Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 531, 2024 г.

Е. Ю. Воронецкий

ДЕЙСТВИЯ ПРО-ГРУПП И ПРО-КОЛЕЦ

§1. Введение

Про-пополнения категорий алгебраических объектов широко используются в алгебраической геометрии [1], алгебраической топологии [8], а также применяются в алгебраической K-теории [9]. Из основного результата [6] следует, что категории про-групп $\mathrm{Pro}(\mathbf{Grp})$, ассоциативных про-колец без единицы $\mathrm{Pro}(\mathbf{Rng})$ и про-K-алгебр Ли $\mathrm{Pro}(\mathbf{Lie}_K)$ над коммутативным кольцом K являются полуабелевыми, то есть в них имеется естественное понятие *внутренних действий*. Например, можно рассматривать алгебры над данным про-кольцом R, то есть про-кольца с действием R.

В теоремах 1–6 мы опишем действия про-объекта G на про-объекте X в случаях про-групп и про-колец (с возможными дополнительными условиями коммутативности или наличия единицы). Оказывается, что действия G на X в смысле полуабелевых категорий (то есть классы изоморфизма расщеплённых расширений G при помощи X) – это то же самое, что и обычные действия G на X как алгебраических объектов в $\mathrm{Pro}(\mathbf{Set})$, то есть их можно задать конечным набором морфизмов про-множеств, удовлетворяющих некоторым аксиомам. Для про-алгебр Ли мы явно построим контрпример.

Например, из нашего основного результата (теоремы 1) следует, что любая про-группа с автоморфизмом конечного порядка n изоморфна проективной системе групп с автоморфизмами того же порядка n.

Мы будем ссылаться на [3] и [8, глава I, §1] за основными фактами про полуабелевы категории и про-пополнения.

§2. Про-множества

Будем писать $X \in \mathcal{C}$, если X – это объект некоторой категории $\mathcal{C}$. Для любой алгебраической теории T и декартовой категории $\mathcal{C}$ будем обозначать через $T(\mathcal{C})$ категорию T-объектов в $\mathcal{C}$ и гомоморфизмов

Ключевые слова: про-группы, про-кольца, полуабелевы категории.

Работа выполнена при поддержке Российского научного фонда, грант 19-71-30002.

между ними. Категория T-алгебр $T(\mathbf{Set})$ будет обозначаться через $\mathbf{T}$. Нам понадобятся алгебраические теории

- Grp групп;
- Ab абелевых групп;
- Rng ассоциативных колец без единицы (мы будем называть их *кольцами*);
- Ring колец с единицей;
- CRng коммутативных колец;
- CRing коммутативных колец с единицей;
- Mod_K модулей над коммутативным кольцом K с единицей;
- Lie_K алгебр Ли над коммутативным кольцом K с единицей.

Также мы обозначим через $\mathrm{Alg}(\mathcal{C})$ категорию *алгебр с единицей* в $\mathcal{C}$. Объекты $\mathrm{Alg}(\mathcal{C})$ – это морфизмы $f\colon K \to R$ в $\mathrm{Ring}(\mathcal{C})$ такие, что f является мономорфизмом в $\mathcal{C}$ и он *централен*, то есть кольцо $\mathcal{C}(U, K)$ центрально в $\mathcal{C}(U, R)$ для всех $U \in \mathcal{C}$. Морфизмы из $f\colon K \to R$ в $f'\colon K' \to R'$ – это морфизмы $h \in \mathrm{Ring}(\mathcal{C})(R, R')$ такие, что $h \circ f$ пропускается через f'. Как и для алгебраических теорий, $\mathbf{Alg} = \mathrm{Alg}(\mathbf{Set})$.

Напомним, что категория $\mathcal{I}$ называется *фильтрованной*, если она непуста, для всех $i, j \in \mathcal{I}$ существует $k \in \mathcal{I}$ с морфизмами $\varphi\colon i \to k$ и $\psi\colon j \to k$, а также для всех параллельных морфизмов $\varphi, \psi\colon i \to j$ в $\mathcal{I}$ существует $\theta\colon j \to k$ такой, что $\theta \circ \varphi = \theta \circ \psi$. Функтор $u\colon \mathcal{I} \to \mathcal{J}$ между фильтрованными категориями *кофинален*, если для всех $j \in \mathcal{J}$ существуют $i \in \mathcal{I}$ и морфизм $j \to u(i)$. Фильтрованная категория $\mathcal{I}$ называется *направленным множеством*, если она малая, скелетальная и для всех $i, j \in \mathcal{I}$ существует не больше одного морфизма $i \to j$, так что $\mathcal{I}$ можно рассматривать как упорядоченное множество. Направленное множество I *коконечно*, если для каждого $i \in I$ есть только конечное семейство элементов, меньших i. Для любой малой фильтрованной категории $\mathcal{I}$ существуют коконечное направленное множество J и кофинальный функтор $J \to \mathcal{I}$ [8, глава I, §1.4, теорема 4].

Проективная система X в категории $\mathcal{C}$ – это контравариантный функтор $\mathcal{I}_X \to \mathcal{C}$, где $\mathcal{I}_X$ является малой фильтрованной категорией. *Морфизм* проективных систем $f\colon X \to Y$ состоит из отображения f^* из множества объектов $\mathcal{I}_Y$ в множество объектов $\mathcal{I}_X$ и морфизмов $f_i\colon X_{f^*(i)} \to Y_i$ для всех $i \in \mathcal{I}_Y$ таких, что для всех $\varphi \in \mathcal{I}_Y(i, j)$ существует достаточно большой $k \in \mathcal{I}_X$ с морфизмами $\psi \in \mathcal{I}_X(k, f^*(i))$ и $\theta \in \mathcal{I}_X(k, f^*(j))$, удовлетворяющими $f_i \circ X_\psi = Y_\varphi \circ f_j \circ X_\theta\colon X_k \to Y_i$. Ясно, что проективные системы и их морфизмы образуют категорию.

Про-пополнение $\mathrm{Pro}(\mathcal{C})$ является её факторкатегорией по следующему отношению эквивалентности: морфизмы $f, g\colon X \to Y$ проективных систем *эквивалентны*, если для всех $i \in \mathcal{I}_Y$ существуют достаточно большой $j \in \mathcal{I}_X$ и морфизмы $\varphi \in \mathcal{I}_X(j, f^*(i))$, $\psi \in \mathcal{I}_X(j, g^*(i))$ такие, что $f_i \circ X_\varphi = g_i \circ X_\psi \colon X_j \to Y_i$. Согласно [8, глава I, §1.1, замечание 4],

$$\mathrm{Pro}(C)(X, Y) \cong \varprojlim_{j \in \mathcal{I}_Y} \varinjlim_{i \in \mathcal{I}_X} \mathcal{C}(X_i, Y_j).$$

Если X является проективной системой в $\mathcal{C}$, а $u\colon \mathcal{J} \to \mathcal{I}_X$ – кофинальный функтор, то соответствующий морфизм проективных систем $f\colon X \to u^*X = (X \circ u)$, где $f^*(j) = u(j)$ и $f_j = \mathrm{id}_{X_{u(j)}}$, является изоморфизмом в $\mathrm{Pro}(\mathcal{C})$. В частности, любой объект $\mathrm{Pro}(\mathcal{C})$ изоморфен проективной системе, проиндексированной коконечным направленным множеством. Если $X \in \mathrm{Pro}(\mathbf{Set})$, $\mathcal{I}_X$ является направленным множеством, $i \leqslant j$ – это индексы из $\mathcal{I}_X$ и $x \in X_j$, то мы будем обозначать образ x в X_i как $x|_i$.

