Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 531, 2024 г.

А. В. Блаженов

СВОЙСТВО СОКРАЩЕНИЯ АБЕЛЕВЫХ ГРУПП КОНЕЧНОГО РАНГА БЕЗ КРУЧЕНИЯ

Введение

В данной работе под абелевыми группами везде подразумеваются абелевы группы конечного ранга без кручения.

Определение 1. Абелева группа C имеет *свойство сокращения*, если изоморфизм $A \oplus C \cong B \oplus C$ влечет $A \cong B$.

Ласло Фукс поставил задачу охарактеризовать абелевы группы конечного ранга без кручения, обладающие свойством сокращения [5, проблема 70]. В случае групп ранга один эта проблема была решена самим Фуксом и Лунстрой в [12].

Для краткости будем говорить, что кольцо R обладает *UL-свойством* (unit's lifting property), если для любого $n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ каждая единица кольца R/nR поднимается до единицы R. Фукс и Лунстра доказали, что абелева группа ранга один имеет свойство сокращения только в том случае, когда она свободная или ее кольцо эндоморфизмов обладает UL-свойством.

Варфилд в [18] получил интересные результаты о связи стабильного ранга кольца эндоморфизмов модуля с сокращением. В частности, если стабильный ранг равен единице, то модуль имеет свойство сокращения, а его кольцо эндоморфизмов обладает UL-свойством.

Дальнейшее продвижение в решении данной проблемы было сделано Стелзером. В первой своей работе [15] он доказал, что если абелева группа, не содержащая свободных прямых слагаемых, имеет свойство сокращения, то ее кольцо эндоморфизмов обладает UL-свойством. В следующей работе [16] Стелзер пытался доказать, что UL-свойство является также достаточным. Его подход состоял в том, чтобы показать, что UL-свойство влечет единицу в стабильном ранге кольца эндоморфизмов. Стелзеру удалось доказать это для случая, когда полупростая часть алгебры квазиэндоморфизмов абелевой группы содержит только тела и кольца матриц над полями. Для остальных случаев Стелзер

Ключевые слова: свойство сокращения, теоремы Эйхлера, абелевы группы.

показал, что данное утверждение будет иметь место при некоем дополнительном условии на редуцированную норму, названном им *uniform openness condition* (сокращенно UNO–условие), но истинность которого неизвестна.

Развивая идеи Якобиньского [13] и Арнольда [6], автор обнаружил крайне тесную связь сокращения абелевых групп с классическими результатами Эйхлера [10, 11] и сумел доказать критерий свойства сокращения групп, сформулировав дополнительное условие, не выполняющееся лишь в крайне редких случаях [1, 2].

Определение 2. Алгебра с делением D индекса 2 – *вполне определенная алгебра кватернионов*, если любое архимедово нормирование ее центра F является вещественным и $\mathbb{R} \otimes_F D$ – алгебра гамильтоновых кватернионов.

Пусть L – центральная простая конечномерная алгебра над полем алгебраических чисел F, не являющаяся вполне определенной алгеброй кватернионов, ν – ее редуцированная норма, Γ – максимальный S-порядок в L, где S – центр Γ. Под нормой $\nu(I)$ правого идеала I кольца Γ понимаем идеал кольца S, порожденный множеством $\{\nu(x) \mid x \in I\}$.

Теорема A ([10, теорема 1])**.** *Правый идеал I кольца Γ является главным тогда и только тогда, когда $\nu(I)$ – главный идеал, порожденный элементом, положительным по каждому бесконечному простому поля F, разветвленному в алгебре L.*

Теорема B ([11, теорема 5])**.** *Пусть μ – идеал кольца S. Если регулярный элемент $x \in \Gamma$ и $\nu(x) \equiv \varepsilon \pmod{\mu}$, где ε – единица кольца S, положительная по каждому бесконечному простому поля F, разветвленному в алгебре L, то существует единица u кольца Γ, такая что $x \equiv u \pmod{\mu\Gamma}$.*

Пусть теперь L – полупростая конечномерная рациональная алгебра, Γ – подкольцо L, такое что $\Gamma = \Gamma_1 \dotplus \cdots \dotplus \Gamma_k$, где Γ_i – максимальные порядки в простых компонентах алгебры L, $1 \leqslant i \leqslant k$. Такое кольцо Γ мы также называем максимальным порядком в L и говорим, что теоремы A и B Эйхлера имеют место для Γ, если они выполняются для всех Γ_i.

