Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 531, 2024 г.

И. М. Певзнер

Существование корневой подгруппы, которую данный элемент переводит в противоположную. II

Настоящая работа является непосредственным продолжением статей автора [5] и [7]. В [5] в теореме 6 доказывалось, что для любого не скалярного элемента $g \in G_{\mathrm{sc}}(\mathrm{E}_6, K)$ существует корневой элемент алгебры Ли, переходящий в противоположный корневой элемент. Этот результат использовался для построения некоторого аналога разложения Брюа, полезного при изучении классов сопряженных элементов. К сожалению, непосредственный перенос доказательства этой теоремы на случай других систем корней не проходил.

Позднее в [7] доказывалось, что этот результат выполняется для всех систем корней одной длины над алгебраически замкнутым полем. В настоящей статье он обобщается на случай произвольного поля, в котором больше 5 элементов. К сожалению, используемые методы не позволяют убрать это ограничение. Однако мы надеемся в ближайшее время все же закончить доказательство, проходящее для произвольного поля.

Пусть K – поле, Φ – система корней одной длины, V – соответствующая полупростая алгебра Ли, а $G = G_{\mathrm{ad}}(\Phi, K)$ – соответствующая присоединенная группа. Обозначим через δ максимальный корень системы Φ.

Как известно (см., например, [4] для более подробного изложения и дальнейших ссылок), в V существует базис Шевалле $\{e_\alpha, \alpha \in \Phi; h_\alpha, \alpha \in \Pi\}$, где Π – фундаментальная система корней. При этом все h_α из подалгебры Картана; $[e_\alpha, e_{-\alpha}] = h_\alpha$; $[h_\alpha, e_\beta] = A_{\alpha\beta} e_\beta$, где $A_{\alpha\beta} = 2(\alpha, \beta)/(\alpha, \alpha) \in \mathbb{Z}$ – числа Картана; $[e_\alpha, e_\beta] = N_{\alpha\beta} e_{\alpha+\beta}$ при $\alpha + \beta \in \Phi$ и $[e_\alpha, e_\beta] = 0$ при $\alpha + \beta \notin \Phi$ и $\beta \neq -\alpha$, где $N_{\alpha\beta} = \pm 1$ – структурные константы. Коэффициент в разложении вектора $x \in V$ по этому базису при e_α обозначим x^α.

Ключевые слова: группы Шевалле, корневые элементы.

Лемма 1. *Пусть $x \in V$ – корневой элемент, а $h = x_\alpha(a)$. Тогда коэффициенты в разложении hx по базису Шевалле есть многочлены от a не более чем 2-й степени.*

Доказательство. Хорошо известно (см, например, [13]), что действие $x_\alpha(a)$ на базисе Шевалле описывается формулами: $x_\alpha(a)e_\beta = e_\beta$ при $\angle(\alpha,\beta) < 2\pi/3$, $x_\alpha(a)e_\beta = e_\beta + N_{\alpha\beta}ae_{\alpha+\beta}$ при $\angle(\alpha,\beta) = 2\pi/3$, $x_\alpha(a)e_{-\alpha} = e_{-\alpha} + ah_\alpha - a^2e_\alpha$ и $x_\alpha(a)h_\beta = h_\beta - A_{\beta\alpha}ae_\alpha$. Так как x линейно раскладывается по базису Шевалле, то коэффициенты в разложении hx по нему действительно есть многочлены от a не более чем 2-й степени. □

Как известно, по аналогии с углом между корнями можно ввести понятие угла между корневыми элементами алгебры Ли (и, соответственно, между корневыми элементами группы Шевалле). Скажем, в статье [7] в утверждении 3 доказывается, что пару корневых элементов x и y алгебры Ли можно привести, действуя группой Шевалле, к виду ae_α и be_β, причем угол между α и β определен однозначно. Этот угол и можно назвать углом между x и y. Разумеется, понятие угла было известно и использовалось задолго до статьи [7]; ссылка на утверждение, как и, собственно, оно само, были сделаны лишь из-за сложности указания первоисточника.

Лемма 2. *Пусть x и y – два корневых элемента алгебры V. Тогда:*

(1) $\angle(x,y) \leq 2\pi/3 \Leftrightarrow [[x,y],x] = 0$;
(2) $\angle(x,y) = \pi \Leftrightarrow [[x,y],x] = kx$, *где* $k \in K^*$.

