом по теореме Римана–Роха.

Определение 1. Пусть X – гладкое проективное алгебраическое многообразие, A – ориентированная теория когомологий. Будем говорить, что многообразие X является *A-специальным*, если выполняются следующие три свойства:

- Форма $\mathrm{Tr} \circ \mathrm{mult} : A(X) \times A(X) \to A(\mathrm{pt})$, индуцируемая умножением и пушфорвардом относительно проекции в точку, невырожденна;
- Группа Пикара $\mathrm{Pic}(X)$ является свободной конечно порождённой абелевой группой;

Ключевые слова: торические многообразия, ориентированные теории когомологий.

Работа была поддержана грантом Фонда развития теоретической физики и математики "БАЗИС" (первый автор) и фондом "Родные города" (второй автор).

- Образ отображения $c_1 : \mathrm{Pic}(X) \to A(X)$ порождает всё $A(X)$ как $A(\mathrm{pt})$-алгебру.

Замечание 1. Первые два свойства выполнены автоматически, если CH-мотив X является суммой сдвигов мотивов Тейта, в частности, для клеточных многообразий [6]. В этом случае если третье свойство выполнено для $A = \mathrm{CH}$, то оно выполнено и для произвольного A.

Пример 1. Гладкие проективные торические многообразия являются A-специальными для любой A.

Пример 2. Многообразие полных флагов для специальной линейной или симплектической группы является A-специальным для любой A. Для произвольной полупростой группы это верно, если в $A(\mathrm{pt})$ обратим индекс кручения, см. [2].

Определение 2. ([2, 2.1,2.4])

- Пусть S – множество, R – кольцо. Рассмотрим кольцо полиномов $R[x_S] = R[x_s, s \in S]$ вместе с гомоморфизмом аугментации $\varepsilon : R[x_S] \to R : x_s \mapsto 0$ для любого $s \in S$. Определим соответствующее кольцо формальных степенных рядов $R[[x_S]]$ как замыкание $R[x_S]$ в $\mathrm{Ker}(\varepsilon)$-адической топологии.
- Пусть M – абелева группа, F – формальный групповой закон с кольцом коэффициентов R. Определим *формальное групповое кольцо* $R[[M]]_F$ как фактор $R[[x_M]$ по замыканию идеала, порожденного элементами вида $x_{u+v} - F(x_u,\, x_v)$ по всем $u, v \in M$.

По теории A и многообразию X можно построить формальное групповое кольцо $R_A^X \overset{\mathrm{def}}{=} A(\mathrm{pt})[[\mathrm{Pic}(X)]]_{F_A}$. Существует каноническое отображение

$$c : R_A^X \longrightarrow A(X),$$

при котором каждая образующая в R_A^X , соответствующая элементу $\mathrm{Pic}(X)$, отправляется в свой первый класс Черна. Отображение c будем называть *характеристическим отображением.* Для A-специального многообразия оно сюръективно.

Определение 3. Модулем *непрерывных функционалов* $\check{R}_A^X$ назовём подмодуль в двойственном $A^*(\mathrm{pt})$-модуле к R_A^X, состоящий из элементов ϕ со свойством $\exists n : (\mathrm{Ker}\, \varepsilon)^n \subset \mathrm{Ker}\, \phi$.

Замечание 2. В [2] показано, что если $\mathrm{Pic}(X)$ имеет ранг n, то R_A^X (неканонически) изоморфно кольцу формальных степенных рядов от

n переменных над $A^*(\mathrm{pt})$. Поэтому $\check{R}_A^X$ неканонически изоморфно как $A^*(\mathrm{pt})$-модуль кольцу разделенных степеней от n переменных, а если $A^*(\mathrm{pt})$ содержит $\mathbb{Q}$ – кольцу многочленов от n переменных. Это аналогично [3, глава 2, предложение 2].

Определение 4. *Регулярным представлением* R_A^X будем называть представление

$$\mathrm{Reg} : R_A^X \to \mathrm{End}(\check{R}_A^X),$$

заданное по формуле

$$(\mathrm{Reg}(f)(\phi))(g) = \phi(gf).$$

Лемма 1. *$A(X)^\vee$ является подпредставлением регулярного представления относительно вложения $c^\vee : A(X)^\vee \hookrightarrow \check{R}_A^X$.*

Доказательство. Возьмём произвольный $\psi \in A(X)^\vee$, его образ в $\check{R}_A^X$ – это $\psi \circ c$. Тогда для любых $f, g \in R_A^X$

$$\mathrm{Reg}(f)(\psi \circ c)(g) = \psi(c(g)c(f)) = (\psi_f \circ c)(g).$$

где $\psi_f \in A(X)^\vee$ определена как $\psi_f(x) = \psi(c(f)x)$. □

В соответствии с предыдущим, будем обозначать за $\overline{\mathrm{Reg}}$ сужение Reg на $A(X)^\vee$.