Пусть C – абелева группа, $\mathrm{E}(C)$ – кольцо эндоморфизмов C, $\mathbf{N}(\mathrm{E}(C))$ – его нильрадикал. Тогда $R = \mathrm{E}(C)/\mathbf{N}(\mathrm{E}(C))$ – порядок в полупростой алгебре $\mathbb{Q}R$.

Определение 3 ([1, стр. 56]). Абелева группа C *удовлетворяет слабому условию Эйхлера*, если для максимального порядка Γ в алгебре $\mathbb{Q}R$, такого что $n\Gamma \subset R \subset \Gamma$ для некоторого $0 \neq n \in \mathbb{Z}$, имеют место теоремы A и B Эйхлера.

Автором был получен следующий критерий свойства сокращения:

Теорема 1 ([1, теорема 21]). *Абелева группа конечного ранга без кручения A имеет свойство сокращения тогда и только тогда, когда $A = B \oplus C$, где группа B является свободной, а группа C обладает свойствами:*

(i) *для любого $n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ каждая единица кольца $\mathrm{E}(C)/n\,\mathrm{E}(C)$ поднимается до единицы $\mathrm{E}(C)$;*

(ii) *все квазислагаемые C удовлетворяют слабому условию Эйхлера.*

Заметим, что если полупростая часть алгебры квазиэндоморфизмов группы C не содержит колец матриц над вполне определенными алгебрами кватернионов, то условие (ii) выполняется автоматически. Поскольку условие (i) очень сильное, а условие (ii) выполняется почти всегда, то возникает естественный вопрос: *Первое условие влечет второе*?

Некоторое время автор полагал это неверным и пытался построить пример абелевой группы, кольцо эндоморфизмов которой обладает UL-свойством, но имеющей квазислагаемое, которое не удовлетворяет слабому условию Эйхлера. Таким образом, формулировка критерия свойства сокращения была бы неулучшаема, в общем случае UL-свойство кольца не являлось бы равносильным тому, что его стабильный ранг равен единице, а UNO–условие Стелзера не всегда имело место.

Однако в дальнейшем автор пришел к выводу, что ответ на данный вопрос является положительным. В §1 данной работы Теоремы A и B Эйхлера в несколько ослабленной форме доказываются для случая вполне определенных алгебр кватернионов. В §2 показывается, что из критерия свойства сокращения второе условие действительно можно убрать. В результате получаем окончательное решение соответствующей проблемы Фукса.

В данной работе $\mathbb{Z}$ означает кольцо целых чисел, $\mathbb{Q}$ и $\mathbb{R}$ – поля рациональных и вещественных чисел. Через R^* обозначается группа единиц кольца R. Остальные обозначения стандартны либо объясняются в контексте.

§1. Теоремы Эйхлера для случая вполне определенных алгебр кватернионов.

Доказательства теорем A и B не проходят для общего случая, так как в ситуации простых центральных алгебр индекса 2 они опираются на теорему Эйхлера об аппроксимации:

Теорема 2 ([9, лемма 7]). *Пусть F – поле алгебраических чисел с кольцом целых S, даны элементы $f \in F$ и $0 < q \in \mathbb{Q}$. Пусть $f^{(1)}, \dots, f^{(r)}$ – все элементы, сопряженные к f, такие что соответствующие сопряженные поля $F^{(i)}$ – вещественные. Если $r < \dim_{\mathbb{Q}} F$, то для каждого множества $\{\varepsilon_i\}_{1 \leqslant i \leqslant r}$ произвольных положительных чисел существует элемент $s \in S$, такой что*

$$|f^{(i)} - qs^{(i)}| < \varepsilon_i, \qquad 1 \leqslant i \leqslant r.$$

Если L – вполне определенная алгебра кватернионов, то ее центр F является чисто вещественным расширением поля рациональных чисел $\mathbb{Q}$ и $r = \dim_{\mathbb{Q}} F$. Поэтому данную теорему здесь применить не удается. Однако, будет справедлива следующая теорема:

Теорема 3. *Пусть F – поле алгебраических чисел, S – его полное дедекиндово подкольцо, не являющееся кольцом целых алгебраических чисел. Пусть даны элементы $f \in F$ и $0 < q \in \mathbb{Q}$. Пусть $f^{(1)}, \dots, f^{(r)}$ – все элементы, сопряженные к f, такие что соответствующие сопряженные поля $F^{(i)}$ – вещественные. Для каждого множества $\{\varepsilon_i\}_{1 \leqslant i \leqslant r}$ произвольных положительных чисел существует элемент $s \in S$, такой что*

$$|f^{(i)} - qs^{(i)}| < \varepsilon_i, \qquad 1 \leqslant i \leqslant r.$$

Лемма 1. *Пусть дано множество положительных чисел $\{\varepsilon_j\}_{1 \leqslant j \leqslant n}$ с условием, что $\varepsilon_i = \varepsilon_j$, если $F^{(i)}$ и $F^{(j)}$ – сопряженные комплексные поля. Тогда существуют $0 < \delta < 1$ и $0 \neq v \in S$, такие что для всех элементов $v^{(j)}$, сопряженных с v,*

$$|v^{(j)}| \leqslant \delta\varepsilon_j \quad \text{и} \quad |v^{(j)}| \geqslant \frac{\delta\varepsilon_j}{\sqrt{D}},$$

где D – дискриминант поля F.

Доказательство. Известно, что $S = J_\Pi$, где J_Π – локализация кольца целых алгебраических чисел J по некоторому множеству простых идеалов Π [8, теорема 2.7]. Поэтому существует элемент $u \in S^*$, такой что $|\operatorname{Nr}(u)| < 1$. Пусть $\{\alpha_i\}_{1 \leqslant i \leqslant n}$ – целый базис поля F над $\mathbb{Q}$, D – его дискриминант, $\sqrt{D} = |\det(\alpha_i^{(j)})| \neq 0$. Тогда элементы $\beta_i = u^k \alpha_i \in S$, где $k \in \mathbb{Z}$, $1 \leqslant i \leqslant n$, также образуют базис поля F. Корень из его дискриминанта:

$$|\det(\beta_i^{(j)})| = |\det(u^{(j)^k} \alpha_i^{(j)})| = |\det(\alpha_i^{(j)}) \prod_{j=1}^{n} u^{(j)^k}|$$
$$= \sqrt{D} \cdot |\operatorname{Nr}(u)|^k \to 0 \quad \text{при} \quad k \to \infty.$$

Поэтому $|\det(\beta_i^{(j)})| < \prod_{j=1}^n \varepsilon_j$ для некоторого k, и найдется $0 < \delta < 1$, такое что $|\det(\beta_i^{(j)})| = \delta^n \prod_{j=1}^n \varepsilon_j$. По теореме Минковского о линейных формах [4, теорема 95], существуют $z_1, \ldots, z_n \in \mathbb{Z}$, не все нулевые, такие что

$$\Big|\sum_{i=1}^{n} z_i \beta_i^{(j)}\Big| \leqslant \delta\varepsilon_j, \quad 1 \leqslant j \leqslant n.$$

Положив $v = \sum_{i=1}^n z_i \beta_i^{(1)}$, получим искомый элемент $v \in S$. Покажем, что для него выполнено второе неравенство. Заметим, что $v = u^k \sum_{i=1}^n z_i \alpha_i$, где $w = \sum_{i=1}^n z_i \alpha_i$ – целый элемент поля F. Следовательно, $|\operatorname{Nr}(w)| \geqslant 1$ и $\prod_{j=1}^n |v^{(j)}| = |\operatorname{Nr}(v)| = |\operatorname{Nr}(u)|^k |\operatorname{Nr}(w)| \geqslant |\operatorname{Nr}(u)|^k$. Отсюда получаем

$$|v^{(j)}| \geqslant \frac{|\operatorname{Nr}(u)|^k}{\prod_{i \neq j} |v^{(i)}|} \geqslant \frac{\delta\varepsilon_j |\operatorname{Nr}(u)|^k}{\prod_{i=1}^n \delta\varepsilon_i} = \frac{\delta\varepsilon_j |\operatorname{Nr}(u)|^k}{\sqrt{D} |\operatorname{Nr}(u)|^k} = \frac{\delta\varepsilon_j}{\sqrt{D}}.$$

Для $0 \leqslant x \in \mathbb{R}$ обозначим через $[x]$ наибольшее неотрицательное целое число, не превосходящее x, а для $x < 0$ положим $[x] = -[-x]$. Заметим, что это обозначение отличается от общепринятого.

