Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 531, 2024 г.

Р. А. Лубков

НАДГРУППЫ ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ГРУПП В ПОЛИВЕКТОРНЫХ ПРЕДСТАВЛЕНИЯХ

**Памяти моего учителя
Николая Александровича Вавилова**

Введение

Многие математики считают задачу описания расположения подгрупп полной линейной группы над коммутативным кольцом неисчерпаемой. Действительно, решение данной задачи в различных ситуациях и контекстах стало основной нескольких сотен научных работ многих специалистов по алгебраическим группам в Петербурге, Москве, Новосибирске и во многих других городах и странах. В простейших ситуациях задачу удалось полностью решить ещё 1980-х годах. Однако, даже для полной линейной группы на текущий момент задача остается открытой для каких-то специальных случаев вложений групп.

Систематическое описание задачи было предложено Зеноном Боревичем и Николаем Вавиловым после знаменитого проекта классификации максимальных подгрупп конечных простых групп. В 1984 году Майкл Ашбахер доказал Subgroup structure theorem, которая утверждает, что каждая максимальная подгруппа конечной классической группы либо попадает в один из восьми явно описанных классов $\mathcal{C}_1$–$\mathcal{C}_8$, либо является "почти" простой группой в неприводимом представлении, попадая в класс $\mathcal{S}$. С тех пор такие математики как Питер Клейдман, Мартин Либек, Роджер Дай, Оливер Кинг, Ли Шанчжы и др. исследовали максимальность подгрупп из классов Ашбахера. Однако, все результаты были получены только для некоторых частных случаев полей или полулокальных колец. До конца XX века про описание надгрупп для произвольных коммутативных колец было известно

Ключевые слова: полная линейная группа, элементарная подгруппа, поливекторные представления, внешняя степень, инвариантные формы, многочлены Плюккера, решетка подгрупп, общий элемент.

Исследование выполнено при финансовой поддержке Российского научного фонда, грант No. 22-71-10001.

чрезвычайно мало. В связи с этим Николай Вавилов выделил несколько классов "больших" подгрупп из проекта классификации Ашбахера, надгруппы которых можно надеяться описать. И, действительно, многочисленные положительные результаты на эту тему были получены Евгением Башкировым, Зеноном Боревичем, Николаем Вавиловым, Яковом Нужиным, Виктором Петровым, Алексеем Степановым и другими авторами. Однако, все они относятся к классам Ашбахера $\mathcal{C}_1$–$\mathcal{C}_8$, тогда как более массовым случаем является исключительный класс Ашбахера $\mathcal{S}$. Мы не будем даже пытаться охватить общий контекст, а отошлём читателя к обзорам [14, 24], которые содержат необходимые предварительные сведения, полную историю и дальнейшую библиографию.

Для произвольных колец максимальность простых групп в неприводимых представлениях практически не изучалась. Это связано с некоторой хаотичной природой групп, расположенных в этом классе. Любой технический шаг на пути решения задачи описания надгрупп такой, как вычисление уровня или описание нормализатора, является *намного* более сложным, чем для групп из классов $\mathcal{C}_1$–$\mathcal{C}_8$ и требует детального подхода. Однако, даже в классе $\mathcal{S}$ можно выделить несколько ситуаций, где задача описания надгрупп выглядит очень реалистичной.

Напомним, что для класса Ашбахера $\mathcal{C}_8$, состоящего из классических подгрупп, проблема была полностью решена Виктором Петровым [21–23,27], в частности были описаны все надгруппы элементарной ортогональной группы $\mathrm{EO}_n(R)$ с естественными условиями на кольцо R. Заметим, что для $n = 6$ существует исключительный изоморфизм Клейна $\mathrm{EO}_6(R) \cong \bigwedge^2 \mathrm{E}_4(R)$, где $\bigwedge^2 \mathrm{E}_n(R)$ обозначает бивекторное представление элементарной группы. Таким образом, не возникает больших сомнений, что стандартное описание надгрупп для внешнего квадрата элементарной группы (или, более общо, для внешних степеней элементарной группы) может быть выполнено, при этом даже похожими методами как для классических групп.

В настоящей работе, которая начиналась как курсовая работа автора под руководством Н. А. Вавилова, мы инициируем систематическое изучение $\bigwedge^m \mathrm{E}_n(R)$ для произвольного коммутативного кольца R, чтобы в дальнейшем классифицировать надгруппы H такие, что

$$\textstyle\bigwedge^m \mathrm{E}_n(R) \leqslant H \leqslant \mathrm{GL}_{\binom{n}{m}}(R).$$

Предположительным ответом является *стандартное описание надгрупп*, которое можно сформулировать следующим образом. Каждая промежуточная подгруппа H задаётся однозначно определённым уровнем этой подгруппы $\mathrm{lev}(H)$. В общем случае уровень представляет собой набор из m идеалов $(A_0, \dots, A_{m-1})$ в кольце R с определёнными соотношениями. Причём в отличие от других похожих ситуаций невозможно существенно упростить этот ответ с дополнительными предположениями на основное кольцо такими, как R – нётерово или $2, 3 \in R^*$.

В случае полей задача о надгруппах $\bigwedge^m \mathrm{E}_n(R)$ решена частично. Для конечных полей Брюс Куперстейн доказал максимальность нормализатора элементарной группы в бивекторном представлении [2]. А для поливекторного представления над алгебраически замкнутым полем описание надгрупп элементарной группы следует из результатов Гари Зайтца о максимальных подгруппах классических алгебраических групп [1, 13].