Лемма 2. Tr – *образующая $A(X)^\vee$ как $\overline{\mathrm{Reg}}$-модуля.*

Доказательство. Невырожденность спаривания $\mathrm{Tr} \circ \mathrm{mult}$ влечет, что любой элемент $A(X)^\vee$ имеет вид $\mathrm{Tr} \circ \mathrm{mult}_a$ для некоторого $a \in A(X)$, где mult_a – оператор умножения на a. Но $a = c(x)$ для некоторого $x \in R_X^A$, и упомянутый элемент, таким образом, имеет вид $\overline{\mathrm{Reg}}(x)(\mathrm{Tr})$. □

Наличие образующей позволяет дать полное описание $A(X)^\vee$, и как следствие, $A(X)$ в терминах регулярного представления.

Теорема 1. $A(X) \simeq \operatorname{Im}\mathrm{Reg} / \operatorname{Ann}(\mathrm{Tr} \circ c)$.

Доказательство. Рассмотрим следующую коммутативную диаграмму:

$$\begin{tikzcd}
\operatorname{Im}\overline{\mathrm{Reg}} \arrow[r, "\alpha\mapsto\alpha(\mathrm{Tr})"] & A(X)^\vee \arrow[r, "\sim"] & A(X) \\
R_X^A \arrow[u, two heads, "\overline{\mathrm{Reg}}"] \arrow[urr, "c"'] & &
\end{tikzcd}$$

Композиция двух горизонтальных отображений – гомоморфизм алгебр, поскольку таковыми являются c и $\overline{\mathrm{Reg}}$, а последнее сюрьективно. Но сама эта композиция также сюрьективна, ибо Tr является образующей $\overline{\mathrm{Reg}}$, а правая горизонтальная стрелка – изоморфизм. Ядро этой композиции – Ann(Tr), что влечёт

$$A(X) \simeq \operatorname{Im} \overline{\mathrm{Reg}} / \operatorname{Ann}(\mathrm{Tr}) \simeq \operatorname{Im} \mathrm{Reg} \,/\, \operatorname{Ann}(\mathrm{Tr} \circ c). \qquad \square$$

Предположим, что $A^*(\mathrm{pt}) \supset \mathbb{Q}$. Покажем, как с помощью теоремы Римана–Роха вычислить многочлен следа. Так как над $\mathbb{Q}$ все формальные групповые законы изоморфны, всегда существует изоморфизм теорий когомологий $\theta : A \to \mathrm{CH} \otimes A^*(\mathrm{pt})$, и в силу теоремы Римана–Роха в форме Панина–Смирнова [7] справедлива следующая коммутативная диаграмма:

$$\begin{tikzcd}
A(X) \arrow[r, "\theta_X"] \arrow[d, "\mathrm{Tr}"'] & \mathrm{CH}(X) \otimes A(\mathrm{pt}) \arrow[d, "\deg^!"] \\
A(\mathrm{pt}) \arrow[r, "\theta_{\mathrm{pt}}"] & A(\mathrm{pt}).
\end{tikzcd}$$

Здесь под $\deg^!$ понимается отображение степени, сопряжённое на оператор умножения на род Тодда:

$$\deg^! = \mathrm{td}_\theta^{-1}(\mathrm{pt}) \circ \deg \circ \mathrm{td}_\theta(X) = \deg \circ \mathrm{td}_\theta(X).$$

Таким образом,

$$\mathrm{Tr}(-) = \deg(\theta_X(-) \cdot \mathrm{td}_\theta(X)).$$

Список литературы

1. А. В. Пухликов, А. Г. Хованский, *Конечно-аддитивные меры виртуальных многогранников.* — Алгебра и Анализ **4**, No. 2 (1992), 161–185.
2. B. Calmés, V. Petrov, K. Zainoulline, *Invariants, torsion indices and oriented cohomology of complete flags.* — Ann. Scie. l'École Normale Supérieure **46** (2013), 405–448.
3. A. Fröhlich, *Formal groups.* — Lect. Notes Math. **74** (1968).
4. M. Levine, F. Morel, *Algebraic Cobordism.* Spring. Monographs Mathematics (2007).
5. L. Monin, E. Smirnov, *Polyhedral models for K-theory of toric and flag varieties.* — Séminaire Lotharingien de Combinatoire **89B** (2023).
6. A. Nenashev, K. Zainoulline, *Oriented cohomology and motivic decompositions of relative cellular spaces.* — J. Pure Appl. Algebra **205** (2006), 323–340.
7. I. Panin, A. Smirnov, *Riemann–Roch theorems for oriented cohomology.* — In: Axiomatic, Enriched and Motivic Homotopy Theory (2004), pp. 261–333.

Petrov V. A., Shulga G. S. Pukhlikov–Khovansky theorem for oriented cohomology theories.

Following L. Monin and E. Smirnov we obtain a generalization of Pukhlikov–Khovansky theorem to the case of an arbitrary cohomology theory in the sense of Levine and Morel.

Санкт-Петербургский
государственный университет,
199034, Университетская наб. 7/9,
Санкт-Петербург, Россия
С.-Петербургское отделение
Математического института
им. В. А.Стеклова РАН,
наб. р. Фонтанки 27,
191023, С.-Петербург, Россия
E-mail: victorapetrov@googlemail.com

Поступило 13 июня 2024 г.

Санкт-Петербургский
государственный университет,
Университетская наб. 7/9,
199034 Санкт-Петербург, Россия
E-mail: gsdextrous@gmail.com