Лемма 2. *Для любых вещественных чисел a и $b \neq 0$ справедливо неравенство*
$|a - [a/b]b| < |b|$.

Доказательство. Из определения $[x]$ следует $|x - [x]| < 1$. Таким образом $|a - [a/b]b| = |b||a/b - [a/b]| < |b|$. $\square$

Доказательство теоремы 3 будем проводить индукцией по r.

База индукции: $r = 1$. По лемме 1 существует элемент $v \in S$ с $|v^{(1)}| < \varepsilon_1/q$. Тогда положим $s = [f^{(1)}/qv^{(1)}]v \in S$. Ввиду предыдущей леммы $|f^{(1)} - qs^{(1)}| = |f^{(1)} - [f^{(1)}/qv^{(1)}]qv^{(1)}| < |qv^{(1)}| < q\varepsilon_1/q = \varepsilon_1$.

Индукционный переход: предположим, что найден элемент $s_0 \in S$, такой что $|f^{(i)} - qs_0^{(i)}| < \varepsilon_i/2$, $1 \leqslant i \leqslant r-1$. Если $|f^{(r)} - qs_0^{(r)}| < \varepsilon_r$, то элемент s_0 – искомый. Поэтому можно считать, что $|f^{(r)} - qs_0^{(r)}| \neq 0$.

По лемме 1, существуют $0 < \delta < 1$ и $0 \neq v \in S$, такие что

$$|v^{(i)}| \leqslant \frac{\delta\varepsilon_i\varepsilon_r}{2q\sqrt{D}\,|(f^{(r)} - qs_0^{(r)})|}, \quad 1 \leqslant i \leqslant r-1,$$
$$|v^{(r)}| \leqslant \frac{\delta\varepsilon_r}{q} \quad \text{и} \quad |v^{(r)}| \geqslant \frac{\delta\varepsilon_r}{q\sqrt{D}}.$$

Положим $s = s_0 + [(f^{(r)} - qs_0^{(r)})/qv^{(r)}]v$. Тогда $s \in S$ и для $1 \leqslant i \leqslant r-1$ имеем:

$$\begin{aligned}|f^{(i)} - qs^{(i)}| &\leqslant |f^{(i)} - qs_0^{(i)}| + q|[(f^{(r)} - qs_0^{(r)})/qv^{(r)}]v^{(i)}| \\ &< \varepsilon_i/2 + q|[(f^{(r)} - qs_0^{(r)})/\delta\varepsilon_r]v^{(i)}| \\ &\leqslant \varepsilon_i/2 + q|[\sqrt{D}(f^{(r)} - qs_0^{(r)})/\delta\varepsilon_r]| \cdot \delta\varepsilon_i\varepsilon_r/2q\sqrt{D}|(f^{(r)} - qs_0^{(r)})| \\ &\leqslant \varepsilon_i/2 + \varepsilon_i/2 = \varepsilon_i,\end{aligned}$$

так как по определению $|[x]| \leqslant |x|$. Наконец, ввиду леммы 2,

$$|f^{(r)} - qs^{(r)}| \leqslant |f^{(r)} - qs_0^{(r)} - [(f^{(r)} - qs_0^{(r)})/qv^{(r)}]qv^{(r)}| < |qv^{(r)}| \leqslant \delta\varepsilon_r < \varepsilon_r.$$

Таким образом s имеет требуемые свойства.

Теорема 4. *Пусть* Γ *– максимальный порядок во вполне определенной алгебре кватернионов , причем его центр* S *не является кольцом целых алгебраических чисел. Тогда теоремы А и В Эйхлера имеют место для* Γ.