Как мы отмечали выше, из-за некоторого сходства с классическими группами, не ожидалось, что на пути решения этой задачи будут возникать непреодолимые препятствия. Однако, в действительности оказалось, что задача о надгруппах для поливекторных представлений $\mathrm{E}_n(R)$ является *значительно* более сложной, чем нам представлялось изначально. Полное решение разбилось на серию работ [7–11, 25, 26], которые стали основой для кандидатской диссертации автора. Далее мы приводим все основные полученные результаты в направлении решения этой задачи в наиболее удобной для читателя последовательности:

- Вычисление уровня и нормализаторов связных (т.е. совершенных) промежуточных подгрупп H [9, 10]. В §2 мы сопоставляем каждой такой подгруппе *нижний уровень* H.
- Извлечение элементарной трансвекции из H. В отличие от классических групп стандартные методы извлечения для $\bigwedge^m \mathrm{E}_n(R)$ недоступны. Поэтому мы используем альтернативный подход, разработанный Алексеем Степановым и автором. Для этих целей мы в §3 строим систему инвариантных форм, задающих $\bigwedge^m \mathrm{GL}_n(\_)$ [8, 25, 26].
- Доказательство включения в нормализатор. Используя метод из предыдущего пункта в §4 мы утверждаем, что решётка подгрупп является стандартной. Другими словами, мы устанавливаем включение промежуточной подгруппы в нормализатор [7, 11].

Отметим также, что ситуация с несколькими идеалами сложилась и для другого тесно связанного случая – задачи описания подгрупп H полной линейной группы $\mathrm{GL}_n(R)$ над коммутативным кольцом R, содержащих тензорное произведение элементарных подгрупп

$$\mathrm{E}_{n_1}(R) \otimes \ldots \otimes \mathrm{E}_{n_t}(R) \leqslant H \leqslant \mathrm{GL}_n(R),$$

где $n = n_1 \ldots n_t$. Несмотря на то, что данная задача принадлежит классу Ашбахера $\mathcal{C}_4 + \mathcal{C}_7$, который априори является более простым, чем класс $\mathcal{S}$, даже для анализа первого шага с двумя сомножителями авторам было небанально правильно сформулировать ответ, не говоря уже про доказательства. Оказалось, что в общем случае подгруппы параметризуются не одним идеалом кольца, как это казалось из общих соображений, а тремя идеалами [16].

§1. Внешние степени элементарных групп

Обозначим через $[n]$ множество $\{1, 2, \ldots, n\}$. Элементами m-й внешней степени этого множества $\bigwedge^m[n]$ являются упорядоченные подмножества $I \subseteq [n]$ мощности m без повторений:

$$\textstyle\bigwedge^m[n] = \{(i_1, \ldots, i_m) \mid 1 \leqslant i_1 < i_2 < \cdots < i_m \leqslant n\}.$$

Пусть R – это коммутативное кольцо и пусть R^n – правый свободный R-модуль со стандартным базисом $\{e_1, \ldots, e_n\}$. Тогда $\bigwedge^m R^n$ – свободный модуль ранга $N = \binom{n}{m}$ с базисом $e_{i_1} \wedge \cdots \wedge e_{i_m}$, где $(i_1, \ldots, i_m) \in \bigwedge^m[n]$. Также определим произведения $e_{i_1} \wedge \cdots \wedge e_{i_m}$ для произвольного множества $\{i_1, \ldots, i_m\}$ с помощью правила $e_{\sigma(i_1)} \wedge \cdots \wedge e_{\sigma(i_m)} = \mathrm{sgn}(\sigma)\, e_{i_1} \wedge \cdots \wedge e_{i_m}$ для любой перестановки $\sigma \in S_m$.

Для каждого $m \leqslant n$ определим гомоморфизм Бине–Коши
$\bigwedge^m \colon \mathrm{GL}_n(R) \longrightarrow \mathrm{GL}_N(R)$ следующим образом:

$$\textstyle\bigwedge^m(g)(e_{i_1} \wedge \cdots \wedge e_{i_m}) := (ge_{i_1}) \wedge \cdots \wedge (ge_{i_m}) \text{ для } e_{i_1}, \ldots, e_{i_m} \in R^n.$$

Следовательно, $\bigwedge^m$ является представлением группы $\mathrm{GL}_n(R)$. Оно называется m-м *векторным представлением* или m-м *фундаментальным представлением*. Образ группы $\bigwedge^m\big(\mathrm{GL}_n(R)\big)$ называется m-ой внешней степенью полной линейной группы. Мы отсылаем читателя к работе [20], где авторы подробно обсуждают строение этой группы. Напомним, что (*абсолютная*) элементарная группа $\mathrm{E}_n(R)$ является подгруппой в $\mathrm{GL}_n(R)$, порождённой всеми элементарными трансвекциями $t_{i,j}(\xi) = e + \xi e_{i,j}$, где $1 \leqslant i \neq j \leqslant n$, $\xi \in R$. Тогда внешняя степень элементарной группы $\bigwedge^m \mathrm{E}_n(R)$ определяется как образ $\mathrm{E}_n(R)$ под действием $\bigwedge^m$.

Отметим, что алгебраическая групповая схема $\bigwedge^m \mathrm{GL}_n$ по определению является *категорным* образом групповой схемы GL_n под действием гомоморфизма Бине–Коши. Группа $\bigwedge^m \mathrm{GL}_n(R)$ определяется как R-точки функтора $\bigwedge^m \mathrm{GL}_n = \bigwedge^m \mathrm{GL}_n(\_)$. (Абстрактные) группы $\bigwedge^m\big(\mathrm{GL}_n(R)\big)$ и $\bigwedge^m \mathrm{GL}_n(R)$ не совпадают для произвольного кольца R. В общем случае верно лишь включение $\bigwedge^m\big(\mathrm{GL}_n(R)\big) \leqslant \bigwedge^m \mathrm{GL}_n(R)$.