Морфизм $f\colon X \to Y$ проективных систем называется *уровневым*, если $\mathcal{I}_X = \mathcal{I}_Y$, $f^*(i) = i$ для всех i и $Y_\varphi \circ f_i = f_j \circ X_\varphi \colon X_i \to Y_j$ для всех $\varphi \in \mathcal{I}_X(i, j)$. Любой морфизм в $\mathrm{Pro}(\mathcal{C})$ изоморфен уровневому морфизму [8, глава I, §1.3, теорема 3], то есть для всех $f\colon X \to Y$ существуют уровневый морфизм $f'\colon X' \to Y'$ и изоморфизмы $X \to X'$, $Y \to Y'$ в $\mathrm{Pro}(\mathcal{C})$, образующие коммутативный квадрат в $\mathrm{Pro}(\mathcal{C})$. Кроме того, можно считать, что $X \to X'$ и $Y \to Y'$ индуцируются кофинальными функторами из коконечного направленного множества. Согласно [8, глава II, §2.2, теорема 5], уровневый морфизм $f\colon X \to Y$ проективных систем является изоморфизмом в $\mathrm{Pro}(\mathcal{C})$ тогда и только тогда, когда для всех $i \in \mathcal{I}_X$ существуют $j \in \mathcal{I}_X$, $\varphi\colon i \to j$ и $u\colon Y_j \to X_i$ такие, что $f_i \circ u = Y_\varphi$ и $u \circ f_j = X_\varphi$.

Любой объект $X \in \mathcal{C}$ можно рассматривать как проективную систему над категорией с единственными объектом $*$ и морфизмом. Получающийся функтор $\mathcal{C} \to \mathrm{Pro}(\mathcal{C})$ является вполне строгим и любая проективная система X является проективным пределом самой себя в $\mathrm{Pro}(\mathcal{C})$. Иногда мы будем писать $\varprojlim^{\mathrm{Pro}(\mathcal{C})}_{i \in \mathcal{I}_X} X_i$ вместо X и называть X *формальным проективным пределом* X_i.

Из [7, следствие 6.1.17 и предложение 6.1.18] вытекает, что если $\mathcal{C}$ конечно полна или конечно кополна, то $\mathrm{Pro}(\mathcal{C})$ конечно полна или конечно кополна соответственно, пределы и копределы конечных уровневых диаграмм можно вычислять в категории проективных систем. Если $f\colon X \to Y$ – это уровневый морфизм проективных систем, где все f_i являются мономорфизмами или эпиморфизмами в $\mathcal{C}$, то f является мономорфизмом или эпиморфизмом в $\mathrm{Pro}(\mathcal{C})$ [5, предложения 2.3 и 2.4].

Теперь напомним определение регулярных категорий из [2]. *Категорное отношение эквивалентности* на объекте X в конечно полной категории $\mathcal{C}$ – это объект R вместе с мономорфизмом $R \to X \times X$ таким, что $\mathcal{C}(U, R)$ является отношением эквивалентности на $\mathcal{C}(U, X)$ для всех $U \in \mathcal{C}$. Если $f \in \mathcal{C}(X, Y)$, то его *ядерная пара* $R = \lim(X \xrightarrow{f} Y \xleftarrow{f} X)$ является категорным отношением эквивалентности на X. Морфизм f называется *регулярным эпиморфизмом*, если это коуравнитель некоторой ядерной пары, рассматриваемой как пара параллельных морфизмов в область определения f. Конечно полная категория $\mathcal{C}$ называется *регулярной*, если все ядерные пары имеют коуравнители и регулярные эпиморфизмы сохраняются при заменах базы. В регулярных категориях каждый морфизм $f\colon X \to Y$ имеет *образ* $X \to \mathrm{Im}(f) \to Y$, где $X \to \mathrm{Im}(f)$ является регулярным эпиморфизмом, а $\mathrm{Im}(f) \to Y$ – мономорфизмом, такое разложение единственно с точностью до единственного изоморфизма и функториально по f. Регулярная категория $\mathcal{C}$ называется *точной по Барру*, если в ней все категорные отношения эквивалентности являются ядерными парами.

Согласно [6, пример 1.11], про-пополнение регулярной категории также регулярно. Легко видеть, что если $\mathcal{C}$ регулярна и $f\colon X \to Y$ – это уровневый морфизм между проективными системами в $\mathcal{C}$, то $\varprojlim_{i \in \mathcal{I}_X} \mathrm{Im}(f_i)$ является образом f в $\mathrm{Pro}(\mathcal{C})$. В частности, если все f_i являются регулярными эпиморфизмами, то f будет регулярным эпиморфизмом в $\mathrm{Pro}(\mathcal{C})$.

Напомним, что мономорфизмы в **Set** и всех категориях алгебраических объектов **T** из списка выше (кроме **Alg**) – это инъективные отображения, а регулярные эпиморфизмы – сюръективные. Категории $\mathrm{Pro}(\mathbf{Set})$ и $\mathrm{Pro}(\mathbf{T})$ являются регулярными и конечно кополными. В отличие от **Set**, категория $\mathrm{Pro}(\mathbf{Set})$ не является точной по Барру:

Пример 1. *Пусть* $R_n = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x - 1/n < y < x + 1/n\}$ *при* $n > 0$ *и* $R = \varprojlim_n^{\mathrm{Pro}(\mathbf{Set})} R_n$. *Так как все* R_n *являются рефлексивными симметричными отношениями на* $\mathbb{R}$ *и* $R_{2n} \circ R_{2n} \subseteq R_n$, *то* R *– это категорное отношение эквивалентности на* $\mathbb{R}$ *в* $\mathrm{Pro}(\mathbf{Set})$. *Рассмотрим морфизм* $f\colon \mathbb{R} \to X$ *проективных систем множеств, у которого ядерная пара в* $\mathrm{Pro}(\mathbf{Set})$ *содержит* R. *Другими словами, для* *всех* $i \in \mathcal{I}_X$ *существует* $n > 0$ *такой, что* $f_i(x) = f_i(y)$ *для всех* $(x, y) \in R_n$. *Тогда легко видеть, что все* f_i *имеют одноэлементные образы, то есть ядерная пара* f *– это всё* $\mathbb{R}^2$. *Но* $R \to \mathbb{R}^2$ *не является изоморфизмом, так что* R *– это категорное отношение эквивалентности в* $\mathrm{Pro}(\mathbf{Set})$, *не являющееся ядерной парой.*