Доказательство. Отметим, что все выражения инвариантны под действием $G_{\mathrm{ad}}(\Phi,K)$ – левая часть по утверждению 3 [7], а правая по определению. Поэтому, снова по утверждению 3 [7], можно считать, что $x = ae_\alpha, y = be_\beta$. Тогда, по коммутационным формулам, получаем:

- если $\angle(\alpha,\beta) \leq \pi/2$, то $[x,y] = [ae_\alpha, be_\beta] = 0$ и, следовательно, $[[x,y],x] = 0$;
- если $\angle(\alpha,\beta) = 2\pi/3$, то $[x,y] = [ae_\alpha, be_\beta] = abN_{\alpha\beta}e_{\alpha+\beta}$ и, следовательно, $[[x,y],x] = [abN_{\alpha\beta}e_{\alpha+\beta}, ae_\alpha] = 0$;
- если $\angle(\alpha,\beta) = \pi$, то $[x,y] = [ae_\alpha, be_\beta] = abh_\alpha$ и, следовательно, $[[x,y],x] = [abh_\alpha, e_\alpha] = 2abe_\alpha$. □

Лемма 3. *Пусть K – произвольное поле, x – корневой элемент V, $h = x_\alpha(a)$, $g \in G_{\mathrm{ad}}(\Phi,K)$ и $\angle(x,gx) = \pi$. Тогда существует такой* *ненулевой многочлен $f(y)$ степени не выше шестой, что $\angle(hx, ghx) < \pi \Leftrightarrow f(a) = 0$.*

Доказательство. По лемме 2, $\angle(hx, ghx) \leq 2\pi/3 \Leftrightarrow [[hx, ghx], hx] = 0$ и $\angle(hx, ghx) = \pi \Leftrightarrow [[hx, ghx], hx] = khx$, где $k \in K^*$. По лемме 1, коэффициенты hx есть многочлены не выше второй степени. Тогда, по коммутационным формулам, коэффициенты $[[hx, ghx], hx]$ есть многочлены не выше шестой степени. По лемме 1 [7], существует корень $\beta \in \Phi$, такой что $(hx)^\beta \neq 0$. Таким образом, $\angle(hx, ghx) = \pi \Leftrightarrow [[hx, ghx], hx] = khx \Leftrightarrow ([[hx, ghx], hx])^\beta \neq 0$, то есть не равен 0 некоторый многочлен f не выше шестой степени. Осталось заметить, что если $a = 0$, то $hx = x$ и $\angle(hx, ghx) = \angle(x, gx) = \pi$, значит $f(0) \neq 0$. Поэтому найденный многочлен ненулевой. $\square$

Теорема. *Пусть Φ – система корней одной длины, K – поле и $|K| > 5$, $g \in G_{\mathrm{ad}}(\Phi, K)$ и $g \neq e$. Тогда существует корневой элемент алгебры Ли x, такой что угол между корневыми элементами x и gx равен π.*

Доказательство. Рассмотрим алгебраическое замыкание $\bar{K}$ и действие группы $G_{\mathrm{ad}}(\Phi, \bar{K})$ на соответствующей алгебре Ли $\bar{V}$. Выберем в $\bar{V}$ базис Шевалле. Тогда V можно отождествить с подмножеством $\bar{V}$, состоящим из векторов с коэффициентами из поля K, а $G_{\mathrm{ad}}(\Phi, K)$ – с подгруппой $G_{\mathrm{ad}}(\Phi, \bar{K})$, состоящей из матриц с коэффициентами из K. При этом действия $G_{\mathrm{ad}}(\Phi, K)$ на V и $G_{\mathrm{ad}}(\Phi, \bar{K})$ на $\bar{V}$ согласованны. В частности, наш g можно рассматривать как элемент $G_{\mathrm{ad}}(\Phi, \bar{K})$. По основному результату работы [7], существует корневой элемент $\bar{x} \in \bar{V}$, такой что угол между $\bar{x}$ и $g\bar{x}$ равен π. Наша цель – изменить его так, чтобы это условие сохранилось, но сам $\bar{x}$ попал в V, то есть все его коэффициенты в разложении по базису Шевалле стали лежать в K.

Далее, отметим, что угол между x и gx равен углу между hx и $hgx = (hgh^{-1})(hx)$ при $h \in G_{\mathrm{ad}}(\Phi, K)$. Иначе говоря, если искомый корневой элемент существует для g, то он существует и для любого hgh^{-1} при $h \in G_{\mathrm{ad}}(\Phi, K)$. Аналогично, можно вместо x взять $\bar{x}$: $\pi = \angle(\bar{x}, g\bar{x}) = \angle(h\bar{x}, (hgh^{-1})(h\bar{x}))$; при этом можно выбрать $h \in G_{\mathrm{ad}}(\Phi, K)$ так, чтобы $(h\bar{x})^\delta \neq 0$. Если искомый элемент из V существует для hgh^{-1}, то, по вышесказанному, он существует и для g. Поэтому можно считать, что $\bar{x}^\delta \neq 0$. Так как $\bar{x}$ можно умножить на любое число, то можно считать даже, что $\bar{x}^\delta = 1$. По утверждению 2 [7],

$$\bar{x} = x_{-\delta}(\cdot) \cdot \prod_{\angle(\gamma,\delta)=2\pi/3} x_\gamma\Big(N_{\gamma\delta}\bar{x}^{\delta+\gamma}\Big)e_\delta. \qquad (*)$$