§2. Вычисления уровня

Вычисление уровня промежуточных подгрупп является традиционно первым шагом к стандартному описанию надгрупп. Пусть H – надгруппа внешней степени элементарной группы $\bigwedge^m \mathrm{E}_n(R)$:

$$\bigwedge^m \mathrm{E}_n(R) \leqslant H \leqslant \mathrm{GL}_N(R).$$

И для любых индексов $I, J \in \bigwedge^m[n]$ пусть $A_{I,J}$ обозначает подмножество кольца R:

$$A_{I,J} := \{\xi \in R \mid t_{I,J}(\xi) \in H\}.$$

Как обычно, диагональные множества $A_{I,I}$ равны всему кольцу R для произвольного $I \in \bigwedge^m[n]$. Оказывается, что $A_{I,J}$ на самом деле являются идеалами. Таким образом, далее мы построим D-сеть идеалов кольца R в терминологии Зенона Боревича [17].

Определим *расстояние* между индексами I и J как мощность множества $I \cap J$:

$$d(I, J) = |I \cap J|.$$

Эта комбинаторная характеристика играет такую же роль, как функция расстояния $d(\lambda, \mu)$ для корней λ и μ на весовой диаграмме системы корней.

Предложение 1. *Идеалы $A_{I,J}$ зависят не от самих индексов I, J, а только от расстояния между (I, J). Более того, $\{A_0, \dots, A_{m-1}\}$ взаимосвязаны следующими соотношениями*:

$$\begin{gathered} A_k \leqslant A_{k+1}, \ \text{ для } n \geqslant 3m-2k; \\ A_0 \geqslant A_1 \geqslant A_2 \geqslant \ldots \geqslant A_{m-2} \geqslant A_{m-1}; \\ \tbinom{n-2}{m-1} \cdot A_{m-2} \leqslant A_{m-1}. \end{gathered}$$

Заметим, что если $n \geqslant 3m$, тогда все идеалы совпадают; и тогда множество $A = A_{I,J}$ называется *уровнем* надгруппы H. В противном случае для $n < 3m$ уровень содержит не более m идеалов $(A_0, \dots, A_{m-1})$.

Следующие три теоремы являются главными результатами работы [9]. Но прежде чем сформулировать их, определим (*относительную*) *элементарную группу уровня* A, где A – это какой-то идеал в R. Эта группа является нормальным замыканием $\mathrm{E}_n(A)$ в $\mathrm{E}_n(R)$:

$$\mathrm{E}_n(R, A) := \langle t_{i,j}(\xi), 1 \leqslant i \neq j \leqslant n, \xi \in A \rangle^{\mathrm{E}_n(R)}.$$

Теорема 2 (Вычисление уровня)**.** *Пусть R – коммутативное кольцо и пусть $n \geqslant 3m$. Для произвольной надгруппы H группы $\bigwedge^m \mathrm{E}_n(R)$ существует единственный максимальный идеал A кольца R такой, что*

$$\textstyle\bigwedge^m \mathrm{E}_n(R) \cdot \mathrm{E}_N(R, A) \leqslant H.$$

А именно, если трансвекция $t_{I,J}(\xi)$ принадлежит группе H, тогда $\xi \in A$.

В общем случае вычисление уровня формулируется с помощью нескольких идеалов. m-набор идеалов $\mathbb{A} = (A_0, \dots, A_{m-1})$ кольца R называется *допустимым*, если $\mathbb{A}$ удовлетворяет соотношениям в Предложении 1. Тогда каждому допустимому m-набору $\mathbb{A}$ соответствует группа $\mathrm{E}\bigwedge^m \mathrm{E}_n(R, \mathbb{A}) := \bigwedge^m \mathrm{E}_n(R) \cdot \mathrm{E}_N(R, \mathbb{A})$. Эта группа определяется как подгруппа, порождённая $\bigwedge^m \mathrm{E}_n(R)$ и всеми элементарными трансвекциями $t_{I,J}(\xi)$, где $\xi \in A_{I,J}$:

$$\textstyle\mathrm{E}\bigwedge^m \mathrm{E}_n(R, \mathbb{A}) = \bigwedge^m \mathrm{E}_n(R) \cdot \langle t_{I,J}(\xi),\ \xi \in A_{I,J} \rangle.$$

Теорема 2′ (Вычисление уровня)**.** *Пусть R – коммутативное кольцо, и пусть $n \geqslant 4$. Для произвольной надгруппы H группы $\bigwedge^m \mathrm{E}_n(R)$ существует сеть идеалов $\mathbb{A}$ кольца R такая, что*

$$\textstyle\bigwedge^m \mathrm{E}_n(R) \cdot \mathrm{E}_N(R, \mathbb{A}) \leqslant H.$$

А именно, если трансвекция $t_{I,J}(\xi)$ принадлежит группе H, тогда $\xi \in A_{I,J}$.

Пусть теперь $\rho_A\colon \mathrm{GL}_n(R) \longrightarrow \mathrm{GL}_n(R/A)$ обозначает гомоморфизм редукции.

Теорема 3 (Редукция уровня)**.** *Пусть $n \geqslant 3m$. Тогда для любого идеала $A \trianglelefteq R$ верно*

$$\textstyle N_{\mathrm{GL}_N(R)}\big(\mathrm{E}\bigwedge^m \mathrm{E}_n(R, A)\big) = \rho_A^{-1}\big(\bigwedge^m \mathrm{GL}_n(R/A)\big).$$

§3. Построение инвариантных форм

Нашей ближайшей целью является определить $\bigwedge^m \mathrm{GL}_n(R)$ как стабилизатор некоторой инвариантной формы. Аналогичные формы хорошо известны для классических или исключительных групп в стандартном представлении для произвольных колец, см. [18, 19, 21–23]. Общий подход к данной задаче был недавно разработан Скипом Гарибальди и Робертом Гуральником [4, 5].

