Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 531, 2024 г.

А. И. Генералов

КОГОМОЛОГИИ ХОХШИЛЬДА АЛГЕБР ДИЭДРАЛЬНОГО ТИПА. XI. АЛГЕБРА КОГОМОЛОГИЙ ДЛЯ НЕКОТОРОЙ СЕРИИ ИСКЛЮЧИТЕЛЬНЫХ АЛГЕБР

Введение

Работа посвящена вычислению алгебры когомологий Хохшильда $\mathrm{HH}^*(R)$ для некоторого "исключительного" семейства алгебр диэдрального типа. Напомним, что алгебры диэдрального, полудиэдрального и кватернионного типов возникли в работах К. Эрдман при классификации групповых блоков, имеющих ручной тип представления (см. [1]). Для этого "исключительного" семейства, возникающего в случае, когда основное поле имеет характеристику 2, ранее были вычислены группы когомологий Хохшильда (см. [2]).

Отметим, что когомологии Хохшильда для других семейств алгебр диэдрального типа исследовались в работах [3–12].

Для вычисления умножений в алгебре $\mathrm{HH}^*(R)$ используется минимальная проективная резольвента для алгебр из рассматриваемого семейства, построенная в работе [2].

Кратко опишем структуру работы. В разделе 1 формулируются основные результаты работы, в разделе 2 приведены некоторые вспомогательные сведения, а доказательства основных результатов приведены в разделе 3.

§1. Формулировка основного результата

Пусть K – алгебраически замкнутое поле произвольной характеристики, R – конечномерная K-алгебра, $\Lambda = R^{\mathrm{e}} = R \otimes_K R^{\mathrm{op}}$ – ее обертывающая алгебра, $\mathrm{HH}^n(R) = \mathrm{Ext}^n_\Lambda(R, R)$ – n-ая группа когомологий Хохшильда алгебры R (с коэффициентами в R-бимодуле R). Таким образом, $\mathrm{HH}^n(R) = \mathrm{H}^n(\mathrm{Hom}_\Lambda(P_\bullet, R))$, где $P_\bullet \to R$ – Λ-проективная резольвента алгебры R.

Ключевые слова: алгебры диэдрального типа, алгебра когомологий Хохшильда.
Автор благодарит грант РНФ No. 22-71-00081 за поддержку.

Алгебры $R_{k,s,c}$ серии $D(2\mathcal{B})(k,s,c)$ (над алгебраически замкнутым полем K произвольной характеристики) описываются с помощью следующего колчана с соотношениями:

$$Q^{(\mathcal{B})}:\quad \begin{tikzcd} 0 \arrow[loop left, "\alpha"] \arrow[r, shift left, "\beta"] & 1 \arrow[l, shift left, "\gamma"] \arrow[loop right, "\eta"] \end{tikzcd}$$

$$\beta\gamma = \eta\beta = \gamma\eta = 0,\ \ (\gamma\beta\alpha)^k = (\alpha\gamma\beta)^k,$$
$$\alpha^2 = c(\gamma\beta\alpha)^k,\ \ \eta^s = (\beta\alpha\gamma)^k,$$

где $k, s \in \mathbb{N}$, $s \geqslant 2$, $c \in \{0, 1\}$ (композицию путей мы записываем справа налево).

Отметим, что если $\operatorname{char} K \neq 2$, то можно считать, что $c = 0$. Для алгебр $R_{k,s,0}$ группы $\mathrm{HH}^n(R)$ и алгебра $\mathrm{HH}^*(R)$ исследовались в [6, 9]. С другой стороны, группы $\mathrm{HH}^n(R)$ для алгебр $R_{k,s,1}$ были вычислены в [2], и их описание существенно зависит от чётности или нечётности параметров k и s. Естественно, мультипликативная структура алгебры когомологий $\mathrm{HH}^*(R)$ для алгебр $R_{k,s,1}$ также зависит от чётности/нечётности k и s. В настоящей работе мы описываем алгебру когомологий Хохшильда для подсерии серии алгебр $R_{k,s,1}$, соответствущей нечётным значениям параметров k и s (и для $\operatorname{char} K = 2$).

Пусть

$$\mathcal{X} = \{p_i, u_i\}_{i=1}^4 \cup \{v_i\}_{i=1}^6 \cup \{w_i\}_{i=1}^3 \cup \{z_0, z_1, t\}. \tag{1.1}$$

На алгебре $K[\mathcal{X}]$ введём градуировку так, что

$$\deg p_i = 0 \ \text{ для } 1 \leqslant i \leqslant 4,\ \deg u_i = 1 \ \text{ для } 1 \leqslant i \leqslant 4,$$
$$\deg v_i = 2 \ \text{ для } 1 \leqslant i \leqslant 6,\ \deg w_i = 3,\ \ \text{для } 1 \leqslant i \leqslant 3,$$
$$\deg z_0 = \deg z_1 = 4,\ \deg t = 5.$$

Определим градуированную K-алгебру $\mathcal{A} = \mathcal{A}(k,s) = K[\mathcal{X}]/I$, где идеал I порождён следующими элементами:

$$\left.\begin{array}{r} p_1^k + p_2^s,\ p_3^2,\ p_4^2, \\ p_ip_j \ \text{ для } \ 1 \leqslant i < j \leqslant 4; \end{array}\right\} \tag{1.2}$$

$$p_1u_1,\ p_2u_1,\ p_4u_1, \tag{1.3}$$

$$p_1u_2,\ p_3u_2,\ p_4u_2; \tag{1.4}$$

$$p_ju_3 \ \text{ для } \ 1 \leqslant j \leqslant 4, \tag{1.5}$$

$$p_iu_4 \ \text{ для } \ i > 1,\ p_1^{k-1}u_4,\ p_2^{s-1}u_2, \tag{1.6}$$

$$u_iu_j = 0 \text{ для } 1 \leqslant i \leqslant j \leqslant 4; \tag{1.7}$$
$$p_iv_2 \text{ для } i > 1, p_iv_3 \text{ для } i \neq 2,\ p_iv_4 \text{ для } i \neq 3, \tag{1.8}$$
$$p_iv_j \text{ для } j \in \{1,4,5,6\} \text{ и любых } i, \tag{1.9}$$
$$p_1^{k-1}v_2,\ p_2^{s-1}v_3, \tag{1.10}$$
$$u_1v_j \text{ для } j \in \{1,2,3,6\}, \tag{1.11}$$
$$u_2v_j \text{ для } j \neq 3,\ u_3v_j \text{ для } j \neq 1, \tag{1.12}$$
$$u_4v_j \text{ для } j \neq 2, \tag{1.13}$$
$$u_4v_2 + p_1^2w_3,\ u_1v_5 + p_4w_1, \tag{1.14}$$
$$u_1v_4 + p_3w_2,\ u_2v_3 + p_2^2w_3, \tag{1.15}$$
$$p_iw_1 \text{ для } 1 \leqslant i \leqslant 3, \tag{1.16}$$
$$p_iw_2 \text{ для } i \neq 3,\ p_3w_3,\ p_4w_3,\ p_1^kw_3, \tag{1.17}$$
$$v_iv_j \text{ при } 1 \leqslant i < j \leqslant 5,\ v_iv_6 \text{ при } i > 1, \tag{1.18}$$
$$v_1v_6 + u_3w_2,\ u_1w_3 + p_4z_0,\ p_1^kz_0, \tag{1.19}$$
$$v_4^2,\ v_5^2,\ v_6^2,\ v_2^2 + p_1^2z_0,\ v_3^2 + p_2^2z_0, \tag{1.20}$$
$$p_iz_1 \text{ для всех } i,\ u_iw_1 \text{ при } i > 1, \tag{1.21}$$
$$u_iw_2 \text{ при } i \neq 3, u_iw_3 \text{ при } i > 1; \tag{1.22}$$
$$v_iw_1 \text{ при } 1 \leqslant i \leqslant 4, \tag{1.23}$$
$$v_2w_2,\ v_3w_2,\ v_6w_2,\ v_5w_3,\ v_6w_3, \tag{1.24}$$
$$v_5w_2 + p_4t, v_6w_1 + p_4t, u_1z_1 + p_4t, \tag{1.25}$$
$$v_4w_2 + p_3u_1z_0,\ v_4w_3 + p_3u_1z_0,\ v_1w_3 + u_3z_0, \tag{1.26}$$
$$v_2w_3 + u_4z_0,\ v_3w_3 + u_2z_0, \tag{1.27}$$
$$p_it \text{ при } i < 4, \tag{1.28}$$
$$u_it \text{ при } i > 1,\ v_iz_1 \text{ для всех } i, \tag{1.29}$$
$$w_1w_3 + v_5z_0,\ w_2w_3 + v_6z_0, \tag{1.30}$$
$$w_1w_2 + u_1t,\ w_2^2,\ w_3^2,\ w_2z_1 + u_1v_5z_0, \tag{1.31}$$
$$w_1z_1 + v_5t,\ v_6t + p_4w_1z_0, \tag{1.32}$$
$$w_3t + z_0z_1,\ w_2t + u_1w_1z_0; \tag{1.33}$$
$$z_1^2, \tag{1.34}$$
$$z_1t + v_5w_1z_0, \tag{1.35}$$

$$t^2 + z_0 w_1^2. \tag{1.36}$$

Кроме того, на алгебре $\mathcal{A}$ вводится градуировка, индуцированная градуировкой алгебры $K[\mathcal{X}]$.

Основной результат работы – следующая теорема.

Теорема 1.1. *Пусть* $\operatorname{char} K = 2$, *и пусть* $R = R_{k,s,1}$, *где* k *и* s *нечётны,* $k > 2$. *Алгебра когомологий Хохшильда* $\mathrm{HH}^*(R)$ *как градуированная* K*-алгебра изоморфна алгебре* $\mathcal{A}$.

§2. Предварительные сведения

Пусть $R = R_{k,s,1}$, где $k, s \in \mathbb{N}, k > 1, s > 2$, и пусть $\mu\colon Q_\bullet \to R$ – минимальная Λ-проективная резольвента бимодуля R, построенная в [2]. Описание этой резольвенты довольно громоздкое, и мы здесь его не воспроизводим, но будем использовать многие обозначения, связанные с этим описанием. В частности, для некоторых элементов алгебры R используются сокращённые обозначения:

$$a := \alpha\gamma\beta,\ b := \beta\alpha\gamma,\ g := \gamma\beta\alpha.$$

Кроме того, мы через $\delta^n := \operatorname{Hom}_\Lambda(d_n^Q, R)$ обозначаем дифференциал комплекса $\operatorname{Hom}_\Lambda(Q_\bullet, R)$, с которого "считываются" когомологии Хохшильда:

$$\mathrm{HH}^n(R) = \operatorname{Ext}^n_\Lambda(R, R) = \mathrm{H}^n(\operatorname{Hom}_\Lambda(Q_\bullet, R)).$$

Дифференциалы d_n^Q (а также δ^n) задаются с помощью матриц, соответствующих фиксированным разложениям модулей Q_n в прямую сумму неразложимых Λ-модулей; будем называть такие разложения стандартными.

Резольвента $\left(Q_\bullet, d_n^Q\right) \to R$ была получена с помощью приёма, аналогичного "тотализации" некоторой диаграммы, представляющей собой "бикомплекс", оснащённый дополнительными стрелками (удобно считать, что диаграмма располагается в первом квадранте "координатной плоскости"); см. [2, стр. 94]. Строение диаграммы обладает уникальной особенностью: при отбрасывании первых двух столбцов диаграммы мы получаем новый "бикомплекс", совпадающий с исходным (отличающийся лишь сдвигом градуировки). Поддиаграмма, состоящая из первых двух столбцов рассматриваемой диаграммы, после "тотализации" доставляет подкомплекс $X_\bullet$ комплекса $Q_\bullet$, при этом оказалось справедливым следующее утверждение (см. [2, предложение 3.3]).

Предложение 2.1. *Имеет место короткая точная последовательность комплексов*

$$0 \to X_\bullet \xrightarrow{i} Q_\bullet \xrightarrow{\pi} Q_\bullet[-4] \to 0, \tag{2.1}$$

расщепляющаяся в каждой степени.

Точная последовательность (2.1) индуцирует длинную когомологическую последовательность для групп когомологий Хохшильда (см. формулу (4.84) в [2]). При этом в ней, начиная с некоторого места, связывающие гомоморфизмы нулевые, и таким образом, получаем следующее утверждение.

Предложение 2.2. *Пусть* $\mathcal{X}^\bullet = \mathrm{Hom}_\Lambda(X_\bullet, R)$. *При* $n \geqslant 5$ *имеет место короткая точная последовательность*

$$0 \to \mathrm{HH}^{n-4}(R) \xrightarrow{\pi^*} \mathrm{HH}^n(R) \xrightarrow{\imath^*} \mathrm{H}^n(\mathcal{X}^\bullet) \to 0. \tag{2.2}$$

Отметим, что гомоморфизм $\imath^*$ из (2.2) также сюръективен при $n = 4$ (см. [2, лемма 4.16]).

Хотя размерности групп $\mathrm{HH}^i(R)$, $i \geqslant 0$, были вычислены в [2], нам необходимо получить явное описание базисов (над K) этих групп.

Из [1, III.14] вытекает следующее утверждение.

Предложение 2.3. *Пространство* $\mathrm{HH}^0(R)$ *допускает в качестве K-базиса следующее множество*

$$\{a^i + g^i + b^i\}_1^{k-1} \cup \{\eta^i\}_1^s \cup \{1, \gamma\beta a^{k-1}, a^k\}.$$

Далее мы опишем базисы пространств $\mathrm{HH}^i(R)$ для $1 \leqslant i \leqslant 5$ (в предположении, что k и s нечётны). Поскольку базисы пространств $\mathrm{Im}\,\delta^i$, $0 \leqslant i \leqslant 4$, указаны в [2], то мы должны сначала описать базисы пространств $\mathrm{Ker}\,\delta^i$ для $1 \leqslant i \leqslant 5$. Это делается аналогично [6, предложение 4.4]. Детали подобных вычислений мы оставляем читателю, и как результат мы получаем следующее утверждение.