Нам также потребуются понятия гомологических и полуабелевых категорий из [3, sections 4 and 5]. Категория $\mathcal{C}$ имеет *нулевой объект* 0, если он является начальным и конечным одновременно. *Расщеплённое расширение* объекта Z при помощи X в конечно полной категории $\mathcal{C}$ с нулевым объектом – это диаграмма вида

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, tail, "i"] & Y \arrow[r, two heads, shift right, "p"'] & Z, \arrow[l, tail, shift right, "s"'] \end{tikzcd}$$

где $p \circ s = \mathrm{id}_Z$ и i является *ядром* p, то есть уравнителем p и $0 \colon X \to Y$. В такой диаграмме Y называется *полупрямым произведением* X и Z, он также обозначается через $X \rtimes Z$. Если дано другое расщеплённое расширение

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, tail, "i'"] & Y' \arrow[r, two heads, shift right, "p'"'] & Z \arrow[l, tail, shift right, "s'"'] \end{tikzcd}$$

и $f \in \mathcal{C}(Y, Y')$ удовлетворяет равенствам $f \circ i = i'$, $f \circ s = s'$, $p' \circ f = p$, то f называется *морфизмом* расщеплённых расширений. Регулярная категория $\mathcal{C}$ с нулевым объектом называется *гомологической*, если все морфизмы между расщеплёнными расширениями являются изоморфизмами. Наконец, *полуабелевы* категории – это гомологические категории, точные по Барру и конечно кополные.

Если даны объекты X и G гомологической категории $\mathcal{C}$, то *действия* G на X – это классы изоморфизма расщеплённых расширений $X \to Y \leftrightarrows G$. Любой объект G действует на себе естественным образом при помощи диаграммы

$$\begin{tikzcd} G \arrow[r, tail, "i_1"] & G \times G \arrow[r, two heads, shift right, "p_2"'] & G, \arrow[l, tail, shift right, "\Delta"'] \end{tikzcd}$$

где $i_1 \colon G \cong G \times 0 \to G \times G$ является левым вложением, $p_2 \colon G \times G \to 0 \times G \cong G$ – это правая проекция, а $\Delta \colon G \to G \times G$ – диагональное вложение. Если G и X являются объектами полуабелевой категории, то G естественным образом действует на $G \flat X = \mathrm{Ker}(G \amalg X \to G \amalg 0 \cong G)$ и действия G на X находятся во взаимно-однозначном соответствии с морфизмами $G \flat X \to X$, удовлетворяющими некоторым дополнительным условиям [4]. В частности, все действия G на X образуют множество, а не собственный класс.

Категории **Grp**, **Ab**, **Rng**, **CRng**, $\mathbf{Lie}_K$, and $\mathbf{Mod}_K$ являются полуабелевыми. Согласно [6, список после примера 1.12], про-пополнения этих категорий (как и любых полуабелевых категорий) также полуабелевы.

§3. Про-группы и про-кольца

Возьмём алгебраическую теорию T из нашего списка (отличную от Alg, которая алгебраической теорией не является). Категорию $\mathbf{T}$ можно обобщить на случай про-множеств двумя способами, образовав про-пополнение $\mathrm{Pro}(\mathbf{T})$ или взяв категорию $T(\mathrm{Pro}(\mathbf{Set}))$. Обе эти категории регулярны, причём в $T(\mathrm{Pro}(\mathbf{Set}))$ мономорфизмы, регулярные эпиморфизмы и образы те же самые, что и в $\mathrm{Pro}(\mathbf{Set})$. Имеются естественные функторы $\mathbf{T} \to \mathrm{Pro}(\mathbf{T}) \to T(\mathrm{Pro}(\mathbf{Set}))$, левый из которых вполне строгий.

Лемма 1. *В диаграмме*

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Pro}(\mathbf{Grp}) \arrow[r, two heads] & \mathrm{Grp}(\mathrm{Pro}(\mathbf{Set})) \\ \mathrm{Pro}(\mathbf{Ab}) \arrow[r, two heads] \arrow[u, tail] & \mathrm{Ab}(\mathrm{Pro}(\mathbf{Set})) \arrow[u, tail] \end{tikzcd}$$

все функторы вполне строгие. Про-группа G изоморфна абелевой про-группе тогда и только тогда, когда это абелев групповой объект в $\mathrm{Pro}(\mathbf{Set})$.

Доказательство. Ясно, что горизонтальные функторы строгие, а вертикальные вполне строгие, так что для доказательства первого утверждения достаточно проверить, что верхний функтор полон. Возьмём про-группы G и H, а также морфизм проективных систем множеств $f\colon G \to H$, являющийся гомоморфизмом групповых объектов в $\mathrm{Pro}(\mathbf{Set})$. Это значит, что для всех $i \in \mathcal{I}_H$ существуют $j \in \mathcal{I}_G$ и $\varphi\colon f^*(i) \to j$ такие, что $f_i \circ G_\varphi\colon G_j \to H_i$ является гомоморфизмом групп. Другими словами, f эквивалентно морфизму проективных систем групп.

Теперь возьмём про-группу G, являющуюся абелевым групповым объектом в $\mathrm{Pro}(\mathbf{Set})$. Рассмотрим её уровневую абелианизацию $G'_i = G_i/[G_i, G_i]$ и соответствующий уровневый морфизм $f\colon G \to G'$. По предположению, для всех $i \in \mathcal{I}_G$ существуют $j \in \mathcal{I}_G$ и $\varphi\colon i \to j$ такие, что $G_\varphi(xy) = G_\varphi(yx)$, то есть $G_\varphi = u_i \circ f_j$ для некоторого $u_i\colon G'_j \to G_i$. Легко видеть, что f является изоморфизмом про-групп, обратный к нему задаётся гомоморфизмами u_i. □

С другой стороны, функтор $\mathrm{Pro}(\mathbf{Grp}) \to \mathrm{Grp}(\mathrm{Pro}(\mathbf{Set}))$ не является эквивалентностью категорий. Действительно, про-множество R из примера 1 является групповым подобъектом $\mathbb{R}^2 \in \mathrm{Grp}(\mathrm{Pro}(\mathbf{Set}))$, но так как $\mathrm{Pro}(\mathbf{Grp})$ точна по Барру, то R не может быть про-группой.