3.1. Внешние степени как стабилизатор инвариантных форм I. Следующий результат позволяет представить группу $\bigwedge^m \mathrm{GL}_n(K)$, как стабилизатор *единственной* формы для поля K, см. [3, глава 2, разделы 5–7] для поля характеристики 0 и [12, теорема 1 (4)] для полей положительной характеристики.

Предложение 4. *Пусть K – алгебраически замкнутое поле. Тогда $\bigwedge^m \mathrm{GL}_n(K)$ является группой подобий формы только в случае $n/m \in \mathbb{N}$ и $n/m \geqslant 3$. Более того, эта форма единственна в пространстве n/m-тензоров и равна*

- $q^m_{[n]}(x) = \sum \mathrm{sgn}(I_1, \dots, I_{\frac{n}{m}})\, x_{I_1} \dots x_{I_{\frac{n}{m}}}$ *для чётных m;*
- $q^m_{[n]}(x) = \sum \mathrm{sgn}(I_1, \dots, I_{\frac{n}{m}})\, x_{I_1} \wedge \dots \wedge x_{I_{\frac{n}{m}}}$ *для нечётных m,*

где суммы в обоих случаях берутся по всем неупорядоченным разбиениям множества $[n]$ в m-элементные подмножества $I_1, \dots, I_{\frac{n}{m}}$.

Далее мы будем использовать единое обозначение $q(x)$ для этих форм и предполагать, что m чётно (если не указано иное).

Таким образом, в случае алгебраически замкнутого поля K абстрактная группа $\bigwedge^m \mathrm{GL}_n(K)$ состоит из матриц $g \in \mathrm{GL}_N(K)$ для которых существует мультипликатор $\lambda = \lambda(g) \in K^*$ такой, что $q(gx) = \lambda(g)q(x)$ для всех $x \in K^N$. Вычисление λ на диагональной матрице $d_i(\xi) \in \mathrm{GL}_n(K)$ показывает, что $\lambda(g) = \det(g)$. Так как коэффициенты этих форм равны ± 1, $q(x)$ определено над $\mathbb{Z}$. Это рассуждение позволяет предположить, что для произвольных колец ситуация будет аналогична. Действительно, непосредственное вычисление показывает, что

$$q(\textstyle\bigwedge^m g \cdot x) = \det(g) \cdot q(x) \text{ для } g \in \mathrm{GL}_n(R).$$

Чтобы получить аналогичный результат Предложения 4 для произвольных колец, рассмотрим соответствующую $q(x)$ полилинейную форму. Пусть $k := \frac{n}{m} \in \mathbb{N}$, тогда (полной) *поляризацией* формы $q(x) =$

$q^m_{[n]}(x)$ является k-линейная форма $f^m_{[n]}$:

$$f(x) = f^m_{[n]}(x^1, \ldots, x^k) = \sum \operatorname{sgn}(I_1, \ldots, I_k)\, x^1_{I_1} \ldots x^k_{I_k},$$

где сумма берется по всем *упорядоченным* разбиениям множества $[n]$ в m-элементные подмножества.

Предложение 5. *Пусть R – произвольное коммутативное кольцо и $n/m \in \mathbb{N}$. Форма f инвариантна под действием $\bigwedge^m \mathrm{E}_n(R)$ и она умножается на ξ под действием диагонального элемента $\bigwedge^m d_i(\xi)$.*

Более того, оказывается, что никаких других k-линейных форм, инвариантных относительно $\bigwedge^m \mathrm{E}_n(R)$, не существует.

Предложение 6. *Пусть R – произвольное кольцо и $n/m \in \mathbb{N}$. Предположим, что некоторая k-линейная форма D инвариантна относительно группы $\bigwedge^m \mathrm{E}_n(R)$. Тогда D является кратным формы $f = f^m_{[n]}(x^1, \ldots, x^k)$.*

Определим группу $G_f(R)$ как группу линейных преобразований, сохраняющих форму $f(x^1, \ldots, x^k)$:

$$G_f(R) := \{g \in \mathrm{GL}_N(R) \mid f(gx^1, \ldots, gx^k) = f(x^1, \ldots, x^k)\}.$$

Она является аналогом группы Шевалле для внешних степеней. Также определим аналог расширенной группы Шевалле:

$$\begin{aligned}\overline{G}_f(R) := \{g \in \mathrm{GL}_N(R) \mid\ &\text{существует } \lambda = \lambda(g) \in R^* \text{ такая, что}\\ &f(gx^1, \ldots, gx^k) = \lambda(g) f(x^1, \ldots, x^k)\}.\end{aligned}$$

Очевидно, что функторы $R \mapsto \overline{G}_f(R)$ и $R \mapsto G_f(R)$ определяют аффинные групповые схемы над $\mathbb{Z}$. Наши результаты позволяют предположить, что определённая таким образом группа $\overline{G}_f(R)$ изоморфна $\bigwedge^m \mathrm{GL}_n(R)$. И действительно, следующая теорема предоставляет точный ответ на нашу гипотезу, см. [10, Теорема 18].

Теорема 7. *Если n/m является целым не меньше 3, тогда группа $\bigwedge^m \mathrm{GL}_n(R)$ совпадает с $\overline{G}_f(R)$ и $\bigwedge^m \mathrm{SL}_n(R)$ совпадает с $G_f(R)$ для произвольного коммутативного кольца R.*

Замечание. Если $n = 2m$ и 2 – не делитель нуля, тогда $\overline{G}_f(R) = \mathrm{GO}_N(R)$ или $\mathrm{GSp}_N(R)$ в зависимости от чётности m. Таким образом, в этом случае $\bigwedge^m \mathrm{GL}_n(R)$ является подгруппой ортогональной или симплектической группы, соответственно. Более того, если $(n, m) = (4, 2)$, тогда $\mathrm{GO}_6(R)$ равна $\bigwedge^2 \mathrm{GL}_4(R)$.