Предложение 2.4. *Предположим, что k и s нечётны, $k > 1$.*

(1) *Пространство* $\mathrm{HH}^1(R)$ *имеет в качестве K-базиса множество, состоящее из следующих элементов*:

$$\big(\alpha g^i, \mathrm{O}_3\big) \quad \text{для } 1 \leqslant i \leqslant k-1, \tag{2.3}$$

$$\big(\mathrm{O}_3, \eta^i\big) \quad \text{для } 2 \leqslant i \leqslant s, \tag{2.4}$$

$$\big(\alpha, \beta, \mathrm{O}_2\big),\ \big(\gamma\beta a^{k-1}, \mathrm{O}_3\big),\ \big(a^k, \mathrm{O}_3\big). \tag{2.5}$$

(2) *Пространство* $\mathrm{HH}^2(R)$ *имеет в качестве* K*-базиса множество, состоящее из следующих элементов*:

$$\big(a^i+g^i, b^i, a^i, \mathrm{O}_3\,\big) \quad \textit{для} \;\; 1\leqslant i\leqslant k-1, \tag{2.6}$$

$$\big(0, \eta^i, \mathrm{O}_4\,\big) \quad \textit{для} \;\; 1\leqslant i\leqslant s-1, \tag{2.7}$$

$$\big(a^k, \mathrm{O}_5\,\big),\ \big(\,\mathrm{O}_2, e_0, \mathrm{O}_3\,\big),\ \big(\,\mathrm{O}_2, \alpha, \mathrm{O}_3\,\big), \big(\,\mathrm{O}_3, \beta\alpha g^{k-1}, \eta^{s-1}, \alpha\gamma b^{k-1}\,\mathrm{O}_3\,\big). \tag{2.8}$$

(3) *Пространство* $\mathrm{HH}^3(R)$ *имеет в качестве* K*-базиса множество, состоящее из следующих элементов*:

$$\big(\alpha g^i, \mathrm{O}_7\,\big) \quad \textit{для} \;\; 1\leqslant i\leqslant k-1, \tag{2.9}$$

$$\big(\,\mathrm{O}_3, \eta^i, \mathrm{O}_4\,\big) \quad \textit{для} \;\; 2\leqslant i\leqslant s, \tag{2.10}$$

$$\big(\alpha, \beta, \mathrm{O}_2, \alpha, \mathrm{O}_3\,\big),\ \big(0, \beta, 0, \eta, \mathrm{O}_4\,\big),\ \big(0, \beta\alpha, \alpha\gamma, \mathrm{O}_5\,\big), \tag{2.11}$$

$$\big(\,\mathrm{O}_5, e_0, e_1, e_1\big),\ \big(\,\mathrm{O}_4, \gamma\beta a^{k-1}, \mathrm{O}_3\,\big),\ \big(\,\mathrm{O}_5, a^k, \mathrm{O}_2\,\big). \tag{2.12}$$

(4) *Пространство* $\mathrm{HH}^4(R)$ *имеет в качестве* K*-базиса множество, состоящее из следующих элементов*:

$$\big(a^i+g^i, b^i, \mathrm{O}_8\,\big) \quad \textit{для} \;\; 1\leqslant i\leqslant k-1, \tag{2.13}$$

$$\big(0, \eta^i, \mathrm{O}_8\,\big) \quad \textit{для} \;\; 1\leqslant i\leqslant s-1, \tag{2.14}$$

$$\big(e_0, e_1, \mathrm{O}_8\,\big),\ \big(\gamma\beta a^{k-1}, \mathrm{O}_9\,\big),\ \big(a^k, \mathrm{O}_9\,\big), \tag{2.15}$$

$$\begin{gathered}\big(\,\mathrm{O}_5, e_0, e_1, e_1\big),\ \big(\,\mathrm{O}_4, \gamma\beta a^{k-1}, \mathrm{O}_3\,\big), \big(\,\mathrm{O}_5, a^k, \mathrm{O}_2\,\big),\\ \big(\,\mathrm{O}_3, \beta\alpha g^{k-1}, \eta^{s-1}, \alpha\gamma b^{k-1}, \mathrm{O}_4\,\big),\end{gathered} \tag{2.16}$$

$$\big(\,\mathrm{O}_3, \beta\alpha g^{k-1}, \mathrm{O}_4, \gamma, 0\big), \big(\,\mathrm{O}_2, a^k, \mathrm{O}_7\,\big), \big(\,\mathrm{O}_6, e_0, \mathrm{O}_3\,\big) \tag{2.17}$$

(5) *Пространство* $\mathrm{HH}^5(R)$ *имеет в качестве* K*-базиса множество, состоящее из следующих элементов*:

$$\big(\alpha g^i, \mathrm{O}_{11}\,\big) \quad \textit{для} \;\; 1\leqslant i\leqslant k-1, \tag{2.18}$$

$$\big(\,\mathrm{O}_3, \eta^i, \mathrm{O}_8\,\big) \quad \textit{для} \;\; 2\leqslant i\leqslant s, \tag{2.19}$$

$$\big(\alpha, \beta, \mathrm{O}_{10}\,\big),\ \big(\gamma\beta a^{k-1}, \mathrm{O}_{11}\,\big),\ \big(a^k, \mathrm{O}_{11}\,\big) \tag{2.20}$$

$$\big(\,\mathrm{O}_4, \alpha, \mathrm{O}_3, \alpha, \mathrm{O}_3\,\big),\ \big(\,\mathrm{O}_5, e_0, e_1, e_1, \mathrm{O}_4\,\big),\ \big(\,\mathrm{O}_5, a^k, \mathrm{O}_6\,\big), \tag{2.21}$$

$$\big(\,\mathrm{O}_8, \gamma\beta a^{k-1}, \mathrm{O}_3\,\big),\ \big(\,\mathrm{O}_9, \beta\alpha g^{k-1}, \eta^{s-1}, \alpha\gamma b^{k-1}\big). \tag{2.22}$$

Замечание 2.5. В дальнейшем для n-коцикла $x\in\operatorname{Ker}\delta^n$ его когомологический класс $\operatorname{cl}x\in\mathrm{HH}^n(R)$ будем обозначать также через x.

§3. Образующие и соотношения

Мы сейчас кратко опишем интерпретацию произведения Йонеды в алгебре $\mathrm{HH}^*(R) = \bigoplus_{m\geqslant 0} \mathrm{Ext}^m_\Lambda(R,R)$, использованную ранее в [3]. Пусть $\mu\colon Q_\bullet \to R$ – минимальная Λ-проективная резольвента (см.раздел 2). Рассмотрим комплекс

$$\mathrm{Hom}_\Lambda(Q_\bullet, R) = \big(\mathrm{Hom}_\Lambda(Q_n, R), \delta^n\big);$$

как и ранее, δ^n – дифференциалы, индуцированные дифференциалами резольвенты $Q_\bullet$. Тогда для коциклов $f \in \operatorname{Ker}\delta^n$ и $g \in \operatorname{Ker}\delta^t$ имеем $\mathrm{cl}\, g \cdot \mathrm{cl}\, f = \mathrm{cl}\,(\mu \mathrm{T}^0(g)\mathrm{T}^t(f))$, где $\mathrm{T}^i(h)$ обозначает i-ю трансляцию коцикла h. В дальнейшем мы будем описывать трансляции $\mathrm{T}^i(h)$ $(i \geqslant 0)$ с помощью матриц, соответствующих стандартным разложениям модулей Q_n.

Мультипликативная структура алгебры $\mathrm{HH}^*(R)$ для алгебр из рассматриваемой серии существенно зависит от того, чётны или нет параметры k и s, входящие в определяющие соотношения алгебр $R_{k,s,1}$. Далее мы всюду предполагаем, что k и s нечётны.
Рассмотрим следующие однородные элементы в $\mathrm{HH}^*(R)$:

$$\text{– степени } 0: \begin{cases} p_1 := a+g+b,\ p_2 := \eta, \\ p_3 := \gamma\beta a^{k-1},\ p_4 := a^k; \end{cases} \tag{3.1}$$

$$\text{– степени } 1: \begin{cases} u_1 := (\alpha,\beta,\mathrm{O}_2),\ u_2 := (\mathrm{O}_3,\eta^2), \\ u_3 := (\gamma\beta a^{k-1},\mathrm{O}_3),\ u_4 := (\alpha g,\mathrm{O}_3); \end{cases} \tag{3.2}$$

$$\text{– степени } 2: \begin{cases} v_1 := (\mathrm{O}_2,e_0,\mathrm{O}_3),\ v_2 := (a+g,b,a,\mathrm{O}_3), \\ v_3 := (0,\eta,\mathrm{O}_4),\ v_4 := (\mathrm{O}_2,\alpha,\mathrm{O}_3), \\ v_5 := (\mathrm{O}_3,\beta\alpha g^{k-1},\eta^{s-1},\alpha\gamma b^{k-1}),\ v_6 := (a^k,\mathrm{O}_5); \end{cases} \tag{3.3}$$

$$\text{– степени } 3: \begin{cases} w_1 := (\mathrm{O}_5,e_0,e_1,e_1),\ w_2 := (\alpha,\beta,\mathrm{O}_2,\alpha,\mathrm{O}_3), \\ w_3 := (0,\beta,0,\eta,\mathrm{O}_4); \end{cases} \tag{3.4}$$

$$\text{– степени } 4: \begin{cases} z_0 := (e_0,e_1,\mathrm{O}_8), \\ z_1 := (\mathrm{O}_3,\beta\alpha g^{k-1},\eta^{s-1},\alpha\gamma b^{k-1},\mathrm{O}_4); \end{cases} \tag{3.5}$$

$$\text{– степени } 5:\ t := (\mathrm{O}_5,e_0,e_1,e_1,\mathrm{O}_4). \tag{3.6}$$

Предложение 3.1. *Предположим, что k и s нечётны и $k > 1$. Для элементов множества*

$$\mathcal{Y} = \{p_i,u_i\}_{i=1}^4 \cup \{v_i\}_{i=1}^6 \cup \{w_i\}_{i=1}^3 \cup \{z_0,z_1,t\} \tag{3.7}$$

в алгебре $\mathrm{HH}^*(R)$ *выполняются соотношения*:

$$\left.\begin{aligned} p_1^k = p_2^s,\ p_3^2 = p_4^2 = 0,\\ p_ip_j = 0\ \ \text{для}\ \ 1 \leqslant i < j \leqslant 4; \end{aligned}\right\} \tag{3.8}$$

$$p_1u_1 = p_2u_1 = p_4u_1 = 0, \tag{3.9}$$

$$p_1u_2 = p_3u_2 = p_4u_2 = 0; \tag{3.10}$$

$$p_ju_3 = 0\ \ \text{для}\ \ 1 \leqslant j \leqslant 4, \tag{3.11}$$

$$p_iu_4 = 0\ \ \text{для}\ \ i > 1, \tag{3.12}$$

$$p_1^{k-1}u_4 = p_2^{s-1}u_2 = 0; \tag{3.13}$$

$$u_iu_j = 0\ \ \text{для}\ \ 1 \leqslant i \leqslant j \leqslant 4; \tag{3.14}$$

$$p_iv_2 = 0\ \ \text{для}\ \ i > 1, \tag{3.15}$$

$$p_iv_3 = 0\ \ \text{для}\ \ i \neq 2,\ p_iv_4 = 0\ \ \text{для}\ \ i \neq 3, \tag{3.16}$$

$$p_iv_j = 0\ \ \text{для}\ \ j \in \{1,4,5,6\}\quad \text{и любых}\ i, \tag{3.17}$$

$$p_1^{k-1}v_2 = p_2^{s-1}v_3 = 0; \tag{3.18}$$

$$u_1v_j = 0\ \ \text{для}\ \ j \in \{1,2,3,6\} \tag{3.19}$$

$$u_2v_j = 0\ \ \text{для}\ \ j \neq 3,\ u_3v_j = 0\ \ \text{для}\ \ j \neq 1, \tag{3.20}$$

$$u_4v_j = 0\ \ \text{для}\ \ j \neq 2, \tag{3.21}$$

$$u_4v_2 = p_1^2w_3,\ u_1v_5 = p_4w_1, \tag{3.22}$$

$$u_1v_4 = p_3w_2,\ u_2v_3 = p_2^2w_3, \tag{3.23}$$

$$p_iw_1 = 0\ \ \text{для}\ \ 1 \leqslant i \leqslant 3,\ , \tag{3.24}$$

$$p_iw_2 = 0\ \ \text{для}\ \ i \neq 3,\ p_3w_3 = p_4w_3 = 0,\ p_1^kw_3 = 0; \tag{3.25}$$

$$v_iv_j = 0\ \ \text{при}\ \ 1 \leqslant i < j \leqslant 5,\ v_iv_6 = 0\quad \text{при}\ \ i > 1, \tag{3.26}$$

$$v_1v_6 = u_3w_2,\ u_1w_3 = p_4z_0,\ p_1^kz_0 = 0, \tag{3.27}$$

$$v_4^2 = v_5^2 = v_6^2 = 0,\ v_2^2 = p_1^2z_0,\ v_3^2 = p_2^2z_0, \tag{3.28}$$

$$p_iz_1 = 0\ \ \text{для всех}\ i,; \tag{3.29}$$

$$u_iw_1 = 0\quad \text{при}\ \ i > 1, \tag{3.30}$$

$$u_iw_2 = 0\quad \text{при}\ \ i \neq 3, u_iw_3 = 0\quad \text{при}\ \ i > 1; \tag{3.31}$$

$$v_iw_1 = 0\ \ \text{при}\ \ 1 \leqslant i \leqslant 4, \tag{3.32}$$

$$v_2w_2 = v_3w_2 = v_6w_2 = 0,\ v_5w_3 = v_6w_3 = 0, \tag{3.33}$$

$$v_5w_2 = v_6w_1 = u_1z_1 = p_4t, \tag{3.34}$$

$$v_4w_2 = v_4w_3 = p_3u_1z_0,\ v_1w_3 = u_3z_0, \tag{3.35}$$

$$v_2w_3 = u_4z_0,\ v_3w_3 = u_2z_0, \tag{3.36}$$

$$p_it = 0 \ \text{ при } \ i < 4, \tag{3.37}$$

$$u_it = 0 \ \text{ при } \ i > 1,\ v_iz_1 = 0 \ \text{ для всех } \ i, \tag{3.38}$$

$$w_1w_3 = v_5z_0,\ w_2w_3 = v_6z_0, \tag{3.39}$$

$$w_1w_2 = u_1t,\ w_2^2 = w_3^2 = 0,\ w_2z_1 = u_1v_5z_0, \tag{3.40}$$

$$w_1z_1 = v_5t,\ v_6t = p_4w_1z_0, \tag{3.41}$$

$$w_3t = z_0z_1,\ w_2t = u_1w_1z_0; \tag{3.42}$$

$$z_1^2 = 0, \tag{3.43}$$

$$z_1t = v_5w_1z_0; \tag{3.44}$$

$$t^2 = z_0w_1^2. \tag{3.45}$$

Доказательство. Для проверки указанных в лемме соотношений необходимо вычислить трансляции подходящих порядков для элементов из $\mathcal{Y}$, имеющих положительную степень.