Лемма 2. *Пусть $K \in \mathrm{CRing}$ является локализацией конечно порождённого кольца (например, если это $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, или конечное поле). Тогда в диаграмме*

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Pro}(\mathbf{Lie}_K) \arrow[r] & \mathrm{Lie}_K(\mathrm{Pro}(\mathbf{Set})) \\
\mathrm{Pro}(\mathbf{Mod}_K) \arrow[r] \arrow[u] & \mathrm{Mod}_K(\mathrm{Pro}(\mathbf{Set})) \arrow[u]
\end{tikzcd}$$

все функторы вполне строгие, где вертикальные функторы добавляют нулевую скобку Ли. Про-K-алгебра Ли G изоморфна про-K-модулю тогда и только тогда, когда это абелева K-алгебра Ли в $\mathrm{Pro}(\mathbf{Set})$.

Доказательство. Первое утверждение доказывается так же, как и в лемме 1. Действительно, морфизм про-множеств между про-K-алгебрами Ли или про-K-модулями является гомоморфизмом, если он сохраняет конечный набор операций (групповые операции, скобку Ли и умножения на конечный набор образующих $\widetilde{K}$, если K является локализацией конечно порождённого $\widetilde{K}$).

Теперь рассмотрим про-K-алгебру Ли L, которая является абелевой K-алгеброй Ли в $\mathrm{Pro}(\mathbf{Set})$. Построим её уровневую абелианизацию $L'_i = L_i/[L_i, L_i]$ и соответствующий уровневый морфизм $f\colon L \to L'$. По предположению, для всех $i \in \mathcal{I}_L$ существуют $j \in \mathcal{I}_L$ и $\varphi\colon i \to j$ такие, что $L_\varphi([x, y]) = 0$, то есть $L_\varphi = u_i \circ f_j$ для некоторого $u_i\colon L'_j \to L_i$. Таким образом, f является изоморфизмом, а обратный к нему задаётся гомоморфизмами u_i. □

Предыдущая лемма не выполняется для произвольного K:

Пример 2. *Пусть $K = \mathbb{Z}[x_1, x_2, \ldots]$ – кольцо многочленов от бесконечного числа переменных. Рассмотрим K-модуль $N = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \oplus \ldots$, на котором x_i действуют проекциями на i-е компоненты, и K-модули*

M_k с тривиальными действиями всех x_i при $k \geqslant 0$, как абелевы группы получающиеся из N обнулением первых k компонент. Тогда $M = \varprojlim_k^{\mathrm{Pro}(\mathbf{Ab})} M_k$ является про-K-модулем, если в качестве гомоморфизмов $M_{k+1} \to M_k$ взять вложения. Тождественное отображение $M_0 \to N$ задаёт морфизм абелевых про-групп $f\colon M \to N$. Он не эквивалентен морфизму про-K-модулей, так как никакое отображение $M_k \to N$ не является гомоморфизмом K-модулей. С другой стороны, f является гомоморфизмом K-модулей в $\mathrm{Pro}(\mathbf{Set})$, *так как для каждого n отображения $M_k \to N$ сохраняют действие x_n при $k > n$.*

Лемма 3. *В диаграммах*

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Pro}(\mathbf{Rng}) & \longrightarrow & \mathrm{Rng}(\mathrm{Pro}(\mathbf{Set})) \\ \uparrow & & \uparrow \\ \mathrm{Pro}(\mathbf{CRng}) & \longrightarrow & \mathrm{CRng}(\mathrm{Pro}(\mathbf{Set})) \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} \mathrm{Pro}(\mathbf{Ring}) & \longrightarrow & \mathrm{Ring}(\mathrm{Pro}(\mathbf{Set})) \\ \uparrow & & \uparrow \\ \mathrm{Pro}(\mathbf{CRing}) & \longrightarrow & \mathrm{CRing}(\mathrm{Pro}(\mathbf{Set})) \end{array}$$

все функторы вполне строгие. Про-кольцо R изоморфно коммутативному про-кольцу, про-кольцу с единицей или коммутативному про-кольцу с единицей тогда и только тогда, когда оно является коммутативным кольцевым объектом, кольцевым объектом с единицей или коммутативным кольцевым объектом с единицей в $\mathrm{Pro}(\mathbf{Set})$ *соответственно.*

Доказательство. Первое утверждение доказывается как в лемме 1. Возьмём про-кольцо R. Если оно является коммутативным кольцевым объектом в $\mathrm{Pro}(\mathbf{Set})$, то оно изоморфно коммутативному про-кольцу $R' = \varprojlim_{i \in \mathcal{I}_R}^{\mathrm{Pro}(\mathbf{CRng})} R_i/[R_i, R_i]$, где $[R_i, R_i]$ – это идеалы R_i, порождённые аддитивными коммутаторами. Если R является кольцевым объетом с единицей в $\mathrm{Pro}(\mathbf{Set})$, то оно изоморфно про-кольцу с единицей $R'' = \varprojlim_{i \in \mathcal{I}_R}^{\mathrm{Pro}(\mathbf{Ring})} R_i/J_i$, где J_i – это идеалы R_i, порождённые $ex - x$ и $xe - x$ при $x \in R_i$, а $e \in R_i$ – это элементы, полученные из единицы $\{*\} \to R$ в $\mathrm{Pro}(\mathbf{Set})$. Наконец, если R является коммутативным про-кольцом и коммутативным кольцевым объектом с единицей в $\mathrm{Pro}(\mathbf{Set})$, то последняя конструкция даёт коммутативное про-кольцо с единицей R''. □

Лемма 4. *Функтор* $\mathrm{Pro}(\mathbf{Alg}) \to \mathrm{Alg}(\mathrm{Pro}(\mathbf{Set}))$ *вполне строгий. Объект $f\colon K \to R$ из* $\mathrm{Alg}(\mathrm{Pro}(\mathbf{Set}))$ *изоморфен про-алгебре с единицей тогда и только тогда, когда K и R изоморфны про-кольцам.*

Доказательство. Ясно, что данный функтор строгий. По лемме 3, морфизм в Alg(Pro(**Set**)) между про-алгебрами с единицей можно представить диаграммой

$$\begin{tikzcd} K \arrow[r, "f"] \arrow[d] & R \arrow[d] \\ K' \arrow[r, "f'"] & R' \end{tikzcd}$$

проективных систем колец с единицей, где строки являются уровневыми морфизмами, центральными на каждом уровне, а вся диаграмма коммутативна в Pro(**Ring**). Меняя вертикальные морфизмы на эквивалентные, можно считать, что диаграмма коммутативна в категории проективных систем, то есть задаёт морфизм в Pro(**Alg**). Это доказывает первое утверждение.