В общем случае стабилизатор квадратичной формы и её поляризации не совпадают. Следовательно, верно лишь включение $\mathrm{GO}_N(R) \leqslant \overline{G}_f(R)$ или $\mathrm{GSp}_N(R) \leqslant \overline{G}_f(R)$.

Доказательство основано на лемме Уотерхауза [15, Theorem 1.6.1]. Этот результат позволяет свести проверку изоморфизма аффинных групповых схем до проверки изоморфизма их групп точек над алгебраически замкнутыми полями и двойными числами над ними. В нашем случае проверка сводится к следующим двум ключевым шагам: необходимо проверить теорему для алгебраически замкнутых полей и доказать, что схемы $\overline{G}_f$, G_f являются гладкими. Последнее условие равносильно вычислению размерностей соответствующих алгебр Ли.

Предложение 8. *Если $n \neq 2m$, тогда для любого поля K размерность алгебры Ли $\mathrm{Lie}(\overline{G}_f(K))$ не превосходит n^2, в то время как размерность алгебры Ли $\mathrm{Lie}(G_f(K))$ не превосходит n^2-1.*

Таким образом, проверив все условия, мы устанавливаем необходимые изоморфизмы, см. [10, Теорема 1].

Теорема 9. *Если $n \neq 2m$, тогда имеют место изоморфизмы $\overline{G}_f \cong \bigwedge^m \mathrm{GL}_n$, $G_f \cong \bigwedge^m \mathrm{SL}_n$ аффинных групповых схем над $\mathbb{Z}$.*

Эта теорема показывает, что для произвольных колец класс трансвекций из $\bigwedge^m \mathrm{GL}_n(R)$ строго больше, чем образы $\bigwedge^m g$, где $g \in \mathrm{GL}_n(R)$, см. [20, §9] для произвольной внешней степени или [15] для внешних квадратов. Для специальной линейной группы ситуация похожа. Точная последовательность аффинных групповых схем

$$1 \longrightarrow \mu_d \longrightarrow \mathrm{SL}_n \longrightarrow \mathrm{SL}_n / \mu_d \longrightarrow 1$$

даёт точную последовательность когомологий Галуа:

$$\begin{aligned} 1 \longrightarrow \mu_d(R) \longrightarrow \mathrm{SL}_n(R) \longrightarrow \mathrm{SL}_n / \mu_d(R) & \\ \longrightarrow H^1(R, \mu_d) \longrightarrow H^1(R, \mathrm{SL}_n) \longrightarrow H^1(R, \mathrm{SL}_n / \mu_d), & \end{aligned}$$

где $d = \gcd(n, m)$. Множества всех этих когомологий хорошо известны, см., например, [6, Глава III, §2].

Множество $H^1(R, \mu_d)$ классифицирует проективные модули P ранга 1 вместе с изоморфизмом $P^{\otimes d} = R$, а отображение $H^1(R, \mu_d) \longrightarrow H^1(R, \mathrm{SL}_n)$ посылает проективный модуль P в пару $\left[\bigoplus_1^n P, \delta_P^{\mathrm{can}}\right]$, где δ_P^{can} – это канонический изоморфизм, индуцированный умножением $\delta^{\mathrm{can}} \colon R^n \longrightarrow R$.

Таким образом, фактор-группа $\bigwedge^m \mathrm{SL}_n(R)$ по $\bigwedge^m\big(\mathrm{SL}_n(R)\big)$ содержит копию группы R^*/R^{*d}. Дальнейший фактор по которой состоит из пар (P,α), где P – элемент группы Пикара $\mathrm{Pic}(R)$ такой, что $P^{\otimes m} \cong R$, а $\alpha\colon \bigoplus_1^n P \longrightarrow R^n$ – изоморфизм с условием $\delta_P^{\mathrm{can}} = \delta^{\mathrm{can}} \circ \alpha$.

3.2. Внешние степени как стабилизатор инвариантных форм II. В предыдущем параграфе мы полностью разобрали случай одной инвариантной формы. Однако, если $\frac{n}{m} \notin \mathbb{N}$, то оказывается, что у группы $\bigwedge^m \mathrm{GL}_n(R)$ существует только лишь *идеал* инвариантных форм.

Расширим определение $q(x)$ из §3.1. Ранее рассмотренная форма $q(x) = q^m_{[n]}(x)$ ассоциировалась с множеством $[n] = \{1,\dots,n\}$. В этом параграфе мы определим форму, ассоциированную с некоторыми подмножествами $[n]$ фиксированной мощности. А именно, мы определим $q^m_V(x)$ для произвольного n_1-подмножества $V \subseteq [n]$, где $n_1/m \in \mathbb{N}$:

- $q^m_V(x) = \sum \mathrm{sgn}(I_1,\dots,I_{\frac{n_1}{m}})\, x_{I_1}\dots x_{I_{\frac{n_1}{m}}}$ для чётных m;
- $q^m_V(x) = \sum \mathrm{sgn}(I_1,\dots,I_{\frac{n_1}{m}})\, x_{I_1}\wedge\dots\wedge x_{I_{\frac{n_1}{m}}}$ для нечётных m,

где суммы в обоих случаях берутся по всем неупорядоченным разбиениям множества V в m-элементные подмножества $I_1,\dots,I_{\frac{n_1}{m}}$

Как обычно, $f^m_V(x^1,\dots,x^k)$ обозначает полную поляризацию $q^m_V(x)$, где $k := \frac{n_1}{m}$. Для краткости мы будем опускать m в обозначениях $f^m_V(x^1,\dots,x^k)$ и $q^m_V(x)$.