Из предложения 2.1 непосредственно вытекает следующее утверждение.

Лемма 3.2. *Для любого $i \geqslant 0$ проекция на прямое слагаемое*

$$\pi_{i+4} \colon Q_{i+4} = Q_i \oplus X_{i+4} \to Q_i$$

является i-ой трансляцией $\mathrm{T}^i(z_0)$ коцикла z_0.

Замечание 3.3. Отметим, что из леммы 3.2 следует, что гомоморфизм

$$\pi^* \colon \mathrm{HH}^{n-4}(R) \to \mathrm{HH}^n(R),\ n \geqslant 4,$$

из точной последовательности (2.2) задаётся умножением на z_0.

Для других элементов из $\mathcal{Y}$ необходимые трансляции описаны в следующей лемме.

Лемма 3.4. *В качестве трансляций элементов из $\mathcal{Y} \setminus \{z_0\}$, имеющих положительную степень, можно взять гомоморфизмы, определяемые следующими матрицами:*

$$\mathrm{T}^0(u_1) = \begin{pmatrix} \alpha \otimes e_0 & \beta \otimes e_0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\mathrm{T}^1(u_1)=\begin{pmatrix} \sum\limits_{i=0}^{k-1}\gamma\beta a^i\otimes g^{k-1-i} & \sum\limits_{i=0}^{k-1}\beta a^i\otimes\gamma b^{k-1-i} & * & 0 & 0 & 0\\ \sum\limits_{i=0}^{k-1}\alpha\gamma b^i\otimes a^{k-1-i} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ \sum\limits_{i=0}^{k-1}\alpha g^i\otimes\beta a^{k-1-i} & 0 & 0 & 0 & \beta\otimes e_1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

где

$$(\mathrm{T}^1(u_1))_{13}=\alpha\otimes e_0+\sum_{i=0}^{k-1}\gamma\beta a^i\otimes g^{k-1-i},$$

$$\mathrm{T}^0(u_2)=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & \eta^2\otimes e_1 \end{pmatrix},$$

$$\mathrm{T}^1(u_2)=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & \eta^2\otimes e_0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & \sum\limits_{i=2}^{s-1}(i+1)\eta^i\otimes\eta^{s-i} & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\mathrm{T}^0(u_3)=\begin{pmatrix} \gamma\beta a^{k-1}\otimes e_0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\mathrm{T}^1(u_3)=\begin{pmatrix} 0 & 0 & \gamma\beta a^{k-1}\otimes e_0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ \gamma\beta a^{k-1}\otimes\beta a^{k-1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\mathrm{T}^0(u_4)=\begin{pmatrix} \alpha g\otimes e_0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$\mathrm{T}^1(u_4)$ – *это* 4×6-*матрица вида*

$$\mathrm{T}^1(u_4)=\left(\ \mathrm{A}^{(1)}\ \middle|\ \mathrm{A}^{(2)}\ \middle|\ \mathrm{O}_{4,3}\ \right),$$

где

$$\mathrm{A}^{(1)} = \begin{pmatrix} \sum\limits_{i=1}^{k-2} ia^{i+1} \otimes \gamma\beta a^{k-1-i} + \sum\limits_{i=1}^{k-2} i\gamma\beta a^{i+1} \otimes g^{k-1-i} \\ \sum\limits_{i=1}^{k-2} i\alpha\gamma b^{i} \otimes a^{k-i} + \sum\limits_{i=1}^{k-2} i\gamma b^{i+1} \otimes \alpha g^{k-1-i} \\ \sum\limits_{i=1}^{k-2} i\alpha g^{i} \otimes \beta a^{k-i} + \sum\limits_{i=1}^{k-2} ig^{i+1} \otimes \beta\alpha g^{k-1-i} \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\mathrm{A}^{(2)} = \begin{pmatrix} \sum\limits_{i=1}^{k-2} i\beta a^{i+1} \otimes \gamma b^{k-1-i} & \alpha g \otimes e_0 + \sum\limits_{i=1}^{k-2} i\gamma\beta a^{i+1} \otimes g^{k-1-i} \\ \sum\limits_{i=2}^{k-1} (i+1) b^{i} \otimes \alpha\gamma b^{k-i} & \sum\limits_{i=1}^{k-2} i\gamma b^{i+1} \otimes \alpha g^{k-1-i} \\ \sum\limits_{i=1}^{k-2} i\beta\alpha g^{i} \otimes b^{k-i} & \sum\limits_{i=1}^{k-2} ig^{i+1} \otimes \beta\alpha g^{k-1-i} \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\mathrm{T}^0(v_1) = \left(\begin{array}{c|c|c} \mathrm{O}_{2,2} & \begin{matrix} e_0 \otimes e_0 \\ 0 \end{matrix} & \mathrm{O}_{2,3} \end{array} \right),$$

$$\mathrm{T}^1(v_1) = \left(\begin{array}{c|c|c|c} \mathrm{A}^{(3)} & \mathrm{O}_{4,3} & \mathrm{A}^{(4)} & \mathrm{O}_{4,3} \end{array} \right),$$

где $\mathrm{A}^{(3)}, \mathrm{A}^{(4)}$ *– матрицы-столбцы такие, что*

$$(\mathrm{A}^{(3)})^{\mathrm{T}} = \left(\sum_{i=0}^{k-2} \gamma\beta a^{i} \otimes \gamma\beta a^{k-2-i}, \sum_{i=0}^{k-1} \gamma b^{i} \otimes a^{k-1-i}, \sum_{i=0}^{k-1} g^{i} \otimes \beta a^{k-1-i}, 0 \right),$$

$$(\mathrm{A}^{(4)})^{\mathrm{T}} = (e_0 \otimes e_0, 0, 0, 0),$$

$\mathrm{T}^2(v_1)$ *– это* 3×10*-матрица, у которой ненулевыми являются только три элемента, а именно,*

$$(\mathrm{T}^2(v_1))_{13} = (\mathrm{T}^2(v_1))_{37} = e_0 \otimes e_0, \ (\mathrm{T}^2(v_1))_{51} = \gamma b^{k-1} \otimes \beta a^{k-1},$$

$$\mathrm{T}^0(v_2) = \begin{pmatrix} (a+g) \otimes e_0 & 0 & a \otimes e_0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b \otimes e_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\mathrm{T}^1(v_2) = \left(\begin{array}{c|c} \mathrm{A}^{(5)} & \mathrm{O}_{4,3} \end{array} \right),$$

где

$$\mathrm{A}^{(5)} = \begin{pmatrix} (a+g) \otimes e_0 & 0 & 0 & 0 & g \otimes e_0 \\ \alpha\gamma \otimes \gamma\beta a^{k-1} & b \otimes e_0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (a+g) \otimes e_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & b \otimes e_1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\mathrm{T}^2(v_2) = \left(\begin{array}{c|c} \mathrm{A}^{(6)} & \mathrm{O}_{6,3} \end{array} \right),$$

где

$$\mathrm{A}^{(6)} = \begin{pmatrix} (a+g)\otimes e_0 & 0 & g\otimes e_0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b\otimes e_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (a+g)\otimes e_0 & 0 & 0 & 0 & a\otimes e_0 \\ 0 & 0 & 0 & b\otimes e_0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha\gamma\otimes\beta\alpha g^{k-1} & 0 & b\otimes e_1 & 0 & \alpha\gamma\otimes\beta\alpha g^{k-1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & (a+g)\otimes e_1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\mathrm{T}^0(v_3) = \left(\begin{array}{cc|c} 0 & 0 & \\ 0 & \eta\otimes e_1 & \mathrm{O}_{2,4} \end{array} \right),$$

$\mathrm{T}^1(v_3)$ – *это* 4×8-*матрица, в которой ненулевые только два элемента, а именно,*

$$(\mathrm{T}^1(v_3))_{22} = \eta\otimes e_0, \ \ (\mathrm{T}^1(v_3))_{44} = \eta\otimes e_1,$$

$\mathrm{T}^2(v_3)$ – *это* 6×10-*матрица, в которой ненулевые только три элемента, а именно,*

$$(\mathrm{T}^2(v_3))_{22} = (\mathrm{T}^2(v_3))_{55} = \eta\otimes e_1, \ \ (\mathrm{T}^2(v_3))_{44} = \eta\otimes e_0,$$

$$\mathrm{T}^0(v_4) = \left(\begin{array}{c|c|c} \mathrm{O}_{2,2} & \begin{matrix} \alpha\otimes e_0 \\ 0 \end{matrix} & \mathrm{O}_{2,3} \end{array} \right),$$

$$\mathrm{T}^1(v_4) = \left(\begin{array}{c|c|c|c} \mathrm{A}^{(7)} & \mathrm{O}_{4,3} & \mathrm{A}^{(8)} & \mathrm{O}_{4,3} \end{array} \right),$$

где $\mathrm{A}^{(7)}, \mathrm{A}^{(8)}$ – *матрицы-столбцы такие, что*

$$(\mathrm{A}^{(7)})^{\mathrm{T}} = \left(\sum_{i=1}^{k-1} a^i\otimes\gamma\beta a^{k-1-i}, \sum_{i=0}^{k-1} \alpha\gamma b^i\otimes a^{k-1-i}, \sum_{i=0}^{k-1} \alpha g^i\otimes\beta a^{k-1-i}, 0 \right),$$

$$(\mathrm{A}^{(8)})^{\mathrm{T}} = (\alpha\otimes e_0, 0, 0, 0),$$

$\mathrm{T}^2(v_4)$ – *это* 6×10-*матрица, в которой ненулевыми являются только следующие четыре элемента*

$$(\mathrm{T}^2(v_4))_{13} = (\mathrm{T}^2(v_4))_{37} = \alpha\otimes e_0,$$

$$(\mathrm{T}^2(v_4))_{51} = \alpha\gamma b^{k-1}\otimes\beta a^{k-1}, \ (\mathrm{T}^2(v_4))_{52} = b^k\otimes b^{k-1},$$

$$\mathrm{T}^0(v_5) = \left(\begin{array}{c|ccc} \mathrm{O}_{2,3} & \beta\alpha g^{k-1} & 0 & 0 \\ & 0 & \eta^{s-1}\otimes e_1 & \alpha\gamma b^{k-1}\otimes e_1 \end{array} \right),$$

$$\mathrm{T}^1(v_5) = \left(\begin{array}{c|c|c|c} \mathrm{O}_{4,1} & \mathrm{A}^{(9)} & \mathrm{O}_{4,1} & \mathrm{A}^{(10)} \end{array} \right),$$

где

$$\mathrm{A}^{(9)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \beta\alpha g^{k-1}\otimes\gamma b^{k-1} \\ \eta^{s-1}\otimes\alpha g^{k-1} & 0 & 0 \\ 0 & \alpha g^{k-1}\otimes\eta^{s-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\mathrm{A}^{(10)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \alpha\gamma b^{k-1}\otimes e_0 & 0 & 0 \\ 0 & \beta\alpha g^{k-1}\otimes e_1 & 0 \\ 0 & 0 & \eta^{s-1}\otimes e_1 \end{pmatrix},$$

$$\mathrm{T}^2(v_5) = \left(\begin{array}{c|c|c|c} \mathrm{O}_{6,3} & \mathrm{A}^{(11)} & \mathrm{O}_{6,1} & \mathrm{A}^{(12)} \end{array} \right),$$

где

$$\mathrm{A}^{(11)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \eta^{s-1}\otimes e_1 & \alpha\gamma b^{k-1}\otimes e_1 \\ * & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & \beta\alpha g^{k-1}\otimes\eta^{s-2} & \alpha g^{k-1}\otimes\eta^{s-1} \end{pmatrix},$$

а также

$$(\mathrm{A}^{(11)})_{3,1} = \beta\alpha g^{k-1}\otimes e_0 + \beta a^{k-1}\otimes\alpha + \beta a^{k-1}\otimes\gamma\beta a^{k-1},$$

и, кроме того, $\mathrm{A}^{(12)}$ – 6×3-*матрица, имеющая ровно три ненулевых элемента, а именно,*

$$(\mathrm{A}^{(12)})_{4,1} = \eta^{s-1}\otimes e_0,\ (\mathrm{A}^{(12)})_{5,2} = \alpha\gamma b^{k-1}\otimes e_1,\ (\mathrm{A}^{(12)})_{6,3} = \beta\alpha\, g^{k-1}\otimes e_1,$$

$$\mathrm{T}^0(v_6) = \left(\begin{array}{c|c} a^k\otimes e_0 & \mathrm{O}_{2,5} \\ 0 & \end{array} \right),$$

$\mathrm{T}^1(v_6)$ – 4×8-*матрица, имеющая ровно три ненулевых элемента, а именно,*

$$(\mathrm{T}^1(v_6))_{11} = (\mathrm{T}^1(v_6))_{15} = a^k\otimes e_0,\ (\mathrm{T}^1(v_6))_{33} = a^k\otimes e_1,$$