Отметим, что если коэффициенты у всех сомножителей в правой части $(*)$ лежат в K, то и все коэффициенты $\bar{x}$ лежат в K, что нам и требуется. Если к обеим частям равенства $(*)$ применить $x_\alpha(a)$ при $\angle(\alpha, \delta) = 2\pi/3$, то в правой части изменится только коэффициент при x_α, он станет равен $N_{\alpha\delta}\bar{x}^{\delta+\alpha} + a$, и коэффициент при $x_{-\delta}$. Далее, по лемме 3, существует ненулевой многочлен $f(y)$ не более чем шестой степени, такой что $f(a) \neq 0 \Leftrightarrow \angle(x_\alpha(a)\bar{x}, gx_\alpha(a)\bar{x}) = \pi$; при этом в лемме 3 мы, в данном случае, полагаем поле равным $\bar{K}$, поэтому и $f(y) \in \bar{K}[y]$. Рассмотрим $f_1(y) = f(y - N_{\alpha\delta}\bar{x}^{\delta+\alpha})$. $f_1(y)$ тоже ненулевой многочлен не больше чем шестой степени, значит он имеет не более шести корней в $\bar{K}$ и, тем более, не более шести корней в K. Так как в K больше шести элементов, то существует $b \in K$, $f_1(b) \neq 0$, откуда $f(b - N_{\alpha\delta}\bar{x}^{\delta+\alpha}) \neq 0$. Полагая $a = b - N_{\alpha\delta}\bar{x}^{\delta+\alpha}$, получаем, что $\angle(x_\alpha(a)\bar{x}, gx_\alpha(a)\bar{x}) = \pi$. При этом коэффициент в правой части $(*)$ при x_α равен b и лежит в K, а коэффициенты при других x_γ не изменились. Повторяя эту процедуру для всех корней $\gamma \in \Phi$, $\angle(\gamma, \delta) = 2\pi/3$ и, после этого, для корня $-\delta$, получим, что все коэффициенты правой части $(*)$ лежат в поле K, а угол между полученным вектором и его образом под действием g по-прежнему равен π, что и требовалось. $\square$

Список литературы

1. А. Борель, *Свойства и линейные представления групп Шевалле.* — Семинар по алгебраическим группам, Мир, Москва (1973), 9–59.
2. Н. Бурбаки, *Группы и алгебры Ли.* — Главы IV–VI, Мир, Москва (1972).
3. Н. Бурбаки, *Группы и алгебры Ли.* — Главы VII–VIII, Мир, Москва (1978).
4. И. М. Певзнер, *Геометрия корневых элементов в группах типа* E_6. — Алгебра и анализ **23**, No. 3 (2011), 261–309.
5. И. М. Певзнер, *Ширина групп типа* E_6 *относительно множества корневых элементов*, I. — Алгебра и анализ **23**, No. 5 (2011), 155–198.
6. И. М. Певзнер, *Ширина групп типа* E_6 *относительно множества корневых элементов*, II. — Зап. научн. семин. ПОМИ **386** (2011), 242–264.
7. И. М. Певзнер, *Существование корневой подгруппы, которую данный элемент переводит в противоположную.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **460** (2017), 190–202.
8. Т. А. Спрингер, *Линейные алгебраические группы.* — Алгебраическая геометрия – 4, Итоги науки и техн. Сер. Соврем. проблемы мат. Фундам. направления, **55**, ВИНИТИ, Москва, (1989), 5–136.
9. Р. Стейнберг, *Лекции о группах Шевалле.* Мир, Москва (1975).
10. Дж. Хамфри, *Линейные алгебраические группы.* Наука, Москва (1980).
11. Дж. Хамфри, *Введение в теорию алгебр Ли и их представлений.* МЦНМО, Москва (2003).

12. T. A. Springer, *Linear algebraic groups.* Progress in Mathematics, **9**, Birkhäuser Boston Inc., Boston (1998).
13. N. A. Vavilov, E. B. Plotkin, *Chevalley groups over commutative rings. I. Elementary calculations.* — Acta Applicandae Math. **45** (1996), 73–115.

Pevzner I. M. The existence of root subgroup translated by a given element into its opposite. II.

Let Φ be a simply-laced root system, $|K| > 5$, $G = G_{ad}(\Phi, K)$ the adjoint group of type Φ over K. Then for every non-trivial element $g \in G$ there exists a root element x of the Lie algebra of G such that x and gx are opposite.

РГПУ им. А. И. Герцена, Санкт-Петербург
E-mail: pevzner_igor@mail.ru

Поступило 22 апреля 2024 г.