Для определения группы Шевалле в этом случае разделим n на m с остатком: $n = lm + r$, где $l, r \in \mathbb{N}$. Рассмотрим идеал $F = F_{n,m}$ кольца $\mathbb{Z}[x_I]$, порождённый формами $f_V(x^1,\dots,x^k)$ для всевозможных ml-элементных подмножеств $V \subsetneq [n]$. Определим расширенную группу Шевалле $\overline{G}_F(R)$, как группу линейных преобразований, сохраняющих идеал F:

$$\overline{G}_F(R) := \{g \in \mathrm{GL}_N(R) \mid \text{ существуют } \lambda_{V_1},\dots,\lambda_{V_p} \in R^*, c(V_k,V_l) \in R:$$
$$f_{V_j}(gx^1,\dots,gx^k) = \lambda_{V_j}(g) f_{V_j}(x^1,\dots,x^k) + \sum_{l\neq j} c(V_j,V_l)\cdot f_{V_l}(x^1,\dots,x^k)$$
$$\text{для всех } 1 \leqslant j \leqslant p\}.$$

Оказывается, что определённая таким образом группа совпадает с $\bigwedge^m \mathrm{GL}_n(R)$ для произвольных n,m и произвольного коммутативного кольца R. Для доказательства мы снова воспользуемся леммой Уотерхауза, но в этом случае не очевидно, что $\overline{G}_F$ – это групповая схема.

Лемма 10. *Пусть $n = ml+r$, где $m, l \in \mathbb{N}$. Тогда функтор $R \mapsto \overline{G}_F(R)$ определяет аффинную групповую схему над $\mathbb{Z}$.*

Рассуждая как в предыдущем параграфе, мы должны удостовериться в том, что группы $\bigwedge^m \mathrm{GL}_n(K)$ и $\overline{G}_F(K)$ совпадают для алгебраически замкнутого поля K и что для произвольного поля K размерность алгебры Ли $\mathrm{Lie}(\overline{G}_Y(K))$ не превосходит n^2, что влечёт гладкость схемы $\overline{G}_F$. Таким образом, мы получаем требуемый изоморфизм, см. [10, теорема 2].

Теорема 11. *Если $n = ml + r$, где $m, l \in \mathbb{N}$, то имеет место изоморфизм $\overline{G}_F \cong \bigwedge^m \mathrm{GL}_n$ аффинных групповых схем над $\mathbb{Z}$.*

§4. Стандартность решетки подгрупп

Извлечение унипотента (элементарной трансвекции) из промежуточной подгруппы H является ключевым шагом в стандартном описании надгрупп. В предыдущих работах на эту тему, например, в совместных работах Николая Вавилова и Виктора Петрова о надгруппах классических групп, требовалось извлечь нетривиальный унипотент из любого элемента $a \in G(\Phi, R) \setminus N\big(E(\Phi, R)\big)$, где Φ – система корней, соответствующая рассматриваемой группе, а R – коммутативное кольцо. Фактически, для этого из общего элемента извлекалось много унипотентов, для которых удавалось показать, что все они не могут стать тривиальными под действием канонического гомоморфизма, переводящего $g \mapsto a$, где g – это общий элемент $G(\Phi, R)$.

Случай внешних степеней является первым, где техника Вавилова и Петрова недоступна. Однако, Алексей Степанов и автор разработали альтернативный подход извлечения унипотента, основанный на понятии общего элемента [7]. Используя теорему 1 из этой работы, мы хотим показать, что решётка подгрупп $\mathcal{L} = L\big(\bigwedge^m \mathrm{E}_n(R), \mathrm{GL}_N(R)\big)$ стандартна, то есть выполнено стандартное описание надгрупп. Для формулировки результата напомним, что *транспортер* подгруппы E в подгруппу F группы G определяется как следующее множество:

$$\mathrm{Tran}_G(E, F) = \{g \in G \mid E^g \leqslant F\}.$$

В интересующем нас случае внешних степеней три первых условия из упомянутой теоремы очевидны или легко доказываются. Нам необходимо лишь проверить следующие условия:

- Нормализатор $N(\_)$ является замкнутой подсхемой в $\mathrm{GL}_N(\_)$; и над полем F этот нормализатор $N\big(\bigwedge^m \mathrm{E}_n(F)\big)$ "почти максимальный" в $\mathrm{GL}_N(F)$;
- Транспортер из $\bigwedge^m \mathrm{E}_n(R)$ в $N\big(\bigwedge^m \mathrm{E}_n(R)\big)$ равен $N\big(\bigwedge^m \mathrm{E}_n(R)\big)$;
- Извлечь нетривиальный ненулевой корневой унипотент из подгруппы, порождённой общим элементом $\mathrm{GL}_N(R)$ и $\bigwedge^m \mathrm{E}_n(R)$ и из подгруппы, порождённой $\bigwedge^m \mathrm{E}_n(R)$ и h, где $h \in \mathrm{GL}(R, \mathrm{Rad}\, R) \smallsetminus N\big(\bigwedge^m \mathrm{E}_n(R)\big)$.

Оказывается, что для групп Шевалле эти условия можно ослабить, см. [11, Теорема 1]. В первом пункте необходимо требовать максимальность нормализатора не для всех полей, а для конечных и алгебраически замкнутых. Более того, в последнем пункте можно заменить радикал Джекобсона $\mathrm{Rad}\, R$ на нильрадикал $\mathrm{NRad}\, R$.