$\mathrm{T}^2(v_6)$ – 6×10-*матрица, имеющая ровно четыре ненулевых элемента, а именно,*

$$(\mathrm{T}^2(v_6))_{11} = (\mathrm{T}^2(v_6))_{13} = (\mathrm{T}^2(v_6))_{33} = a^k\otimes e_0,\ (\mathrm{T}^2(v_6))_{66} = a^k\otimes e_1,$$

$$\mathrm{T}^0(w_1) = \left(\begin{array}{c|ccc} \mathrm{O}_{2,5} & e_0\otimes e_0 & 0 & 0 \\ & 0 & e_1\otimes e_1 & e_1\otimes e_1 \end{array} \right),$$

$$\mathrm{T}^1(w_1) = \left(\begin{array}{c|c|c} \mathrm{O}_{4,3} & \mathrm{A}^{(13)} & \mathrm{A}^{(14)} \end{array} \right),$$

где

$$\mathrm{A}^{(13)} = \begin{pmatrix} \sum\limits_{i=0}^{k-1} \beta a^i \otimes g^{k-1-i} & 0 & \sum\limits_{i=0}^{k-1} a^i \otimes \gamma b^{k-1-i} \\ \sum\limits_{i=0}^{k-1} b^i \otimes \alpha g^{k-1-i} & 0 & \sum\limits_{i=0}^{k-2} \alpha\gamma b^i \otimes \alpha\gamma b^{k-2-i} \\ \sum\limits_{i=0}^{k-2} \beta\alpha g^i \otimes \beta\alpha g^{k-2-i} & 0 & \sum\limits_{i=0}^{k-1} \alpha g^i \otimes b^{k-1-i} \\ 0 & \sum\limits_{i=0}^{s-2} \eta^i \otimes \eta^{s-2-i} & 0 \end{pmatrix}, \tag{3.46}$$

$$\mathrm{A}^{(14)} = \mathrm{diag}\,(0,\ e_1 \otimes e_0\,,\ e_0 \otimes e_1\,,\ e_1 \otimes e_1)\,, \tag{3.47}$$

$$\mathrm{T}^2(w_1) = \left(\begin{array}{c|c|c} \mathrm{O}_{2,4} & \mathrm{A}^{(15)} & \mathrm{O}_{2,4} \\ \hline \mathrm{A}^{(16)} & \mathrm{O}_{4,4} & \mathrm{A}^{(17)} \end{array} \right), \tag{3.48}$$

где

$$\mathrm{A}^{(15)} = \begin{pmatrix} 0 & e_0 \otimes e_0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e_1 \otimes e_1 & e_1 \otimes e_1 \end{pmatrix}, \tag{3.49}$$

в матрице $\mathrm{A}^{(16)}$ *имеется ровно три ненулевых элемента:*

$$\left. \begin{array}{l} (\mathrm{A}^{(16)})_{1,4} = \beta a^{k-1} \otimes \gamma b^{k-1},\ (\mathrm{A}^{(16)})_{2,2} = \eta^{s-2} \otimes \alpha g^{k-1}, \\ (\mathrm{A}^{(16)})_{4,3} = \alpha g^{k-1} \otimes \eta^{s-2}, \end{array} \right\} \tag{3.50}$$

а также

$$\mathrm{A}^{(17)} = \mathrm{diag}\,(0,\ e_1 \otimes e_0,\ e_1 \otimes e_1,\ e_0 \otimes e_1)\,, \tag{3.51}$$

$$\mathrm{T}^3(w_1) = \left(\begin{array}{c|c|c|c} \mathrm{O}_{4,3} & \widetilde{\mathrm{A}}^{(13)} & \mathrm{A}^{(14)} & \mathrm{O}_{2,4} \\ \hline \mathrm{O}_{4,3} & \mathrm{O}_{4,4} & \mathrm{O}_{4,4} & \mathrm{A}^{(18)} \end{array} \right),$$

где матрица $\mathrm{A}^{(14)}$ *описана в* (3.47), *а матрица* $\widetilde{\mathrm{A}}^{(13)}$ *отличается от матрицы* $\mathrm{A}^{(13)}$ *из* (3.46) *в одной позиции, а именно,*

$$(\widetilde{\mathrm{A}}^{(13)})_{2,3} = \sum_{i=0}^{k-2} \alpha\gamma b^i \otimes \alpha\gamma b^{k-2-i} + \gamma b^{k-1} \otimes \gamma b^{k-1},$$

кроме того,

$$\mathrm{A}^{(18)} = \mathrm{diag}\,(0,\ e_0 \otimes e_0,\ e_1 \otimes e_1,\ e_1 \otimes e_1)\,, \tag{3.52}$$

$$\mathrm{T}^0(w_2) = \left(\begin{array}{cc|c|c|c} \alpha\otimes e_0 & \beta\otimes e_0 & \mathrm{O}_{2,2} & \alpha\otimes e_0 & \mathrm{O}_{2,3} \\ 0 & 0 & & 0 & \end{array}\right),$$

$$\mathrm{T}^1(w_2) = \left(\begin{array}{c|c} \mathrm{A}^{(19)} & \mathrm{O}_{4,5} \end{array}\right),$$

где

$$\mathrm{A}^{(19)} = \begin{pmatrix} \sum\limits_{i=0}^{k-1} a^i\otimes\gamma\beta a^{k-1-i} & \sum\limits_{i=0}^{k-1} \beta a^i\otimes\gamma b^{k-1-i} & e_0\otimes(\alpha+\gamma\beta a^{k-1}) & 0 & 0 \\ * & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \sum\limits_{i=0}^{k-1} g^i\otimes\beta\alpha g^{k-1-i} & 0 & 0 & 0 & \beta\otimes e_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

а также

$$(\mathrm{A}^{(19)})_{2,1} = \sum_{i=0}^{k-1} \gamma b^i\otimes\alpha g^{k-1-i} + \gamma b^{k-1}\otimes\gamma\beta a^{k-1},$$

$$\mathrm{T}^2(w_2) = \left(\begin{array}{c|c|c|c|c|c} \mathrm{A}^{(20)} & \mathrm{O}_{6,1} & \mathrm{A}^{(21)} & \mathrm{O}_{6,1} & \mathrm{A}^{(22)} & \mathrm{O}_{6,4} \end{array}\right),$$

где $\mathrm{A}^{(20)}, \mathrm{A}^{(21)}$ *– матрицы-столбцы, такие, что*

$(\mathrm{A}^{(20)})^{\mathrm{T}} = \big((\alpha+\gamma\beta a^{k-1})\otimes e_0 + e_0\otimes\gamma\beta a^{k-1},\ \gamma b^{k-1}\otimes\beta,\ \gamma\beta a^{k-1}\otimes e_0, \mathrm{O}_3\big),$

$(\mathrm{A}^{(21)})^{\mathrm{T}} = \big(0,\ \gamma\otimes e_1,\ \mathrm{O}_3,\ e_0\otimes\eta^{s-1}\big),$

а $\mathrm{A}^{(22)}$ *–* 6×4*-матрица, у которой только три элемента ненулевые, а именно,*

$$(\mathrm{A}^{(22)})_{1,1} = (\mathrm{A}^{(22)})_{3,1} = (\alpha+\gamma\beta a^{k-1})\otimes e_0,\ (\mathrm{A}^{(22)})_{6,4} = \beta\otimes e_1,$$

$$\mathrm{T}^3(w_2) = \left(\begin{array}{c|c|c|c|c|c} \mathrm{A}^{(23)} & \mathrm{O}_{8,2} & \mathrm{A}^{(24)} & \mathrm{O}_{8,2} & \mathrm{A}^{(25)} & \mathrm{O}_{8,3} \end{array}\right);$$

здесь

$$(\mathrm{A}^{(23)}) = \left(\begin{array}{c} (\mathrm{A}^{(23)})' \\ \hline (\mathrm{A}^{(23)})'' \end{array}\right),$$

где

$$(\mathrm{A}^{(23)})' = \begin{pmatrix} \sum\limits_{i=0}^{k-1} \gamma\beta a^i\otimes g^{k-1-i} & 0 & e_0\otimes\alpha+\gamma\beta a^{k-1}\otimes e_0 \\ \sum\limits_{i=0}^{k-1} \gamma b^i\otimes\alpha g^{k-1-i} & 0 & \alpha\gamma b^{k-1}\otimes e_0+\gamma b^{k-1}\otimes\alpha \\ \sum\limits_{i=0}^{k-1} \alpha g^i\otimes\beta a^{k-1-i} & \sum\limits_{i=0}^{k-1} \beta\alpha g^i\otimes\beta^{k-1-i} & \sum\limits_{i=0}^{k-1} g^i\otimes\beta\alpha g^{k-1-i} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

а $(\mathrm{A}^{(23)})''$ – 4×3*-матрица, имеющая единственный ненулевой элемент* $\big((\mathrm{A}^{(23)})''\big)_{1,3} = e_0\otimes\gamma\beta a^{k-1}$*; кроме того, в* 8×3*-матрице* $\mathrm{A}^{(24)}$ *имеется ровно четыре ненулевых элемента, а именно,*

$$(\mathrm{A}^{(24)})_{3,1} = e_0\otimes\eta,\ (\mathrm{A}^{(24)})_{5,2} = (\alpha+\gamma\beta a^{k-1})\otimes e_0,$$
$$(\mathrm{A}^{(24)})_{8,1} = \alpha\gamma b^{k-1}\otimes e_1,\ (\mathrm{A}^{(24)})_{8,3} = e_1\otimes\beta,$$

наконец, $\mathrm{A}^{(25)}$ *– это матрица-столбец с единственным ненулевым элементом* $(\mathrm{A}^{(25)})_{5,1} = (\alpha+\gamma\beta a^{k-1})\otimes e_0$*;*

$$\mathrm{T}^0(w_3) = \left(\begin{array}{cccc|c} 0 & \beta\otimes e_0 & 0 & 0 & \mathrm{O}_{2,4} \\ 0 & 0 & 0 & \eta\otimes e_1 & \end{array}\right),$$
$$\mathrm{T}^1(w_3) = \left(\begin{array}{c|c|c} \mathrm{A}^{(26)} & \mathrm{A}^{(27)} & \mathrm{O}_{4,5} \end{array}\right),$$

где

$$\mathrm{A}^{(26)} = \begin{pmatrix} \sum\limits_{i=0}^{k-1}(i+1)\gamma\beta a^i\otimes g^{k-1-i} + \sum\limits_{i=1}^{k-2} ia^i\otimes\gamma\beta a^{k-1-i} & \sum\limits_{i=0}^{k-1}(i+1)\beta a^i\otimes\gamma b^{k-1-i} \\ \sum\limits_{i=1}^{k-2} i\gamma b^i\otimes\alpha g^{k-1-i} + \sum\limits_{i=1}^{k-2} i\alpha\gamma b^i\otimes a^{k-1-i} & \sum\limits_{i=1}^{k-2} ib^i\otimes\alpha\gamma b^{k-1-i} \\ * & \sum\limits_{i=0}^{k-1}(i+1)\beta\alpha g^i\otimes b^{k-1-i} \\ 0 & \sum\limits_{i=1}^{s-2} i\eta^i\otimes\eta^{s-1-i} \end{pmatrix}, \tag{3.53}$$

и где

$$(\mathrm{A}^{(26)})_{3,1} = \sum_{i=1}^{k-2} ig^i\otimes\beta\alpha g^{k-1-i} + \sum_{i=1}^{k-2} i\alpha g^i\otimes\beta a^{k-1-i} + \gamma\beta a^{k-1}\otimes\beta a^{k-1},$$

кроме того, $\mathrm{A}^{(27)}$ *– это* 4×3*-матрица, у которой только два элемента ненулевые:*

$$(\mathrm{A}^{(27)})_{2,2} = \eta\otimes e_0,\ (\mathrm{A}^{(27)})_{3,3} = \beta\otimes e_1,$$
$$\mathrm{T}^2(w_3) = \left(\begin{array}{c|c|c|c} \mathrm{A}^{(28)} & \mathrm{O}_{6,2} & \mathrm{A}^{(29)} & \mathrm{O}_{6,4} \end{array}\right),$$

где $\mathrm{A}^{(28)}$ *–* 6×4*-матрица, у которой ровно четыре ненулевых элемента:*

$$(\mathrm{A}^{(28)})_{1,2} = \beta\otimes e_0,\ (\mathrm{A}^{(28)})_{2,4} = e_1\otimes\eta,$$
$$(\mathrm{A}^{(28)})_{3,1} = \gamma\beta a^{k-1}\otimes e_0,\ (\mathrm{A}^{(28)})_{4,4} = e_1\otimes\alpha\gamma b^{k-1},$$

а $\mathrm{A}^{(29)}$ *–* 6×2*-матрица, у которой ровно два ненулевых элемента:*

$$(\mathrm{A}^{(29)})_{5,1} = \eta\otimes e_1,\ (\mathrm{A}^{(29)})_{5,2} = e_1\otimes\eta,$$

$$\mathrm{T}^3(w_3) = \left(\begin{array}{c|c|c} \widetilde{\mathrm{A}}^{(26)} & \mathrm{A}^{(30)} & \mathrm{O}_{4,8} \\ \hline \mathrm{O}_{4,2} & \mathrm{A}^{(31)} & \mathrm{O}_{4,8} \end{array}\right),$$

здесь матрица $\widetilde{\mathrm{A}}^{(26)}$ *отличается от* $\mathrm{A}^{(26)}$ *из* (3.53) *в двух позициях, а именно,*

$$\widetilde{\mathrm{A}}^{(26)}_{3,1} = \sum_{i=1}^{k-2} ig^i \otimes \beta\alpha g^{k-1-i} + \sum_{i=1}^{k-2} i\alpha g^i \otimes \beta a^{k-1-i},$$

$$\widetilde{\mathrm{A}}^{(26)}_{4,2} = \sum_{i=0}^{s-1} (i+1)\eta^i \otimes \eta^{s-1-i},$$