Теперь возьмём объект $K \to R$ из Alg(Pro(**Set**)), заданный морфизмом $f\colon K \to R$ проективных систем множеств. Предположим, что K и R являются про-кольцами. Тогда по лемме 3 можно считать, что f – это уровневый морфизм проективных систем про-колец с единицей. Положим $R'_i = R_i/J_i$, где J_i – идеалы, порождённые аддитивными коммутаторами $[x, f_i(y)]$ при $x \in R_i$ и $y \in K_i$, и $K'_i = \mathrm{Im}(K_i \to R'_i)$. Ясно, что соответствующий морфизм $K' \to R'$ проективных систем является объектом Pro(**Alg**), изоморфным f. □

Пусть T – какая-то алгебраическая теория из лемм 1–3. Морфизм $f\colon X \to Y$ из Pro(**T**) является изоморфизмом тогда и только тогда, когда это изоморфизм про-множеств Pro(**Set**). Так как функтор Pro(**T**) $\to$ Pro(**Set**) сохраняет образы морфизмов, то $f\colon X \to Y$ является мономорфизмом или регулярным эпиморфизмом в Pro(**T**) тогда и только тогда, когда это мономорфизм или регулярный эпиморфизм в Pro(**Set**) соответственно. Также функторы **T** $\to$ **Set** и Pro(**T**) $\to$ Pro(**Set**) сохраняют конечные пределы.

§4. Действия про-групп

Напомним классические определения действий:

- Группа G действует на группе X, если дано отображение $a\colon G\times X \to X$ такое, что $a(gh, x) = a(g, a(h, x))$, $a(1, x) = x$ и $a(g, xy) = a(g, x)\, a(g, y)$.

- K-алгебра Ли L действует на K-алгебре Ли M, если дано K-билинейное отображение $a\colon L\times M\to M$ такое, что $a(x,[u,v])=[a(x,u),v]+[u,a(x,v)]$ и $a([x,y],u)=a(x,a(y,u))-a(y,a(x,u))$.
- Все абелевы группы и K-модули действуют друг на друге только тривиальным образом, так как категории $\mathbf{Ab}$ и $\mathbf{Mod}_K$ абелевы.
- Кольцо R действует на кольце S, если S является R-R-бимодулем (в смысле колец без единицы), а также $p(ab)=(pa)b$, $(ap)b=a(pb)$, $a(bp)=(ab)p$ при $a,b\in S$ и $p\in R$. Другими словами, действие задаётся операциями умножения $l\colon R\times S\to S$ и $r\colon S\times R\to S$, удовлетворяющими некоторым аксиомам.
- Коммутативное кольцо K действует на коммутативном кольце S, если S является K-модулем (в смысле колец без единицы), а также $k(ab)=(ka)b$ при $a,b\in S$ и $k\in K$.
- Кольцо с единицей R действует на кольце S, если дано действие колец и $1a=a=a1$ при $a\in S$.
- Коммутативное кольцо с единицей K действует на коммутативном кольце S, если дано действие коммутативных колец и $1a=a$ при $a\in S$.
- Алгебра с единицей $K\subseteq R$ действует на кольце S, если R действует на S как кольцо с единицей и $ka=ak$ при $a\in S$ и $k\in K$.

В первых четырёх случаях полупрямые произведения в смысле полуабелевых категорий совпадают с классическими полупрямыми произведениями. Копроизведения и объекты $G\flat X$ можно построить следующим образом:

- В случае групп
$$\begin{aligned}G\amalg H&=\{1\}\sqcup G^{\#}\sqcup H^{\#}\sqcup(G^{\#}\times H^{\#})\sqcup(H^{\#}\times G^{\#})\\&\quad\sqcup(G^{\#}\times H^{\#}\times G^{\#})\sqcup(H^{\#}\times G^{\#}\times H^{\#})\sqcup\ldots\end{aligned}$$
как множество, где $G^{\#}=G\setminus\{1\}$ и $H^{\#}=H\setminus\{1\}$, а $G\flat H$ – это абстрактная группа с образующими ${}^{g}h$ при $g\in G$, $h\in H$ и соотношениями ${}^{g}(hh')={}^{g}h\,{}^{g}h'$.
- В случае абелевых групп или K-модулей $A\amalg B=A\times B$ и $A\flat B=B$.
- В случае колец

$$R\amalg S=R\oplus S\oplus(R\otimes S)\oplus(S\otimes R)\oplus(R\otimes S\otimes R)\oplus(S\otimes R\otimes S)\oplus\ldots,$$

где $\otimes$ обозначает тензорное произведение над $\mathbb{Z}$, и

$$R \flat S = S \oplus (R \otimes S) \oplus (S \otimes R) \oplus (R \otimes S \otimes R) \oplus (S \otimes R \otimes S) \oplus \ldots.$$

- В случае коммутативных колец $R \amalg S = R \oplus S \oplus (R \otimes S)$ и $R \flat S = S \oplus (R \otimes S)$.

Пусть T – алгебраическая теория групп, K-алгебр Ли, колец, или коммутативных колец. Используя вложение Йонеды $\mathrm{Pro}(\mathbf{Set})$ в категорию предпучков на $\mathrm{Pro}(\mathbf{Set})$, легко видеть, что действия в $T(\mathrm{Pro}(\mathbf{Set}))$ можно описать теми же операциями и аксиомами, что и в $\mathbf{T}$. Кроме того, естественные морфизмы про-множеств $G \times X \to G \rtimes X$ являются изоморфизмами для всех действий G на X. Отсюда следует, что $T(\mathrm{Pro}(\mathbf{Set}))$ является гомологической и все действия G на X в ней образуют множество, а не собственный класс.

Теорема 1. *Пусть G и X являются про-группами, а $a\colon G \times X \to X$ – действие G на X в $\mathrm{Grp}(\mathrm{Pro}(\mathbf{Set}))$. Тогда диаграмма $X \to X \rtimes G \leftrightarrows G$ изоморфна формальному проективному пределу $X' \to X' \rtimes G' \leftrightarrows G'$ расщеплённых расширений групп таким образом, что $G \to G'$ получается из кофинального функтора между категориями индексов. Функтор $\mathrm{Pro}(\mathbf{Grp}) \to \mathrm{Grp}(\mathrm{Pro}(\mathbf{Set}))$ задаёт биекцию между множествами действий G на X в этих категориях.*

Доказательство. Для простоты обозначим через $\gamma(i) \in \mathcal{I}_G$ и $\chi(i) \in \mathcal{I}_X$ компоненты $a^*(i)$ для действия a и индекса $i \in \mathcal{I}_X$. Не умаляя общности, можно считать, что категории индексов G и X являются коконечными направленными множествами. Заменяя $\mathcal{I}_X$ на $\mathcal{I}_G \times \mathcal{I}_X$ и увеличивая γ и χ, мы также можем считать, что

- γ монотонно и кофинально;
- χ монотонно и $\chi(i) \geqslant i$ для всех i;
- $a_j(g, x)|_i = a_i(g|_{\gamma(i)}, x|_{\chi(i)})$ при $i \leqslant j$;
- $a_i(g, xy) = a_i(g, x)\, a_i(g, y)$;
- $a_i(1, x) = x|_i$;
- $a_i(g, a_{\chi(i)}(h, x)) = a_i(gh|_{\gamma(i)}, x|_{\chi(i)})$.