И тогда первые два пункта следуют из следующей теоремы, см. [10, Теорема 3]. Как обычно, последовательные изоморфизмы доказываются последовательными включениями, при этом нетривиальным здесь является только последнее включение $\mathrm{Tran}\big(\bigwedge^m \mathrm{E}_n, \bigwedge^m \mathrm{GL}_n\big) \leqslant \bigwedge^m \mathrm{GL}_n$, доказательство которого как раз использует инвариантные формы из предыдущего параграфа, которые задают $\bigwedge^m \mathrm{GL}_n(R)$.

Теорема 12. *Пусть $n \geqslant 4$ и n/m – целое число не меньше 3. Тогда имеют место следующие изоморфизмы аффинных алгебраических групповых схем над $\mathbb{Z}$:*

$$N\big(\textstyle\bigwedge^m \mathrm{E}_n\big) \cong N\big(\bigwedge^m \mathrm{SL}_n\big) \cong \mathrm{Tran}\big(\bigwedge^m \mathrm{E}_n, \bigwedge^m \mathrm{SL}_n\big) \cong \mathrm{Tran}\big(\bigwedge^m \mathrm{E}_n, \bigwedge^m \mathrm{GL}_n\big) \cong \bigwedge^m \mathrm{GL}_n,$$

где все нормализаторы и транспортеры здесь берутся в GL_N.

Однако, третье условие не выполнено для произвольных внешних степеней. Извлечение трасвекции основано на методе разложения унипотентов [8, 25]. А этот метод работает только для внешнего квадрата элементарной группы. Таким образом, элементарный унипотент извлекается тоже только для внешних квадратов.

Суммируя вышеизложенное, мы получаем стандартное описание надгрупп для внешнего квадрата элементарной группы в предположении $n \geqslant 6$, либо $n \geqslant 5, 3 \in R^*$, см. [11, Теорема 2]. Для любой промежуточной подгруппы H существует единственный максимальный идеал A кольца R такой, что

$$\textstyle\bigwedge^2 \mathrm{E}_n(R) \cdot \mathrm{E}_N(R, A) \leqslant H \leqslant N_{\mathrm{GL}_N(R)}\big(\bigwedge^2 \mathrm{E}_n(R) \cdot \mathrm{E}_N(R, A)\big).$$

Кроме того, можно уточнить, что этот нормализатор равен конгруэнц-подгруппе соответствующего уровня:

$$N_{\mathrm{GL}_N(R)}\big(\textstyle\bigwedge^2 \mathrm{E}_n(R)\cdot \mathrm{E}_N(R,A)\big)=\rho_A^{-1}\left(\textstyle\bigwedge^2 \mathrm{GL}_n(R/A)\right).$$

В общем случае m-х внешних степеней можно лишь ожидать, что в предположении $n\geqslant 3m$ все промежуточные подгруппы H параметризуются одним идеалом кольца R. Если же $4\leqslant n<3m$, то для каждой подгруппы H существует допустимый m-набор идеалов $\mathbb{A}=(A_0,\dots,A_{m-1})$ в кольце R такой, что

$$\textstyle\bigwedge^m \mathrm{E}_n(R)\cdot \mathrm{E}_N(R,\mathbb{A})\leqslant H\leqslant N_{\mathrm{GL}_N(R)}\big(\bigwedge^m \mathrm{E}_n(R)\cdot \mathrm{E}_N(R,\mathbb{A})\big).$$

§5. Заключительные замечания

Как отмечалось во введении, задача описания надгрупп огромна. На текущий момент получено стандартное описание надгрупп над произвольным кольцом лишь для самых простых групп в естественных представлениях, либо для каких-то случаев групп из классов Ашбахера $\mathcal{C}_1$–$\mathcal{C}_8$. В настоящей главе мы отметим дальнейшие открытые вопросы, которые наиболее тесно связаны с задачей настоящей работы, которая относится к классу Ашбахера $\mathcal{S}$.

Задача 1. *Разработать метод разложения унипотентов для произвольной m-й внешней степени элементарной группы $\bigwedge^m \mathrm{E}_n(R)$ и получить стандартное описание надгрупп $\bigwedge^m \mathrm{E}_n(R)$.*

Отметим, что у элементарной группы существует другое похожее неприводимое представление, а именно симметрическая степень.

Задача 2. *Описать подгуппы в $\mathrm{GL}_{\binom{n+m-1}{m}}(R)$, содержащие симметрическую степень элементарной группы $\mathrm{S}^m\,\mathrm{E}_n(R)$ при $n\geqslant 3$.*

Наконец, отметим другую тесно связанную серию работ в контексте “linear preserver problems”. На сколько нам известно, следующие задачи для произвольных колец не решены.

Задача 3. *Получить описание подгрупп в $\mathrm{GL}_{n^2}(R)$, содержащие элементарную группу $\mathrm{E}_n(R)$, $n\geqslant 3$ в присоединённом представлении.*

Задача 4. *Описать подгруппы в $\mathrm{GL}_{n^2}(R)$, содержащие элементарную классическую группу $\mathrm{EO}_n(R)$, $\mathrm{Ep}_n(R)$ или $\mathrm{EU}_n(R)$ в присоединённом представлении.*

Для таких задач существуют лишь отдельные результаты над классическими полями, такими как $\mathbb{C}$ и $\mathbb{R}$, полученные Владимиром Платоновым, Драгомиром Дьоковичем, Робертом Гуральником, Вильямом Уотерхаузом и другими, см. обзор [24] для дальнейшей библиографии.

В заключение автор благодарит Илью Некрасова, Алексея Степанова и Виктора Петрова, без которых эта задача не была бы решена. А также всю петербургскую алгебраическую школу за многочисленные чрезвычайно полезные обсуждения.