кроме того,

$$\mathrm{A}^{(30)} = \begin{pmatrix} \sum\limits_{i=0}^{k-3}(i+1)\gamma\beta a^i \otimes g^{k-1-i} & 0 & 0 & 0 \\ \sum\limits_{i=1}^{k-2} i\gamma b^i \otimes \alpha g^{k-1-i} & 0 & 0 & 0 \\ \sum\limits_{i=1}^{k-2} ig^i \otimes \beta\alpha g^{k-1-i} & 0 & \beta \otimes e_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \gamma \otimes e_1 \end{pmatrix},$$

а в матрице $\mathrm{A}^{(31)}$ *ровно четыре элемента отличны от нуля:*

$$(\mathrm{A}^{(31)})_{1,1} = \gamma\beta a^{k-1} \otimes e_0,\ (\mathrm{A}^{(31)})_{3,2} = e_1 \otimes \beta\alpha g^{k-1},$$
$$(\mathrm{A}^{(31)})_{4,3} = e_1 \otimes \eta^{s-1},\ (\mathrm{A}^{(31)})_{4,4} = \alpha\gamma b^{k-1} \otimes e_1,$$
$$\mathrm{T}^0(z_1) = \left(\begin{array}{c|c} \mathrm{O}_{2,3} & \mathrm{A}^{(32)} \end{array}\right),$$

где

$$\mathrm{A}^{(32)} = \begin{pmatrix} \beta\alpha g^{k-1} \otimes e_0 & 0 & 0 \\ 0 & \eta^{s-1} \otimes e_1 & \alpha\gamma b^{k-1} \otimes e_1 \end{pmatrix} \tag{3.54}$$

$$\mathrm{T}^1(z_1) = \left(\begin{array}{c|c|c} \mathrm{A}^{(33)} & \mathrm{A}^{(34)} & \mathrm{O}_{4,4} \end{array}\right),$$

где в 4×4*-матрице* $\mathrm{A}^{(33)}$ *ненулевыми являются три элемента:*

$$(\mathrm{A}^{(33)})_{1,4} = \beta\alpha g^{k-1} \otimes \gamma b^{k-1},\ (\mathrm{A}^{(33)})_{2,2} = \eta^{s-1} \otimes \alpha g^{k-1},$$
$$(\mathrm{A}^{(33)})_{3,3} = \alpha g^{k-1} \otimes \eta^{s-1},$$

и, кроме того,

$$\mathrm{A}^{(34)} = \mathrm{diag}\,(0\,, \alpha\gamma b^{k-1} \otimes e_0,\ \beta\alpha g^{k-1} \otimes e_1,\ \eta^{s-1} \otimes e_1), \tag{3.55}$$

$$\mathrm{T}^2(z_1) = \left(\begin{array}{c|c|c|c} \mathrm{O}_{2,3} & \mathrm{A}^{(32)} & \mathrm{O}_{2,4} & \mathrm{O}_{2,4} \\ \hline \mathrm{O}_{4,3} & \mathrm{A}^{(35)} & \mathrm{A}^{(36)} & \mathrm{O}_{4,4} \end{array} \right),$$

где $\mathrm{A}^{(32)}$ *из* (3.54), $4{\times}3$-*матрица* $\mathrm{A}^{(35)}$ *имеет два ненулевых элемента*

$$(\mathrm{A}^{(35)})_{4,2} = \beta\alpha g^{k-1} \otimes \eta^{s-2},\ (\mathrm{A}^{(35)})_{4,3} = \alpha g^{k-1} \otimes \eta^{s-1},$$

и, кроме того,

$$\mathrm{A}^{(36)} = \mathrm{diag}\,(0\,, \eta^{s-1} \otimes e_0,\ \alpha\gamma b^{k-1} \otimes e_1,\ \beta\alpha g^{s-1} \otimes e_1), \tag{3.56}$$

$$\mathrm{T}^3(z_1) = \left(\begin{array}{c|c|c|c} \mathrm{A}^{(37)} & \mathrm{A}^{(34)} & \mathrm{O}_{2,4} & \mathrm{O}_{2,4} \\ \hline \mathrm{O}_{4,4} & \mathrm{O}_{4,4} & \mathrm{A}^{(38)} & \mathrm{O}_{4,4} \end{array} \right),$$

где $\mathrm{A}^{(34)}$ *из* (3.55), 4×4-*матрица* $\mathrm{A}^{(37)}$ *имеет ровно три ненулевых элемента*

$$(\mathrm{A}^{(37)})_{1,4} = \beta\alpha g^{k-1} \otimes \gamma b^{k-1},\ (\mathrm{A}^{(37)})_{3,3} = \alpha g^{k-1} \otimes \eta^{s-1},$$
$$(\mathrm{A}^{(37)})_{2,4} = \eta^{s-2} \otimes \beta\alpha g^{k-1},$$

и, кроме того,

$$\mathrm{A}^{(38)} = \mathrm{diag}\,(0\,, \beta\alpha g^{k-1} \otimes e_0,\ \eta^{s-1} \otimes e_1,\ \alpha\gamma b^{k-1} \otimes e_1),$$

$$\mathrm{T}^4(z_1) = \left(\begin{array}{c|c|c|c|c} \mathrm{O}_{2,3} & \mathrm{A}^{(39)} & \mathrm{O}_{2,4} & \mathrm{O}_{2,4} & \mathrm{O}_{2,4} \\ \hline \mathrm{O}_{4,3} & \mathrm{A}^{(40)} & \mathrm{A}^{(36)} & \mathrm{O}_{4,4} & \mathrm{O}_{4,4} \\ \hline \mathrm{O}_{4,3} & \mathrm{O}_{4,3} & \mathrm{O}_{4,4} & \mathrm{A}^{(34)} & \mathrm{O}_{4,4} \end{array} \right);$$

здесь

$$\mathrm{A}^{(39)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ e_1 \otimes \beta\gamma a^{k-1} & e_1 \otimes \eta^{s-1} & \alpha\gamma b^{k-1} \otimes e_1 \end{pmatrix},$$

в 4×3-*матрице* $\mathrm{A}^{(40)}$ *ровно два ненулевых элемента*

$$(\mathrm{A}^{(40)})_{1,1} = \beta a^{k-1} \otimes \gamma\beta a^{k-1},\ (\mathrm{A}^{(40)})_{4,3} = \alpha g^{k-1} \otimes \eta^{s-1},$$

и, кроме того, матрицы $\mathrm{A}^{(34)}$ *и* $\mathrm{A}^{(36)}$ *из* (3.55) *и* (3.56) *соответственно,*

далее, для $l \in \{0, 1, 2, 3\}$

$$\mathrm{T}^\ell(t) = \left(\begin{array}{c|c} \mathrm{T}^\ell(w_1) & \mathrm{O}_{2(\ell+1),4} \end{array} \right),$$

где $\mathrm{T}^\ell(w_1)$ *– трансляции элемента* w_1*, найденные ранее,*

$$\mathrm{T}^4(t)=\left(\begin{array}{c|c|c}\mathrm{T}^2(w_1) & \mathrm{O}_{4,4} & \mathrm{O}_{4,4}\\ \hline \mathrm{O}_{4,12} & \mathrm{A}^{(14)} & \mathrm{O}_{4,4}\end{array}\right),$$

где матрица $\mathrm{A}^{(14)}$ *из* (3.47)*, а* $\mathrm{T}^2(w_1)$ *– из* (3.48)*,*

$$\mathrm{T}^5(t)=\left(\begin{array}{c|c|c|c}\mathrm{T}^1(w_1) & \mathrm{O}_{4,4} & \mathrm{O}_{4,4} & \mathrm{O}_{4,4}\\ \hline \mathrm{O}_{4,10} & \mathrm{A}^{(18)} & \mathrm{O}_{4,4} & \mathrm{O}_{4,4}\\ \hline \mathrm{O}_{4,10} & \mathrm{O}_{4,4} & \mathrm{A}^{(16)} & \mathrm{O}_{4,4}\end{array}\right),$$

где матрицы $\mathrm{A}^{(16)}$ *и* $\mathrm{A}^{(18)}$ *из* (3.50) *и* (3.52) *соответственно.*

Доказательство леммы состоит в прямой проверке соотношений $\mu\mathrm{T}^0(\zeta)=\zeta$, $d_{i-1}\mathrm{T}^i(\zeta)=\mathrm{T}^{i-1}(\zeta)d_{i+\deg\zeta-1}$ $(i>0)$ для $\zeta\in\mathcal{Y}\setminus\{z_0\}$ с $\deg\zeta>0$.

Теперь доказательство предложения 3.1 завершается с помощью прямых вычислений с матрицами, приведёнными в лемме 3.4, и эту проверку предоставляется проделать читателю. □

Лемма 3.5. *Для любого* $\ell\in\mathbb{N}$

(1) $v_1^\ell=\big(\mathrm{O},e_0,\mathrm{O}_3\big)\in\mathrm{HH}^{2\ell}(R)$,

(2) $u_3v_1^\ell=\big(\mathrm{O},\gamma\beta a^{k-1},\mathrm{O}_3\big)\in\mathrm{HH}^{2\ell+1}(R)$,

(3) $v_6v_1^\ell=\big(\mathrm{O},a^k,\mathrm{O}_7\big)\in\mathrm{HH}^{2\ell+2}(R)$,

(4) $v_1^\ell(w_2+w_3)=\big(\mathrm{O},\alpha,\mathrm{O}_3,\alpha,\mathrm{O}_3\big)\in\mathrm{HH}^{2\ell+3}(R)$,

(5) $w_1^\ell=\big(\mathrm{O},e_0,e_1,e_1\big)\in\mathrm{HH}^{3\ell}(R)$,

(6) $u_1w_1^\ell=\big(\mathrm{O},\alpha\gamma b^{k-1},0,\beta,\mathrm{O}_2\big)\in\mathrm{HH}^{3\ell+1}(R)$,

(7) $v_5w_1^\ell=\big(\mathrm{O},\beta\alpha g^{k-1},\eta^{s-1},\alpha\gamma b^{k-1}\big)\in\mathrm{HH}^{3\ell+2}(R)$,

(8) $w_1^\ell z_1=\big(\mathrm{O},\beta\alpha g^{k-1},\eta^{s-1},\alpha\gamma b^{k-1},\mathrm{O}_4\big)\in\mathrm{HH}^{3\ell+4}(R)$,

(9) $w_1^\ell t=\big(\mathrm{O},e_0,e_1,e_1,\mathrm{O}_4\big)\in\mathrm{HH}^{3\ell+5}(R)$,

(10) $u_1w_1^\ell t=\big(\mathrm{O},\alpha\gamma b^{k-1},0,\beta,\mathrm{O}_6\big)\in\mathrm{HH}^{3\ell+6}(R)$.

Замечание 3.6. Из описания базисов для групп $\mathrm{H}^n(\mathcal{X}^\bullet)$, данного в [2, следствие 4.14], а также из точной последовательности (2.2) следует, что элементы групп $\mathrm{HH}^n(R)$, указанные в лемме 3.5 (для соответствующих значений n), вместе с подгруппой $z_0\cdot\mathrm{HH}^{n-4}(R)$ порождают группу $\mathrm{HH}^n(R)$.

Доказательство леммы 3.5. (1) Простая проверка (с учетом леммы 3.4) показывает, что $v_1^2 = \big(\,\mathrm{O}_6, e_0, \mathrm{O}_3\,\big)$. Далее, в предположении, что $v_1^\ell = \big(\,\mathrm{O}, e_0, \mathrm{O}_3\,\big)$ ($\ell \geqslant 2$), находим следующие трансляции этого элемента: в качестве $\mathrm{T}^0(v_1^\ell)$ берём блочную матрицу вида

$$\mathrm{T}^0(v_1^\ell) = \left(\begin{array}{c|c|c} \mathrm{O}_{2,4\ell+2} & \begin{array}{c} e_0\otimes e_0 \\ 0 \end{array} & \mathrm{O}_{2,3} \end{array}\right), \tag{3.57}$$

$\mathrm{T}^1(v_1^\ell)$ – это $4\times(4\ell+4)$-матрица, которая имеет ровно два ненулевых столбца, а именно,

$$(\mathrm{T}^1(v_1^\ell))_{*,4\ell-3} = \Big(\sum_{i=0}^{k-2}\gamma\beta a^i\otimes\gamma\beta a^{k-2-i}, \sum_{i=0}^{k-1}\gamma b^i\otimes a^{k-1-i}, \sum_{i=0}^{k-1} g^i\otimes\beta a^{k-1-i}, 0\,\Big)^{\mathrm{T}},$$

$$(\mathrm{T}^1(v_1^\ell))_{*,4\ell+1} = \big(\,e_0\otimes e_0, \mathrm{O}_3\,\big)^{\mathrm{T}},$$

$\mathrm{T}^2(v_1^\ell)$ – это $6\times(4\ell+6)$-матрица, которая имеет ровно три ненулевых столбца, а именно,

$$\begin{aligned}
(\mathrm{T}^2(v_1^\ell))_{*,4\ell-5} &= \big(\,\mathrm{O}_4, \gamma b^{k-1}\otimes\beta a^{k-1},\ 0\,\big)^{\mathrm{T}},\\
(\mathrm{T}^2(v_1^\ell))_{*,4\ell-1} &= \big(\,e_0\otimes e_0, \mathrm{O}_5\,\big)^{\mathrm{T}},\\
(\mathrm{T}^2(v_1^\ell))_{*,4\ell+3} &= \big(\,\mathrm{O}_2\,, e_0\otimes e_0, \mathrm{O}_3\,\big)^{\mathrm{T}},
\end{aligned}$$

$\mathrm{T}^3(v_1^\ell)$ – это $8\times(4\ell+8)$-матрица, которая имеет ровно три ненулевых столбца, а именно,

$$(\mathrm{T}^3(v_1^\ell))_{*,4\ell-3} = \Big(\sum_{i=0}^{k-2}\gamma\beta a^i\otimes\gamma\beta a^{k-2-i}, \sum_{i=0}^{k-1}\gamma b^i\otimes a^{k-1-i}, \sum_{i=0}^{k-1} g^i\otimes\beta a^{k-1-i}, \mathrm{O}_5\,\Big)^{\mathrm{T}},$$

$$\begin{aligned}
(\mathrm{T}^3(v_1^\ell))_{*,4\ell+1} &= \big(\,e_0\otimes e_0,\ \mathrm{O}_7\,\big)^{\mathrm{T}},\\
(\mathrm{T}^3(v_1^\ell))_{*,4\ell+5} &= \big(\,\mathrm{O}_4, e_0\otimes e_0, \mathrm{O}_3\,\big)^{\mathrm{T}},
\end{aligned}$$