Пусть $\widetilde{X}_i = G_{\gamma(i)} \flat X_{\chi(i)}$ при $i \in \mathcal{I}_X$, они образуют проективную систему $\widetilde{X}$. Свойства из списка выше гарантируют, что есть уровневый морфизм $f\colon \widetilde{X} \to X$ про-групп такой, что $f_i({}^g x) = a_i(g, x)$ при $g \in G_{\gamma(i)}$ и $x \in X_{\chi(i)}$. Также пусть X'_i – это фактор-группы $\widetilde{X}_i$ по нормальным $G_{\gamma(i)}$-инвариантным подгруппам, порождённым элементами ${}^{g|_{\gamma(i)}}(x|_{\chi(i)})\, a_{\chi(i)}(h, x)^{-1}$, такие подгруппы лежат в ядрах f_i.

Ясно, что f задаёт уровневый морфизм про-групп $X' \to X$, он является изоморфизмом, и обратный к нему задаётся естественными отображениями $X_{\chi(i)} \to X'_i$. Положим $G'_i = G_{\gamma(i)}$, они действуют на X'_i по определению. Легко проверить, что получившееся действие G' на X' изоморфно a посредством изоморфизмов $G \to G'$ и $X \to X'$.

Второе утверждение вытекает из первого и леммы 1. □

К сожалению, функтор $\mathrm{Pro}(\mathbf{Lie}_K) \to \mathrm{Lie}_K(\mathrm{Pro}(\mathbf{Set}))$ обычно не задаёт биекции между множествами действий.

Пример 3. *Пусть $0 \neq K \in \mathbf{CRing}$ является локализацией конечно порождённого кольца. Рассмотрим проективную систему M из K-модулей $M_n = K^n$ с нулевыми скобками Ли и структурными гомоморфизмами*

$$M_{n+1} \to M_n,\ (x_1, \ldots, x_{n+1}) \mapsto (x_1, \ldots, x_n).$$

K-модуль K (рассматриваемый как абелева K-алгебра Ли) действует на M в $\mathrm{Lie}_K(\mathrm{Pro}(\mathbf{Set}))$ при помощи морфизма $a\colon K \times M \to M$, где

$$a^*(n) = (*, n+1),\ a_n(k; x_1, \ldots, x_{n+1}) = (kx_2, \ldots, kx_{n+1}).$$

Полупрямое произведение $M \rtimes K$ в $\mathrm{Lie}_K(\mathrm{Pro}(\mathbf{Set}))$ является проективной системой K-модулей $M_n \times K = K^{n+1}$ со скобкой Ли

$$K^{n+1} \times K^{n+1} \to K^n,$$
$$(x_1, \ldots, x_{n+1}; k; y_1, \ldots, y_{n+1}; l) \mapsto (ky_2 - lx_2, \ldots, ky_{n+1} - lx_{n+1}; 0).$$

Предположим, что $f\colon M \rtimes K \to L$ является гомоморфизмом K-алгебр Ли в $\mathrm{Pro}(\mathbf{Set})$, где L – про-K-алгебра Ли. Мы утверждаем, что индуцированный гомоморфизм $M \to L$ тривиален. Не умаляя общности, можем считать, что L является абстрактной K-алгеброй Ли и f задаётся K-линейным гомоморфизмом $f_*\colon M_n \times K \to L$ таким, что

$$f_*(ky_2 - lx_2, \ldots, ky_{n+1} - lx_{n+1}; 0) = [f_*(x_1, \ldots, x_n; k), f_*(y_1, \ldots, y_n; l)].$$

Из K-линейности следует, что

$$f_*(0, \ldots, y_i, \ldots, 0; 0) = [f_*(0, \ldots, 0; 1), f_*(0, \ldots, y_i, \ldots, 0; 0)]$$

при $2 \leqslant i \leqslant n$ (где y_i является $(i-1)$-й компонентой слева и i-й компонентой справа) и

$$f_*(0, \ldots, y_{n+1}; 0) = 0.$$

По индукции мы получаем $f_*(0,\dots,y_i,\dots,0;0)=0$ *для всех* $2 \leqslant i \leqslant n+1$*, где* y_i *является* $(i-1)$*-й компонентой, что и требовалось. С другой стороны,* M *не изоморфна нулевой* K*-алгебре Ли в* $\mathrm{Pro}(\mathbf{Set})$*, так что* $M \rtimes K$ *не изоморфно про-*K*-алгебре Ли.*

§5. Действия про-колец

Первым делом мы обобщим действия колец с единицей и алгебр с единицей на случай про-объектов.

- *Расщеплённое расширение про-кольца с единицей* R *при помощи про-кольца* S – это расщеплённое расширение $S \to S \rtimes R \leftrightarrows R$ в $\mathrm{Pro}(\mathbf{Rng})$ такое, что $S \rtimes R$ является про-кольцом с единицей и оба морфизма справа лежат в $\mathrm{Pro}(\mathbf{Ring})$. *Морфизм* таких расширений – это морфизм расщеплённых расширений, лежащий в $\mathrm{Pro}(\mathbf{Ring})$.
- *Расщеплённое расширение коммутативного про-кольца с единицей* K *при помощи коммутативного про-кольца* S – это расщеплённое расширение $S \to S \rtimes K \leftrightarrows K$ в $\mathrm{Pro}(\mathbf{CRng})$ такое, что $S \rtimes K$ является коммутативным про-кольцом с единицей и оба морфизма справа лежат в $\mathrm{Pro}(\mathbf{CRing})$. *Морфизм* таких расширений – это морфизм расщеплённых расширений, лежащий в $\mathrm{Pro}(\mathbf{CRing})$.
- *Расщеплённое расширение про-алгебры с единицей* $K \rightarrowtail R$ *при помощи про-кольца* S – это диаграмма

$$\begin{tikzcd} S \arrow[r, rightarrowtail, "i"] & S \rtimes R \arrow[r, shift right, twoheadrightarrow, "p"'] & R \arrow[l, shift right, rightarrowtail, "s"'] \\ & K' \arrow[u, rightarrowtail] \arrow[r, "\sim"] & K \arrow[u, rightarrowtail] \end{tikzcd}$$

  где столбцы являются про-алгебрами с единицей, s и p – это морфизмы про-алгебр с единицей, индуцирующие изоморфизм $K \cong K'$, и верхняя строка является расщеплённым расширением про-колец. *Морфизм* таких расширений – это морфизм расщеплённых расширений, лежащий в $\mathrm{Pro}(\mathbf{Ring})$.

Если вместо $\mathrm{Pro}(\mathbf{T})$ использовать $T(\mathrm{Pro}(\mathbf{Set}))$ или $\mathbf{T}$, то классы изоморфизма соответствующих расщеплённых расширений канонически соответствуют классическим действиям, определённым выше через операции и аксиомы.