Список литературы

1. T. C. Burness and D. M. Testerman, *Irreducible Subgroups of Simple Algebraic Groups – A Survey.* Groups St Andrews 2017 Birmingham, Cambridge University Press (2019), 230–260.
2. B. N. Cooperstein, *Nearly maximal representations for the special linear group.* — Michigan Math. J. **27**, No. 1 (1980), 3–19.
3. J. A. Dieudonné and J. B. Carrell, *Invariant Theory, Old and New.* — Adv. Math. **4**, No. 1 (1970), 1–80.
4. S. Garibaldi and R. M. Guralnick, *Generic Stabilizers for Simple Algebraic Groups.* — Michigan Math. J. **72** (2022).
5. S. Garibaldi and R. M. Guralnick, *Simple groups stabilizing polynomials.* — Forum Math. Pi **3**, No. e3 (2015), 1–41.
6. M.-A. Knus, *Quadratic and Hermitian Forms over Rings.* Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, Springer Berlin Heidelberg, Berlin, Heidelberg, vol. 294, 1991.
7. R. Lubkov and A. Stepanov, *Subgroups of Chevalley groups over rings.* — J. Math. Sci. **252**, No. 6 (2021), 829–840.
8. R. Lubkov, it The reverse decomposition of unipotents for bivectors. — Commun. Algebr. **49**, No. 10 (2021), 4546–4556.
9. R. Lubkov, I. Nekrasov, *Overgroups of exterior powers of an elementary group. Levels.* — Linear Multilinear Algebr. **72**, No. 4 (2022), 563–584.
10. R. Lubkov, I. Nekrasov, *Overgroups of exterior powers of an elementary group. Normalizers.* — Doc. Math. (to appear), 2024.
11. R. Lubkov, A. Stepanov, *Subgroups of general linear groups, containing the exterior square of the elementary subgroup.* (to appear), 2024.
12. I. Mirković, D. Rumynin, *Centers of reduced enveloping algebras.* — Math. Zeitschrift **231**, No. 1 (1999), 123–132.
13. G. M. Seitz, *The maximal subgroups of classical algebraic groups.* — Mem. Am. Math. Soc. **67**, No. 365 (1987).
14. N. Vavilov, *Intermediate subgroups in Chevalley groups.* — In: Groups Lie Type their Geom., vol. 207, Cambridge University Press, 1995, pp. 233–280.
15. W. C. Waterhouse, *Automorphisms of* $\det(X_{ij})$*: the group scheme approach.* — Adv. Math. **65**, No. 2 (1987), 171–203.

16. А. С. Ананьевкий, Н. А. Вавилов, С. С. Синчук, *О надгруппах* $\mathrm{E}(m,R)\otimes\mathrm{E}(n,R)$. *I. Уровни и нормализаторы.* — Алгебра и анализ **23**, No. 5 (2011), 55–98.
17. З. И. Боревич, Н. А. Вавилов, *Об определении сетевой подгруппы.* — Зап. научн. сем. ЛОМИ **132** (1983), 26–33.
18. Н. А. Вавилов, А. Ю. Лузгарев, *Нормализатор группы Шевалле типа* E_6. — Алгебра и анализ **19**, No. 5 (2007), 37–64.
19. Н. А. Вавилов, А. Ю. Лузгарев, *Нормализатор группы Шевалле типа* E_7. — Алгебра и анализ **27**, No. 6 (2015), 57–88.
20. Н. А. Вавилов, Е. Я. Перельман, *Поливекторные представления* GL_n. — Зап. научн. сем. ПОМИ **338** (2006), 69–97.
21. Н. А. Вавилов, В. А. Петров, *О надгруппах* $\mathrm{EO}(2l,R)$. — Зап. научн. сем. ПОМИ **272** (2000), 68–85.
22. Н. А. Вавилов, В. А. Петров. *О надгруппах* $\mathrm{EO}(n,R)$. — Алгебра и анализ **19**, No. 2 (2007), 10–51.
23. Н. А. Вавилов, В. А. Петров, *О надгруппах* $\mathrm{Ep}(2l,R)$. — Алгебра и анализ **15**, No. 4 (2003), 72–114.
24. Н. А. Вавилов, А. В. Степанов, *Надгруппы полупростых групп.* — Вестн. СамГУ. Естественнонаучн. сер., No. 3 (2008), 51–95.
25. Р. А. Лубков, *Обратное разложение унипотентов в поливекторных представлениях.* — Зап. научн. сем. ПОМИ **513** (2022), 120–138.
26. Р. А. Лубков, И. И. Некрасов, *Явные уравнения на внешний квадрат полной линейной группы.* — Зап. научн. сем. ПОМИ **470** (2018), 120–137.
27. В. А. Петров, *Нечетные унитарные группы.* — Зап. научн. сем. ПОМИ **305** (2003), 195–225.

Lubkov R. A. Overgroups of elementary groups in polyvector representations.

We initiate the study of subgroups H of the general linear group $\mathrm{GL}_{\binom{n}{m}}(R)$ over a commutative ring R that contain the m-th exterior power of an elementary group $\bigwedge^m \mathrm{E}_n(R)$. Each such group H corresponds to a uniquely defined level $(A_0,\dots,A_{m-1})$, where $A_0,\dots,A_{m-1}$ are ideals of R with certain relations. In the crucial case of the exterior squares, we state the subgroup lattice to be standard. In other words, for $\bigwedge^2 \mathrm{E}_n(R)$ all intermediate subgroups H are parametrized by a single ideal of the ring R. Moreover, we characterize $\bigwedge^m \mathrm{GL}_n(R)$ as the stabilizer of a system of invariant forms. This result is classically known for algebraically closed

fields, here we prove the corresponding group scheme to be smooth over $\mathbb{Z}$. So the last result holds over arbitrary commutative rings.

Санкт-Петербургский
государственный университет,
199034, Университетская наб. 7/9,
Санкт-Петербург, Россия
E-mail: RomanLubkov@yandex.ru

Поступило 24 апреля 2024 г.