Отсюда, в частности, следует, что

$$v_1^{\ell+1} = \mu\mathrm{T}^0(v_1)\mathrm{T}^2(v_1^\ell) = \big(\,\mathrm{O}, e_0, \mathrm{O}_3\,\big).$$

Теперь с использованием предыдущих вычислений доказываем соотношения из второго, третьего и четвёртого пунктов леммы:

$$\begin{aligned} u_3v_1^\ell &= \mu \mathrm{T}^0(u_3)\mathrm{T}^1(v_1^\ell) = \big(\,\mathrm{O}, \gamma\beta a^{k-1}, \mathrm{O}_3\,\big),\\ v_6v_1^\ell &= \mu \mathrm{T}^0(v_6)\mathrm{T}^2(v_1^\ell) = \big(\,\mathrm{O}, a^k, \mathrm{O}_7\,\big),\\ (w_2+w_3)v_1^\ell &= \mu \mathrm{T}^0(w_2+w_3)\mathrm{T}^3(v_1^\ell) = \big(\,\mathrm{O}, \alpha, \mathrm{O}_3, \alpha, \mathrm{O}_3\,\big). \end{aligned}$$

(5) С учетом леммы 3.4 имеем $w_1^2 = \big(\mathrm{O}_{11}, e_0, e_1, e_1\big)$. Далее, в предположении, что $w_1^\ell = \big(\,\mathrm{O}, e_0, e_1, e_1\big)$ $(\ell \in \mathbb{N})$, находим следующие трансляции:

$$\mathrm{T}^0(w_1^\ell) = \left(\begin{array}{c|ccc} \mathrm{O}_{2,6\ell-1} & e_0\otimes e_0 & 0 & 0\\ & 0 & e_1\otimes e_1 & e_1\otimes e_1 \end{array}\right), \tag{3.58}$$

$$\mathrm{T}^1(w_1^\ell) = \left(\begin{array}{c|c|c} \mathrm{O}_{4,6\ell-3} & \mathrm{A}^{(13)} & \mathrm{A}^{(14)} \end{array}\right), \tag{3.59}$$

где матрицы $\mathrm{A}^{(13)}$ и $\mathrm{A}^{(14)}$ из (3.46) и (3.47) соответственно,

$$\mathrm{T}^2(w_1^\ell) = \left(\begin{array}{c|c|c|c} \mathrm{O}_{2,\,6\ell-6} & \mathrm{O} & \mathrm{A}^{(15)} & \mathrm{O}\\ \hline \mathrm{O}_{4,\,6\ell-6} & \mathrm{A}^{(16)} & \mathrm{O} & \mathrm{A}^{(17)} \end{array}\right), \tag{3.60}$$

где матрицы $\mathrm{A}^{(15)}, \mathrm{A}^{(16)}, \mathrm{A}^{(17)}$ описаны в (3.49), (3.50) и (3.51) соответственно,

$$\mathrm{T}^3(w_1^\ell) = \left(\begin{array}{c|c|c|c} \mathrm{O}_{4,\,6\ell-3} & \mathrm{A}^{(13)} & \mathrm{A}^{(14)} & \mathrm{O}\\ \hline \mathrm{O}_{4,\,6\ell-3} & \mathrm{O} & \mathrm{O} & \mathrm{A}^{(18)} \end{array}\right), \tag{3.61}$$

где матрицы $\mathrm{A}^{(13)}, \mathrm{A}^{(14)}, \mathrm{A}^{(18)}$ указаны в (3.46), (3.47) и (3.52) соответственно

$$\mathrm{T}^4(w_1^\ell) = \left(\begin{array}{c|c|c|c|c} \mathrm{O}_{2,\,6\ell-6} & \mathrm{O} & \mathrm{A}^{(15)} & \mathrm{O} & \mathrm{O}\\ \hline \mathrm{O}_{4,\,6\ell-6} & \mathrm{A}^{(16)} & B^{(41)} & \mathrm{A}^{(17)} & \mathrm{O}\\ \hline \mathrm{O}_{4,\,6\ell-6} & \mathrm{O} & \mathrm{O} & \mathrm{O} & \mathrm{A}^{(14)} \end{array}\right), \tag{3.62}$$

где матрица $B^{(41)}$ содержит единственный ненулевой элемент $\big(B^{(41)}\big)_{32} = \gamma b^{k-1}\otimes\beta a^{k-1}$, а матрицы $\mathrm{A}^{(14)}, \mathrm{A}^{(15)}, \mathrm{A}^{(16)}, \mathrm{A}^{(17)}$ описаны в (3.47), (3.49), (3.50) и (3.51) соответственно.

$$\mathrm{T}^5(w_1^\ell) = \left(\begin{array}{c|c|c|c|c} \mathrm{O}_{4,\,6\ell-3} & \mathrm{A}^{(13)} & \mathrm{A}^{(14)} & \mathrm{O} & \mathrm{O} \\ \hline \mathrm{O}_{4,\,6\ell-3} & \mathrm{O} & \mathrm{O} & \mathrm{A}^{(18)} & \mathrm{O} \\ \hline \mathrm{O}_{4,\,6\ell-3} & \mathrm{O} & \mathrm{O} & \mathrm{O} & \mathrm{A}^{(17)} \end{array}\right), \qquad (3.63)$$

где матрицы $\mathrm{A}^{(13)}, \mathrm{A}^{(14)}, \mathrm{A}^{(17)}, \mathrm{A}^{(18)}$ описаны в (3.46), (3.47), (3.51) и (3.52) соответственно.

Тогда

$$w_1^{\ell+1} = \mu \mathrm{T}^0(w_1)\mathrm{T}^3(w_1^\ell) = \big(\,\mathrm{O}, e_0, e_1, e_1\big),$$

и по индукции получаем требуемое соотношение.

Теперь соотношения в формулировке леммы с шестого по девятое получаем с помощью прямых вычислений:

$$\begin{aligned} u_1 w_1^\ell &= \mu \mathrm{T}^0(u_1)\mathrm{T}^1(w_1^\ell) = \big(\,\mathrm{O}, \alpha\gamma b^{k-1}, 0, \beta, \mathrm{O}_2\,\big), \\ v_5 w_1^\ell &= \mu \mathrm{T}^0(v_5)\mathrm{T}^2(w_1^\ell) = \big(\,\mathrm{O}, \beta\alpha g^{k-1}, \eta^{s-1}, \alpha\gamma b^{k-1}\big), \\ z_1 w_1^\ell &= \mu \mathrm{T}^0(z_1)\mathrm{T}^4(w_1^\ell) = \big(\,\mathrm{O}, \beta\alpha g^{k-1}, \eta^{s-1}, \alpha\gamma b^{k-1}, \mathrm{O}_4\,\big), \\ t w_1^\ell &= \mu \mathrm{T}^0(t)\mathrm{T}^5(w_1^\ell) = \big(\,\mathrm{O}, e_0, e_1, e_1, \mathrm{O}_4\,\big). \end{aligned}$$

(10) Наконец, находим следующие трансляции элемента $w_1^\ell t$:

$$\mathrm{T}^0(w_1^\ell t) = \left(\begin{array}{c|ccc|c} \mathrm{O}_{2,\,6\ell+5} & \begin{matrix} e_0\otimes e_0 \\ 0 \end{matrix} & \begin{matrix} 0 \\ e_1\otimes e_1 \end{matrix} & \begin{matrix} 0 \\ e_1\otimes e_1 \end{matrix} & \mathrm{O}_{2,\,4} \end{array}\right), \qquad (3.64)$$

$$\mathrm{T}^1(w_1^\ell t) = \left(\begin{array}{c|c|c|c} \mathrm{O}_{2,6\ell+3} & \mathrm{A}^{(13)} & \mathrm{A}^{(14)} & \mathrm{O}_{4,4} \end{array}\right), \qquad (3.65)$$

где $\mathrm{A}^{(13)}$, $\mathrm{A}^{(14)}$ – матрицы из (3.46) и (3.47) соответственно.

Тогда

$$u_1 w_1^\ell t = \mu \mathrm{T}^0(u_1)\mathrm{T}^1(w_1^\ell t) = \big(\,\mathrm{O}, \alpha\gamma b^{k-1}, 0, \beta, \mathrm{O}_6\,\big). \qquad \square$$

Предложение 3.7. *Предположим, что k и s нечётны, $k > 2$. Тогда* $\mathrm{HH}^*(R)$ *как K-алгебра порождается множеством $\mathcal{Y}$, указанным в* (3.7).

Доказательство. Пусть $\mathcal{H}$ – K-подалгебра в $\mathrm{HH}^*(R)$, порождённая множеством $\mathcal{Y}\cup\{1\}$ (здесь 1 – единица алгебры $\mathrm{HH}^*(R)$). Мы сначала докажем, что $\mathrm{HH}^i(R) \subset \mathcal{H}$ для $i \leqslant 5$, а затем с помощью индукции по n установим включение $\mathrm{HH}^n(R) \subset \mathcal{H}$.

Легко непосредственно проверяется, что $\mathrm{HH}^0(R)\cup\mathrm{HH}^1(R) \subset \mathcal{H}$.

Поскольку попарные произведения однородных элементов степени 1 равны нулю (см. (3.14)), то, как и в предыдущем случае, достаточно произвести умножения образующих степени 2 на образующие степени 0, и вновь легко получаем включение $\mathrm{HH}^2(R) \subset \mathcal{H}$.

Далее, для базисных элементов пространства $\mathrm{HH}^3(R)$, описанных в предложении 2.4, часть (3), кроме соотношений, определяющих элементы w_i, $i = 1, 2, 3$ (см. (3.4)), имеем также следующие соотношения:

$$\begin{aligned}
\big(\alpha g^i, \mathrm{O}_7\big) &= p_1^i w_3 \ \text{ для } 1 \leqslant i \leqslant k-1,\\
\big(\mathrm{O}_3, \eta^i, \mathrm{O}_4\big) &= p_2^{i-1} w_3 \ \text{ для } 2 \leqslant i \leqslant s,\\
\big(a^k, \mathrm{O}_7\big) &= u_1 v_4,\ \big(\mathrm{O}_4, \gamma\beta a^{k-1}, \mathrm{O}_3\big) = u_3 v_1,\\
\big(\mathrm{O}_5, a^k, \mathrm{O}_2\big) &= p_4 w_1,
\end{aligned}$$

откуда следует, что $\mathrm{HH}^3(R) \subset \mathcal{H}$.

Для базисных элементов пространства $\mathrm{HH}^4(R)$, описанных в предложении 2.4, часть (4), кроме соотношений, определяющих элементы z_i, $i = 0, 1$ (см. (3.5)), имеем также следующие соотношения:

$$\begin{aligned}
\big(a^i + g^i, b^i, \mathrm{O}_8\big) &= p_1^i z_0 \ \text{ для } 1 \leqslant i \leqslant k-1,\\
\big(0, \eta^i, \mathrm{O}_8\big) &= p_2^i z_0 \ \text{ для } 1 \leqslant i \leqslant s-1,\\
\big(\gamma\beta a^{k-1}, \mathrm{O}_9\big) &= p_3 z_0,\ \big(a^k, \mathrm{O}_9\big) = p_4 z_0,\\
\big(\mathrm{O}_3, \beta\alpha g^{k-1}, \mathrm{O}_4, \gamma, 0\big) &= u_1 w_1,\\
\big(\mathrm{O}_2, a^k, \mathrm{O}_7\big) &= v_1 v_6,\ \big(\mathrm{O}_6, e_0, \mathrm{O}_3\big) = v_1^2,
\end{aligned}$$

и следовательно, $\mathrm{HH}^4(R) \subset \mathcal{H}$.

Наконец, для базисных элементов пространства $\mathrm{HH}^5(R)$, описанных в предложении 2.4, часть (5), не лежащих в $z_0 \cdot \mathrm{HH}^1(R)$, имеем соотношения

$$\begin{aligned}
\big(\mathrm{O}_4, \alpha, \mathrm{O}_3, \alpha, \mathrm{O}_3\big) &= v_1(w_2 + w_3),\ \big(\mathrm{O}_5, e_0, e_1, e_1, \mathrm{O}_4\big) = t,\\
\big(\mathrm{O}_5, a^k, \mathrm{O}_6\big) &= p_4 t,\ \big(\mathrm{O}_8, \gamma\beta a^{k-1}, \mathrm{O}_3\big) = u_3 v_1^2,\\
\big(\mathrm{O}_9, \beta\alpha g^{k-1}, \eta^{s-1}, \alpha\gamma b^{k-1}\big) &= v_5 w_1.
\end{aligned}$$

Теперь индукцией по n докажем, что $\mathrm{HH}^n(R) \subset \mathcal{H}$. Считаем, что $n \geqslant 6$. Пусть $f \in \mathrm{Hom}_\Lambda(Q_n, R)$ – коцикл, представляющий элемент из $\mathrm{HH}^n(R)$. Поскольку $f = (f_1, f_2)$, где $f_1 \in \mathrm{Hom}_\Lambda(Q_{n-4}, R)$, $f_2 \in \mathrm{Hom}_\Lambda(X_n, R)$, то ввиду замечания 3.6 можно считать, что (O, f_2) – это один из элементов, перечисленных в лемме 3.5 (для подходящих значений параметра ℓ). Пользуясь этой леммой получаем, что (O, f_2)

лежит в $\mathcal{H}$. Наконец, по индукционному предложению $f_1 \in \mathcal{H}$, и тогда $(f_1, \mathrm{O}_8) = z_0 \cdot f_1$ также лежит в $\mathcal{H}$. $\square$

Пусть $\mathcal{A} = K[\mathcal{X}]/I$ – градуированная алгебра, определённая в разделе 1, где I – соответствующий идеал соотношений (см. (1.2)–(1.36)), а $\mathcal{X}$ из (1.1). Ненулевые образы мономов из $K[\mathcal{X}]$ относительно канонического эпиморфизма $K[\mathcal{X}] \to \mathcal{A}$ также будем называть мономами. Ввиду предложений 3.1 и 3.7 существует сюръективный гомоморфизм градуированных K-алгебр $\varphi\colon \mathcal{A} \to \mathrm{HH}^*(R)$, переводящий образующие из множества $\mathcal{X}$ в соответствующие образующие из $\mathcal{Y}$ (см. (3.7)); не боясь двусмысленности, мы обозначили одинаково элементы из обоих множеств, которые соответствуют друг другу. Пусть $\mathcal{A} = \bigoplus_{m \geqslant 0} \mathcal{A}^m$ – разложение алгебры $\mathcal{A}$ на однородные прямые слагаемые. Теперь теорема 1.1 вытекает из следующего утверждения.