Теорема 2. *Пусть $K \rightarrowtail R$ – про-алгебра с единицей, S – про-кольцо, $l\colon R \times S \to S$ и $r\colon S \times R \to S$ – действие алгебры с единицей $K \rightarrowtail R$ на кольцевом объекте S в* $\mathrm{Pro}(\mathbf{Set})$. *Тогда диаграмма $S \to S \rtimes R \leftrightarrows R$ изоморфна формальному проективному пределу $S' \to S' \rtimes R' \leftrightarrows R'$ расщеплённых расширений алгебр с единицами при помощи колец таким образом, что $R \to R'$ индуцируется кофинальным функтором между категориями индексов. Функторы* $\mathrm{Pro}(\mathbf{Rng}) \to \mathrm{Rng}(\mathrm{Pro}(\mathbf{Set}))$ *и* $\mathrm{Pro}(\mathbf{Alg}) \to \mathrm{Alg}(\mathrm{Pro}(\mathbf{Set}))$ *задают биекцию между множествами действий $K \rightarrowtail R$ на S в этих категориях.*

Доказательство. Не умаляя общности, мы можем считать, что категории индексов R и S являются коконечными направленными множествами, а $l^*(i)$ и $r^*(i)$ имеют одинаковые компоненты $\rho(i) \in \mathcal{I}_R$ и $\sigma(i) \in \mathcal{I}_S$ с точностью до порядка для всех $i \in \mathcal{I}_S$. Заменяя $\mathcal{I}_S$ на $\mathcal{I}_R \times \mathcal{I}_S$ и увеличивая ρ и σ, мы также можем считать, что

- ρ монотонно и кофинально;
- σ монотонно и $\sigma(i) \geqslant i$ для всех i;
- $l_j(p, a)|_i = l_i(p|_{\rho(i)}, a|_{\sigma(i)})$ и $r_j(a, p)|_i = r_i(a|_{\sigma(i)}, p|_{\rho(i)})$ при $i \leqslant j$;
- l_i и r_i биаддитивны;
- $l_i(p, l_{\sigma(i)}(q, a)) = l_i(pq|_{\rho(i)}, a|_{\sigma(i)})$;
- $l_i(p|_{\rho(i)}, r_{\sigma(i)}(a, q)) = r_i(l_{\sigma(i)}(p, a), q|_{\rho(i)})$;
- $r_i(r_{\sigma(i)}(a, p), q) = r_i(a|_{\sigma(i)}, p|_{\rho(i)}q)$;
- $l_i(p, ab) = l_i(p, a)\, b|_i$;
- $r_i(a, p)\, b|_i = a|_i\, l_i(p, b)$;
- $r_i(ab, p) = a|_i\, r_i(b, p)$;
- $l_i(1, a) = a|_i = r_i(a, 1)$;
- $l_i(k, a) = r_i(a, k)$ при $k \in K_{\rho(i)}$.

Для простоты будем писать $\sigma^n(i)$ для n применений σ к i и $\rho\sigma^n(i)$ вместо $\rho(\sigma^n(i))$. Положим $\widetilde{S}_i = R_{\rho\sigma^2(i)} \flat S_{\sigma^3(i)}$ при $i \in \mathcal{I}_S$, они образуют проективную систему $\widetilde{S}$. Из списка свойств вытекает, что существует уровневый морфизм про-колец $f\colon \widetilde{S} \to S$ такой, что

- $f_i(a) = a|_i$;
- $f_i(p \otimes a) = l_i(p|_{\rho(i)}, a|_{\sigma(i)})$;
- $f_i(a \otimes p) = r_i(a|_{\sigma(i)}, p|_{\rho(i)})$;
- $f_i(p \otimes a \otimes q) = l_i(p|_{\rho(i)}, r_{\sigma(i)}(a|_{\sigma^2(i)}, q|_{\rho\sigma(i)}))$

при $a \in S_{\sigma^3(i)}$ и $p, q \in R_{\rho\sigma^2(i)}$. Нам пришлось взять именно такие индексы в определении $\widetilde{S}_i$, чтобы f было мультипликативным. Теперь обозначим через S'_i фактор-кольца $\widetilde{S}_i$ по $R_{\rho\sigma^2(i)}$-инвариантным идеалам, порождённым

- $p|_{\rho\sigma^2(i)} \otimes a|_{\sigma^3(i)} - l_{\sigma^3(i)}(p, a)$;
- $a|_{\sigma^3(i)} \otimes p|_{\rho\sigma^2(i)} - r_{\sigma^3(i)}(a, p)$;
- $k \otimes a - a \otimes k$ при $a \in S_{\sigma^3(i)}$ и $k \in K_{\rho\sigma^2(i)}$;
- $1 \otimes a - a$ при $a \in S_{\sigma^3(i)}$.

Легко проверить, что такие идеалы лежат в ядрах f_i. Следовательно, f индуцирует уровневый морфизм $S' \to S$ про-колец, это изоморфизм, и обратный к нему задаётся естественными отображениями $S_{\sigma^3(i)} \to S'_i$. Положим $R'_i = R_{\rho\sigma^2(i)}$, оно действует на S'_i по построению как алгебра с единицей (с центральным подкольцом $K'_i = K_{\rho\sigma^2(i)}$). Ясно, что получившееся действие R' на S' переходит в действие R на S при изоморфизмах $R \to R'$ и $S \to S'$.

Второе утверждение следует из первого и лемм 3, 4. $\square$

Отсюда можно получить такое следствие. Рассмотрим про-кольцо R и абстрактное коммутативное кольцо с единицей K и предположим, что K действует на R в смысле действий коммутативных кольцевых объектов с единицей (как алгебр с единицей $\mathrm{id}\colon K \to K$) на кольцевых объектах в $\mathrm{Pro}(\mathbf{Set})$. Тогда R изоморфно про-K-алгебре, то есть формальному проективному пределу K-алгебр. Если же вместо полноценного действия мы потребуем, чтобы каждый элемент K действовал на про-кольце R и такие действия удовлетворяли классическим тождествам, то R может быть не изоморфно про-K-алгебре согласно примеру 2.