Предложение 3.8. *Для любого* $m \geqslant 0$

$$\dim_K \mathcal{A}^m = \dim_K \mathrm{HH}^m(R).$$

Доказательство. На кольце многочленов $K[\mathcal{X}]$ введём лексикографический порядок такой, что

$$\left.\begin{aligned} t > v_2 > v_3 > v_4 > v_5 > v_6 > v_1 > u_3 > u_4 > u_2 > u_1 \\ > w_3 > w_2 > w_1 > z_1 > z_0 > p_2 > p_3 > p_4 > p_1. \end{aligned}\right\} \tag{3.66}$$

Любой ненулевой моном из $\mathcal{A}$ можно представить в виде

$$f = p_1^i p_2^j p_3^{\alpha_3} p_4^{\alpha_4} \cdot \prod_{\ell=1}^{4} u_\ell^{\beta_\ell} \cdot v_1^r \prod_{\ell=2}^{6} v_\ell^{\gamma_\ell} \cdot w_1^m w_2^{\zeta_2} w_3^{\zeta_3} z_0^n z_1^{\xi} t^{\theta}; \tag{3.67}$$

здесь ввиду определяющих соотношений алгебры $\mathcal{A}$ имеем:

$$\alpha_3, \alpha_4, \beta_\ell \,(1 \leqslant \ell \leqslant 4), \gamma_\ell \,(2 \leqslant \ell \leqslant 6), \zeta_2, \zeta_3, \xi, \theta \text{ принадлежат } \{0,1\},$$
$$i, j, r, m, n \in \mathbb{N} \cup \{0\},\ i \leqslant k,\ j \leqslant s-1.$$

Такие представления для мономов из $\mathcal{A}$ мы отождествляем с соответствующими мономами из $K[\mathcal{X}]$.

Назовём редукцией монома f из $\mathcal{A}$ процесс замены некоторых подмономов в f на другие элементы из $\mathcal{A}$ по следующим правилам ($a \mapsto b$

означает замену каждого вхождения монома a на элемент b):

$$
\begin{array}{ll}
p_2^s \mapsto p_1^k, & u_4v_2 \mapsto p_1^2w_3, \\
u_1v_5 \mapsto p_4w_1, & u_1v_4 \mapsto p_3w_2, \\
u_2v_3 \mapsto p_2^2w_3, & v_1v_6 \mapsto u_3w_2, \\
v_2^2 \mapsto p_1^2z_0, & v_3^2 \mapsto p_2^2z_0, \\
u_1w_3 \mapsto p_4z_0, & v_4w_3 \mapsto v_4w_2 \mapsto p_3u_1z_0, \\
v_1w_3 \mapsto u_3z_0, & v_2w_3 \mapsto u_4z_0, \\
v_3w_3 \mapsto u_2z_0, & p_4t \mapsto v_5w_2 \mapsto v_6w_1, \\
v_6w_1 \mapsto u_1z_1, & v_5z_0 \mapsto w_1w_3, \\
v_6z_0 \mapsto w_2w_3, & u_1t \mapsto w_1w_2, \\
v_5t \mapsto w_1z_1, & v_6t \mapsto w_2z_1 \mapsto p_4w_1z_0, \\
w_2t \mapsto u_1w_1z_0, & w_3t \mapsto z_0z_1, \\
z_1t \mapsto v_5w_1z_0, & u_1z_0z_1 \mapsto w_1w_2w_3, \\
t^2 \mapsto w_1^2z_0. &
\end{array}
$$

Элементарным шагом редукции назовём любую замену из этого списка; такие замены соответствуют (немономиальным) определяющим соотношениям в алгебре $\mathcal{A}$. После каждого элементарного шага редукции ненулевой моном переходит в моном, строго меньший относительно лексикографического порядка, и за конечное число шагов мы получаем мономы, к которым уже нельзя применить никакой элементарный шаг редукции. Говорим, что представление элемента $a \in \mathcal{A}$ в виде линейной комбинации мономов имеет нормальную форму, если ни к одному из этих мономов нельзя применить редукцию. Ясно, что любой элемент из $\mathcal{A}$ допускает хотя бы одно представление в нормальной форме.

Пусть $q_i = \dim_K \mathcal{A}^i$. Через $\widetilde{q}_i$ обозначим число мономов из $\mathcal{A}^i$, представленных в нормальной форме; таким образом, $\widetilde{q}_i \geqslant q_i$. Поскольку имеется эпиморфизм $\mathcal{A}^i \to \mathrm{HH}^i(R)$, то $q_i \geqslant \dim_K \mathrm{HH}^i(R)$, и потому достаточно доказать, что

$$\widetilde{q}_i = \dim_K \mathrm{HH}^i(R). \tag{3.68}$$

Для этого мы рассуждаем аналогично доказательству предложения 4.9 в [9]. Пусть моном f из (3.67) имеет нормальную форму. Последовательно предполагая вхождение в f той или иной образующей из набора (3.66) (двигаясь по списку “слева направо”), с учётом списка элементарных шагов редукции и мономиальных определяющих соотношений в алгебре $\mathcal{A}$ находим для f возможные нормальные формы. Далее составляем списки этих нормальных форм, сортируя их по степеням, и наконец, получаем следующие их количества (т.е. значения $\widetilde{q}_i$).

Мономы степени $12a$:

$$\{tw_1^{4i-12a+5}z_0^{12a-3i-5}\}_{i=3a-1}^{4a-2}, \{w_1^{4i-12a}z_0^{12a-3i}\}_{i=3a+1}^{4a},$$
$$\{p_4w_1^{4i-12a}z_0^{12a-3i}\}_{i=3a+1}^{4a}, \{v_1^{2(3a-i)}z_0^{i}\}_{i=0}^{3a-1}, \{w_2w_1^{4i-12a+3}z_0^{12a-3i-3}\}_{3a}^{4a-1},$$
$$\{z_1w_1^{4i-12a+4}z_0^{12a-3i-4}\}_{3a-1}^{4a-2}, \{w_3w_1^{4i-12a+3}z_0^{12a-3i-3}\}_{i=3a}^{4a-1},$$
$$\{u_3w_2v_1^{6a-2i-2}z_0^{i}\}_{i=0}^{3a-1}, \{u_1w_1^{4i-12a+1}z_0^{12a-3i-1}\}_{i=3a}^{4a-1},$$
$$\{w_3w_2w_1^{4i-12a+6}z_0^{12a-3i-6}\}_{i=3a-1}^{4a-2}, \{p_1^rz_0^{3a}\}_{r=0}^{k-1}, \{p_2^rz_0^{3a}\}_{r=1}^{s-1}, p_3z_0^{3a}, p_4z_0^{3a};$$

(их количество равно $14a+k+s+1$).

Мономы степени $12a+1$:

$$\{tw_1^{4i-12a+4}z_0^{12a-3i-4}\}_{i=3a-1}^{4a-2}, \{w_1^{4i-12a-1}z_0^{12a-3i+1}\}_{i=3a+1}^{4a},$$
$$\{p_4w_1^{4i-12a-1}z_0^{12a-3i+1}\}_{i=3a+1}^{4a}, \{z_1w_1^{4i-12a+3}z_0^{12a-3i-3}\}_{i=3a}^{4a-1},$$
$$\{w_2w_1^{4i-12a+2}z_0^{12a-3i-2}\}_{i=3a}^{4a-1}, \{w_2v_1^{6a-2i-1}z_0^{i}\}_{i=0}^{3a-1},$$
$$\{w_3w_1^{4i-12a+2}z_0^{12a-3i-2}\}_{i=3a}^{4a-1}, \{w_3w_2w_1^{4i-12a+5}z_0^{12a-3i-5}\}_{i=3a-1}^{4a-2},$$
$$\{u_1w_1^{4i-12a}z_0^{12a-3i}\}_{i=3a}^{4a}, \{u_3v_1^{6a-2i}z_0^{i}\}_{i=0}^{3a-1},$$
$$u_3z_0^{3a}, p_3u_1z_0^{3a}, \{p_1^ru_4z_0^{3a}\}_{r=0}^{k-2}, \{p_2^ru_2z_0^{3a}\}_{r=0}^{s-2};$$

(их количество равно $14a+k+s+1$).

Мономы степени $12a+2$:

$$\{tw_1^{4i-12a+3}z_0^{12a-3i-3}\}_{i=3a}^{4a-1}, \{w_2w_1^{4i-12a+1}z_0^{12a-3i-1}\}_{3a}^{4a-1}, \{v_1^{6a-2i+1}z_0^{i}\}_{i=0}^{3a},$$
$$\{u_1w_1^{4i-12a-1}z_0^{12a-3i+1}\}_{i=3a+1}^{4a}, \{w_1^{4i-12a-2}z_0^{12a-3i+2}\}_{i=3a+1}^{4a},$$
$$\{p_4w_1^{4i-12a-2}z_0^{12a-3i+2}\}_{i=3a+1}^{4a}, \{z_1w_1^{4i-12a+2}z_0^{12a-3i-2}\}_{i=3a}^{4a-1},$$
$$\{u_3w_2v_1^{6a-2i-1}z_0^{i}\}_{i=0}^{3a-1},$$
$$\{w_3w_1^{4i-12a+1}z_0^{12a-3i-1}\}_{i=3a}^{4a-1}, \{w_3w_2w_1^{4i-12a+4}z_0^{12a-3i-4}\}_{i=3a-1}^{4a-2},$$
$$\{p_1^rv_2z_0^{3a}\}_{r=0}^{k-2}, \{p_2^rv_3z_0^{3a}\}_{r=0}^{s-2}, v_4z_0^{3a}, v_5z_0^{3a}, v_6[\text{при } a=0], u_1z_1w_1^{4a-1};$$

(их количество равно $14a+k+s+2$).

Мономы степени $12a+3$:

$$
\begin{gathered}
\{tw_1^{4i-12a+2}z_0^{12a-3i-2}\}_{i=3a}^{4a-1}, \{w_2w_1^{4i-12a}z_0^{12a-3i}\}_{i=3a}^{4a},\\
\{w_1^{4i-12a-3}z_0^{12a-3i+3}\}_{i=3a+1}^{4a+1}, \{p_4w_1^{4i-12a-3}z_0^{12a-3i+3}\}_{i=3a+1}^{4a+1},\\
\{z_1w_1^{4i-12a+1}z_0^{12a-3i-1}\}_{i=3a}^{4a-1}, \{u_1w_1^{4i-12a-2}z_0^{12a-3i+2}\}_{i=3a+1}^{4a},\\
\{u_3v_1^{6a-2i+1}z_0^i\}_{i=0}^{3a}, \{w_2v_1^{6a-2i}z_0^i\}_{i=0}^{3a-1},\\
\{w_3w_1^{4i-12a}z_0^{12a-3i}\}_{i=3a+1}^{4a}, \{w_3w_2w_1^{4i-12a+3}z_0^{12a-3i-3}\}_{i=3a}^{4a-1},\\
\{p_1^rw_3z_0^{3a}\}_{r=0}^{k-1}, \{p_2^rw_3z_0^{3a}\}_{r=1}^{s-1}, p_3w_2z_0^{3a};
\end{gathered}
$$

(их количество равно $14a+k+s+4$).

Мономы степени $12a+4$:

$$
\begin{gathered}
\{tw_1^{4i-12a+1}z_0^{12a-3i-1}\}_{i=3a}^{4a-1}, \{u_1w_1^{4i-12a-3}z_0^{12a-3i+3}\}_{i=3a+1}^{4a+1},\\
\{w_1^{4i-12a-4}z_0^{12a-3i+4}\}_{i=3a+2}^{4a+1}, \{p_4w_1^{4i-12a-4}z_0^{12a-3i+4}\}_{i=3a+2}^{4a+1},\\
\{w_2w_1^{4i-12a-1}z_0^{12a-3i+1}\}_{i=3a+1}^{4a}, \{w_3w_1^{4i-12a-1}z_0^{12a-3i+1}\}_{i=3a+1}^{4a},\\
\{z_1w_1^{4i-12a}z_0^{12a-3i}\}_{i=3a+1}^{4a}, \{w_3w_2w_1^{4i-12a+2}z_0^{12a-3i-2}\}_{i=3a}^{4a-1},\\
\{v_1^{6a-2i+2}z_0^i\}_{i=0}^{3a}, \{u_3w_2v_1^{6a-2i}z_0^i\}_{i=0}^{3a}, \{p_1^rz_0^{3a+1}\}_{r=0}^{k-1},\\
\{p_2^rz_0^{3a+1}\}_{r=1}^{s-1}, z_1z_0^{3a}, p_3z_0^{3a+1}, p_4z_0^{3a+1};
\end{gathered}
$$

(их количество равно $14a+k+s+5$).