Теорема 3. *Пусть R – про-кольцо с единицей, S – про-кольцо, $l\colon R \times S \to S$ и $r\colon S \times R \to S$ – действие кольцевого объекта с единицей R на кольцевом объекте S в $\mathrm{Pro}(\mathbf{Set})$. Тогда диаграмма $S \to S \rtimes R \leftrightarrows R$ изоморфна формальному проективному пределу $S' \to S' \rtimes R' \leftrightarrows R'$ расщеплённых расширений колец с единицей при помощи колец таким образом, что $R \to R'$ индуцируется кофинальным функтором между категориями индексов. Функторы $\mathrm{Pro}(\mathbf{Rng}) \to \mathrm{Rng}(\mathrm{Pro}(\mathbf{Set}))$ и $\mathrm{Pro}(\mathbf{Ring}) \to \mathrm{Ring}(\mathrm{Pro}(\mathbf{Set}))$ задают биекцию между множествами действий R на S в этих категориях.*

Доказательство. Если обозначить через K_i образ $\mathbb{Z}$ в R_i при $i \in \mathcal{I}_R$, то $K \rightarrowtail R$ будет про-алгеброй с единицей, а l и r будут действием алгебры с единицей в $\mathrm{Pro}(\mathbf{Set})$. Тогда первое утверждение следует из теоремы 2, а второе – из первого и леммы 3. $\square$

Теорема 4. *Пусть K – коммутативное про-кольцо с единицей, S – коммутативное про-кольцо, а $l\colon K\times S \to S$ – действие коммутативного кольцевого объекта с единицей R на коммутативном кольцевом объекте S в $\mathrm{Pro}(\mathbf{Set})$. Тогда диаграмма $S \to S \rtimes K \leftrightarrows K$ изоморфна формальному проективному пределу $S' \to S' \rtimes K' \leftrightarrows K'$ расщеплённых расширений коммутативных колец с единицей при помощи коммутативных колец таким образом, что $K \to K'$ индуцируется кофинальным функтором между категориями индексов. Функторы $\mathrm{Pro}(\mathbf{CRng}) \to \mathrm{CRng}(\mathrm{Pro}(\mathbf{Set}))$ и $\mathrm{Pro}(\mathbf{CRing}) \to \mathrm{CRing}(\mathrm{Pro}(\mathbf{Set}))$ задают биекцию между множествами действий R на S в этих категориях.*

Доказательство. Так как $K \rightarrowtail K$ является про-алгеброй с единицей и l является действием алгебры с единицей в $\mathrm{Pro}(\mathbf{Set})$, то первое утверждение следует из теоремы 2. Второе утверждение вытекает из первого и леммы 3. $\square$

Теорема 5. *Пусть R, S – про-кольца, а $l\colon R\times S \to S$ и $r\colon S\times R \to S$ – действие кольцевого объекта R на кольцевом объекте S в $\mathrm{Pro}(\mathbf{Set})$. Тогда диаграмма $S \to S \rtimes R \leftrightarrows R$ изоморфна формальному проективному пределу $S' \to S' \rtimes R' \leftrightarrows R'$ расщеплённых расширений колец таким образом, что $R \to R'$ индуцируется кофинальным функтором между категориями индексов. Функтор $\mathrm{Pro}(\mathbf{Rng}) \to \mathrm{Rng}(\mathrm{Pro}(\mathbf{Set}))$ задаёт биекцию между множествами действий R на S в этих категориях.*

Доказательство. Пусть $\widetilde{R}_i = R_i \rtimes \mathbb{Z}$, тогда $\widetilde{R}$ является про-кольцом с единицей и l, r продолжаются до действия кольцевого объекта с единицей в $\mathrm{Pro}(\mathbf{Set})$ единственным образом. По теореме 3, диаграмма $S \to S \rtimes \widetilde{R} \leftrightarrows \widetilde{R}$ изоморфна формальному проективному пределу $S' \to S' \rtimes \widetilde{R}' \leftrightarrows \widetilde{R}'$ расщеплённых расширений алгебр с единицами при помощи колец так, что $\widetilde{R}' \to \widetilde{R}$ индуцируется кофинальным функтором. Тогда можно взять $R'_i = \mathrm{Ker}(\widetilde{R}'_i \to \mathbb{Z})$ и $(S' \rtimes R')_i = \mathrm{Ker}((S' \rtimes \widetilde{R}')_i \to \mathbb{Z})$. Второе утверждение следует из первого и леммы 3. $\square$

Теорема 6. *Пусть K, S – коммутативные про-кольца, а $l\colon K\times S \to S$ – действие коммутативного кольцевого объекта K на коммутативном кольцевом объекте S в $\mathrm{Pro}(\mathbf{Set})$. Тогда диаграмма $S \to S \rtimes K \leftrightarrows K$ изоморфна формальному проективному пределу $S' \to S' \rtimes K' \leftrightarrows K'$ расщеплённых расширений коммутативных колец таким* *образом, что* $K \to K'$ *индуцируется кофинальным функтором между категориями индексов. Функтор* $\mathrm{Pro}(\mathbf{CRng}) \to \mathrm{CRng}(\mathrm{Pro}(\mathbf{Set}))$ *задаёт биекцию между множествами действий* K *на* S *в этих категориях.*

Доказательство. Эта теорема доказывается так же, как теорема 5, только с использованием теоремы 4 вместо теоремы 3. □

Список литературы

1. M. Artin, B. Mazur, *Etale Homotopy*, Springer-Verlag, 1969.
2. F. Borceux, *Handbook of Categorical Algebra 2: Categories and Structures*, Cambridge University Press, 1994.
3. F. Borceux, D. Bourn, *Mal'cev, Protomodular, Homological and Semi-Abelian Categories*, Kluwer Academic Publishers, 2004.
4. F. Borceux, G. Janelidze, G. M. Kelly, *Internal object actions.* — Comment. Math. Univ. Carolin. **46**, No. 2 (2005), 235–255.
5. J. Dydak, F. R. Ruiz del Portal, *Monomorphisms and epimorphisms in procategories.* — Topology and Its Appl. **154** (2007), 2204–2222.
6. P.-A. Jacqmin, Z. Janelidze, *On stability of exactness properties under the procompletion.* — Adv. Math., **377** (2021), 107484.
7. M. Kashiwara, P. Schapira, *Categories and Sheaves*, Springer-Verlag, 2006.
8. S. Mardešić, J. Segal, *Shape Theory: the Inverse System Approach*, North-Holland Publishing Company, 1982.
9. E. Voronetsky, *Centrality of* K_2*-functors revisited.* — J. Pure Appl. Alg. **225**, No. 4 (2021), 106547.

Voronetsky E. Yu. Actions of pro-groups and pro-rings.

The notion of pro-groups, i.e. formal projective limits of groups, is quite useful in algebraic geometry, algebraic topology, and algebraic K-theory. Such objects may be considered as pro-sets with a group structure, namely, the category of pro-groups is a full subcategory of the category of pro-sets. It is known that the category of pro-groups is semi-Abelian, i.e. it admits the notions of internal actions and semi-direct products. This paper is devoted to the natural problem of explicit description of pro-group actions on each other. It is proved that such actions are given by ordinary proset morphisms satisfying certain axioms as in the case of group actions by automorphisms. This result is also generalized to several categories of non-unital pro-rings. Finally, a counterexample is given showing that a similar description does not hold for Lie pro-algebras.

С.-Петербургский
государственный университет,
Университетская наб., д. 7–9
199034, С.-Петербург, Россия
E-mail: voronetckiiegor@yandex.ru

Поступило 1 декабря 2023 г.