Мономы степени $12a+5$:

$$
\begin{gathered}
\{tw_1^{4i-12a}z_0^{12a-3i}\}_{i=3a}^{4a}, \{w_2v_1^{6a-2i+1}z_0^i\}_{i=0}^{3a},\\
\{w_1^{4i-12a-5}z_0^{12a-3i+5}\}_{i=3a+2}^{4a+1}, \{p_4w_1^{4i-12a-5}z_0^{12a-3i+5}\}_{i=3a+2}^{4a+1},\\
\{w_3w_1^{4i-12a-2}z_0^{12a-3i+2}\}_{i=3a+1}^{4a}, \{w_3w_2w_1^{4i-12a+1}z_0^{12a-3i-1}\}_{i=3a}^{4a-1},\\
\{z_1w_1^{4i-12a-1}z_0^{12a-3i+1}\}_{i=3a+1}^{4a}, \{w_2w_1^{4i-12a-2}z_0^{12a-3i+2}\}_{i=3a+1}^{4a},\\
\{u_1w_1^{4i-12a-4}z_0^{12a-3i+4}\}_{i=3a+1}^{4a+1}, \{u_3v_1^{6a-2i+2}z_0^i\}_{i=0}^{3a}, \{p_1^ru_4z_0^{3a+1}\}_{r=0}^{k-2},\\
\{p_2^ru_2z_0^{3a+1}\}_{r=0}^{s-2}, u_3z_0^{3a+1}, u_1z_1w_1^{4a}, v_5w_1^{4a+1}, p_3u_1z_0^{3a+1};
\end{gathered}
$$

(их количество равно $14a+k+s+6$).

Мономы степени $12a+6$:

$$\{tw_1^{4i-12a-1}z_0^{12a-3i+1}\}_{i=3a+1}^{4a}, \{w_1^{4i-12a-6}z_0^{12a-3i+6}\}_{i=3a+2}^{4a+2},$$
$$\{p_4w_1^{4i-12a-6}z_0^{12a-3i+6}\}_{i=3a+2}^{4a+2}, \{z_1w_1^{4i-12a-2}z_0^{12a-3i+2}\}_{i=3a+1}^{4a},$$
$$\{v_1^{6a-2i+3}z_0^i\}_{i=0}^{3a+1}, \{u_1w_1^{4i-12a-5}z_0^{12a-3i+5}\}_{i=3a+2}^{4a+1},$$
$$\{u_3w_2v_1^{6a-2i+1}z_0^i\}_{i=0}^{3a}, \{w_3w_1^{4i-12a-3}z_0^{12a-3i+3}\}_{i=3a+1}^{4a+1},$$
$$\{w_3w_2w_1^{4i-12a}z_0^{12a-3i}\}_{i=3a}^{4a}, \{w_2w_1^{4i-12a-3}z_0^{12a-3i+3}\}_{i=3a+1}^{4a+1},$$
$$\{p_1^rv_2z_0^{3a+1}\}_{r=0}^{k-2}, \{p_2^rv_3z_0^{3a+1}\}_{r=0}^{s-2}, v_4z_0^{3a+1};$$

(их количество равно $14a+k+s+7$).

Мономы степени $12a+7$:

$$\{tw_1^{4i-12a-2}z_0^{12a-3i+2}\}_{i=3a+1}^{4a}, \{w_1^{4i-12a-7}z_0^{12a-3i+7}\}_{i=3a+2}^{4a+2},$$
$$\{p_4w_1^{4i-12a-7}z_0^{12a-3i+7}\}_{i=3a+2}^{4a+2}, \{w_2w_1^{4i-12a-4}z_0^{12a-3i+4}\}_{i=3a+1}^{4a+1},$$
$$\{w_3w_2w_1^{4i-12a-1}z_0^{12a-3i+1}\}_{i=3a+1}^{4a}, \{z_1w_1^{4i-12a-3}z_0^{12a-3i+3}\}_{i=3a+1}^{4a+1},$$
$$\{u_3v_1^{6a-2i+3}z_0^i\}_{i=0}^{3a+1}, \{w_3w_1^{4i-12a-4}z_0^{12a-3i+4}\}_{i=3a+2}^{4a+1},$$
$$\{w_2v_1^{6a-2i+2}z_0^i\}_{i=0}^{3a}, \{u_1w_1^{4i-12a-6}z_0^{12a-3i+6}\}_{i=3a+2}^{4a+2},$$
$$\{p_1^rw_3z_0^{3a+1}\}_{r=0}^{k-1}, \{p_2^rw_3z_0^{3a+1}\}_{r=1}^{s-1}, p_3w_2z_0^{3a+1};$$

(их количество равно $14a+k+s+8$).

Мономы степени $12a+8$:

$$\{tw_1^{4i-12a-3}z_0^{12a-3i+3}\}_{i=3a+1}^{4a+1}, \{w_3w_2w_1^{4i-12a-2}z_0^{12a-3i+2}\}_{i=3a+1}^{4a},$$
$$\{w_2w_1^{4i-12a-5}z_0^{12a-3i+5}\}_{i=3a+2}^{4a+1}, \{w_3w_1^{4i-12a-5}z_0^{12a-3i+5}\}_{i=3a+2}^{4a+1},$$
$$\{w_1^{4i-12a-8}z_0^{12a-3i+8}\}_{i=3a+2}^{4a+2}, \{p_4w_1^{4i-12a-8}z_0^{12a-3i+8}\}_{i=3a+2}^{4a+2},$$
$$\{v_1^{6a-2i+4}z_0^i\}_{i=0}^{3a+1}, \{u_3w_2v_1^{6a-2i+2}z_0^i\}_{i=0}^{3a+1},$$
$$\{z_1w_1^{4i-12a-4}z_0^{12a-3i+4}\}_{i=3a+1}^{4a+1}, \{u_1w_1^{4i-12a-7}z_0^{12a-3i+7}\}_{i=3a+2}^{4a+2},$$
$$\{p_1^rz_0^{3a+2}\}_{r=1}^{k-1}, \{p_2^rz_0^{3a+2}\}_{r=1}^{s-1}, u_1z_1w_1^{4a+1}, v_5w_1^{4a+2}, p_3z_0^{3a+2};$$

(их количество равно $14a+k+s+10$).

Мономы степени $12a+9$:

$$\{tw_1^{4i-12a-4}z_0^{12a-3i+4}\}_{i=3a+1}^{4a+1}, \{w_3w_2w_1^{4i-12a-3}z_0^{12a-3i+3}\}_{i=3a+1}^{4a+1},$$
$$\{w_2w_1^{4i-12a-6}z_0^{12a-3i+6}\}_{i=3a+2}^{4a+2}, \{w_3w_1^{4i-12a-6}z_0^{12a-3i+6}\}_{i=3a+2}^{4a+2},$$
$$\{w_2v_1^{6a-2i+3}z_0^{i}\}_{i=0}^{3a+1}, \{w_1^{4i-12a-9}z_0^{12a-3i+9}\}_{i=3a+3}^{4a+3},$$
$$\{p_4w_1^{4i-12a-9}z_0^{12a-3i+9}\}_{i=3a+3}^{4a+3}, \{z_1w_1^{4i-12a-5}z_0^{12a-3i+5}\}_{i=3a+2}^{4a+1},$$
$$\{u_1w_1^{4i-12a-8}z_0^{12a-3i+8}\}_{i=3a+2}^{4a+2}, \{u_3v_1^{6a-2i+4}z_0^{i}\}_{i=0}^{3a+1},$$
$$\{p_1^ru_4z_0^{3a+2}\}_{r=0}^{k-2}, \{p_2^ru_2z_0^{3a+2}\}_{r=0}^{s-2}, u_3z_0^{3a+2}, p_3u_1z_0^{3a+2};$$

(их количество равно $14a+k+s+11$).

Мономы степени $12a+10$:

$$\{tw_1^{4i-12a-5}z_0^{12a-3i+5}\}_{i=3a+2}^{4a+1}, \{w_2w_1^{4i-12a-7}z_0^{12a-3i+7}\}_{i=3a+2}^{4a+2},$$
$$\{w_1^{4i-12a-10}z_0^{12a-3i+10}\}_{i=3a+3}^{4a+3}, \{p_4w_1^{4i-12a-10}z_0^{12a-3i+10}\}_{i=3a+3}^{4a+3},$$
$$\{w_3w_1^{4i-12a-7}z_0^{12a-3i+7}\}_{i=3a+2}^{4a+2}, \{w_3w_2w_1^{4i-12a-4}z_0^{12a-3i+4}\}_{i=3a+1}^{4a+1},$$
$$\{z_1w_1^{4i-12a-6}z_0^{12a-3i+6}\}_{i=3a+2}^{4a+2}, \{v_1^{6a-2i+5}z_0^{i}\}_{i=0}^{3a+2},$$
$$\{u_3w_2v_1^{6a-2i+3}z_0^{i}\}_{i=0}^{3a+1}, \{u_1w_1^{4i-12a-9}z_0^{12a-3i+9}\}_{i=3a+3}^{4a+3},$$
$$\{p_1^rv_2z_0^{3a+2}\}_{r=0}^{k-2}, \{p_2^rv_3z_0^{3a+2}\}_{r=0}^{s-2}, v_4z_0^{3a+2};$$

(их количество равно $14a+k+s+11$).

Мономы степени $12a+11$:

$$\{tw_1^{4i-12a-6}z_0^{12a-3i+6}\}_{i=3a+2}^{4a+2}, \{w_3w_2w_1^{4i-12a-5}z_0^{12a-3i+5}\}_{i=3a+2}^{4a+1},$$
$$\{w_2w_1^{4i-12a-8}z_0^{12a-3i+8}\}_{i=3a+3}^{4a+2}, \{w_3w_1^{4i-12a-8}z_0^{12a-3i+8}\}_{i=3a+3}^{4a+2},$$
$$\{w_1^{4i-12a-11}z_0^{12a-3i+11}\}_{i=3a+3}^{4a+3}, \{p_4w_1^{4i-12a-11}z_0^{12a-3i+11}\}_{i=3a+3}^{4a+3},$$
$$\{z_1w_1^{4i-12a-7}z_0^{12a-3i+7}\}_{i=3a+2}^{4a+2}, \{w_2v_1^{6a-2i+4}z_0^{i}\}_{i=0}^{3a+2},$$
$$\{u_3v_1^{6a-2i+5}z_0^{i}\}_{i=0}^{3a+2}, \{u_1w_1^{4i-12a-10}z_0^{12a-3i+10}\}_{i=3a+3}^{4a+3}, v_5w_1^{4a+3},$$
$$u_1z_1w_1^{4a+2}, \{p_1^rw_3z_0^{3a+2}\}_{r=0}^{k-1}, \{p_2^rw_3z_0^{3a+2}\}_{r=1}^{s-1}, p_3w_2z_0^{3a+2},$$

(их количество равно $14a+k+s+13$).

Непосредственно проверяется, что все мономы из этого списка имеют нормальную форму. Используя описание размерностей $\dim_K \mathrm{HH}^n(R)$, приведённое в [2] (см. теорему 2.1 и следствие 2.2 этой работы), отсюда получаем равенство (3.68). □

Список литературы

1. K. Erdmann, *Blocks of tame representation type and related algebras*, Lecture Notes in Math., v. 1428. Berlin; Heidelberg. 1990.
2. А. И. Генералов, Д. Б. Романова, *Когомологии Хохшильда алгебр диэдрального типа.* VI. *Серия* $D(2\mathcal{B})(k,s,1)$. — Алгебра и анализ **27** (2015), No. 6, 89–116.
3. А. И. Генералов, *Когомологии Хохшильда алгебр диэдрального типа,* I: *серия* $D(3\mathcal{K})$ *в характеристике* 2. — Алгебра и анализ **16**, No. 6 (2004), 53–122.
4. А. И. Генералов, *Когомологии Хохшильда алгебр диэдрального типа,* II. *Локальные алгебры.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **375** (2010), 92–129.
5. А. И. Генералов, *Когомологии Хохшильда алгебр диэдрального типа,* III. *Локальные алгебры в характеристике* 2. — Вестник С.-Петербургского ун-та. Сер.1. Мат., мех., астрон. Вып.1 (2010), 28–38.
6. А. И. Генералов, Н. Ю. Косовская, *Когомологии Хохшильда алгебр диэдрального типа,* IV. *Серия* $D(2\mathcal{B})(k,s,0)$. — Зап. научн. семин. ПОМИ **423** (2014), 67–104.
7. А. И. Генералов, И. М. Зильберборд, Д. Б. Романова, *Когомологии Хохшильда алгебр диэдрального типа.* V. *Серия* $D(3\mathcal{K})$ *в характеристике, отличной от* 2. — Зап. научн. семин. ПОМИ **430** (2014), 74–102.
8. А. И. Генералов, М. А. Филиппов, *Когомологии Хохшильда алгебр диэдрального типа,* VII. *Серия* $D(3\mathcal{R})$. — Зап. научн. семин. ПОМИ **460** (2017), 53–81.
9. А. И. Генералов, Н. Ю. Косовская, *Когомологии Хохшильда алгебр диэдрального типа.* VIII. *Алгебра когомологий для серии* $D(2\mathcal{B})(k,s,0)$ *в характеристике* 2. — Зап. научн. семин. ПОМИ **470** (2018), 50–87.
10. А. И. Генералов, М. А. Качалова, П. А. Мостовский, *Когомологии Хохшильда алгебр диэдрального типа.* IX. *Алгебра когомологий для серии* $D(3\mathcal{K})$ *в характеристике, отличной от* 2. — Зап. научн. семин. ПОМИ **513** (2022), 30–56.
11. М. А. Качалова, *Алгебра когомологий Хохшильда исключительных локальных алгебр диэдрального типа.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **513** (2022), 85–109.
12. А. И. Генералов, И. М. Зильберборд, В. А. Рогов, *Когомологии Хохшильда алгебр диэдрального типа.* X. *Исключительные локальные алгебры.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **522** (2023), 60–83.

Generalov A. I. Hochschild cohomology of algebras of dihedral type. XI. Cohomology algebra for a family of exceptional algebras.

The Hochschild cohomology algebra is described in terms of generators and relations for a subfamily of the family $D(2\mathcal{B})$ of algebras of dihedral type for which the natural parameters included in the defining relations take odd values.

С.-Петербургский
государственный университет,
С.-Петербург, Россия
E-mail: ageneralov@gmail.com

Поступило 27 июня 2024 г.