Доказательство. Доказательство полностью следует [9, 10, 11] с той лишь разницей, что в ситуации вполне определенной алгебры кватернионов применяем теорему 3 вместо теоремы 2. Либо также можно поступить при доказательстве обобщенной формулировки теорем Эйхлера, принадлежащей Суону, и изложенном в [14, теорема 7.2]. Здесь данную замену делаем в лемме 7.16. □

§2. Критерий свойства сокращения.

Автором была доказана достаточность условий критерия сокращения для более широкого класса модулей.

Пусть Λ – $\mathbb{Z}$-редуцированное подкольцо конечномерной рациональной алгебры. Рассматриваемые модули принадлежат категории $\mathbb{Z}$-редуцированных правых модулей над Λ без кручения конечного ранга (под $\mathbb{Z}$-редуцированным модулем подразумевается модуль, аддитивная группа которого не содержит делимых подгрупп).

Теорема 5 ([1, теорема 20]). *Если все квазислагаемые модуля M удовлетворяют слабому условию Эйхлера и его кольцо эндоморфизмов $\mathrm{E}_\Lambda(M)$ обладает UL-свойством, то M имеет свойство сокращения.*

Теперь мы можем усилить эту теорему. Напомним некоторые определения и факты о порядках в конечномерных рациональных алгебрах, которые нам понадобятся.

Определение 4. *Подкольцо R конечномерной алгебры L над $\mathbb{Q}$ называем порядком в L, если $\mathbb{Q}R = L$. Порядки R и R' квазиравны (или эквивалентны) (обозначается $R \asymp R'$), если существуют ненулевые целые m и n, т. ч. $mR' \subset R$ и $nR \subset R'$. Порядок Γ называется максимальным в L, если он не содержится в другом эквивалентном порядке.*

Для квазиравных модулей также будем использовать обозначение $M \asymp M'$, а для квазиизоморфных модулей $M \approx N$.

Теорема 6 ([7, следствие 10.14]). *Пусть T – порядок в конечномерной рациональной алгебре, $\mathbf{N}(T)$ – нильрадикал кольца T, $R = T/\mathbf{N}(T)$ – порядок в полупростой алгебре $L = \mathbb{Q}R = L_1 \dotplus \cdots \dotplus L_k$, где L_i – простые алгебры, центры которых $F_i = \mathrm{C}(L_i)$ – поля алгебраических чисел, $1 \leqslant i \leqslant k$.*

Тогда существуют $0 \neq n \in \mathbb{Z}$ и максимальный порядок порядок Γ в L, т. ч. $n\Gamma \subset R \subset \Gamma$ и $\Gamma = \Gamma_1 \dotplus \cdots \dotplus \Gamma_k$, где Γ_i – максимальные порядки в L_i, причем их центры $S_i = \mathrm{C}(\Gamma_i)$ – дедекиндовы кольца в F_i, $1 \leqslant i \leqslant k$.

Следствие 1. *Центры эквивалентных максимальных порядков в полупростых алгебрах совпадают.*

Доказательство. Пусть имеются эквивалентные максимальные порядки $\Gamma = \Gamma_1 \dotplus \cdots \dotplus \Gamma_k$ и $\Gamma' = \Gamma'_1 \dotplus \cdots \dotplus \Gamma'_k$ в полупростой конечномерной рациональной алгебре $L = L_1 \dotplus \cdots \dotplus L_k$, где Γ_i и Γ'_i – максимальные порядки в простых алгебрах L_i, $1 \leqslant i \leqslant k$.

Так как $\Gamma \asymp \Gamma'$, то $\Gamma_i \asymp \Gamma'_i$ и $\mathrm{C}(\Gamma_i) \asymp \mathrm{C}(\Gamma'_i)$, $1 \leqslant i \leqslant k$. Поскольку эти центры являются дедекиндовыми кольцами, и каждый класс эквивалентных порядков в поле алгебраических чисел содержит ровно одно дедекиндово кольцо [8, теорема 2.7], то $\mathrm{C}(\Gamma_i) = \mathrm{C}(\Gamma'_i)$ для всех $1 \leqslant i \leqslant k$. Поэтому $\mathrm{C}(\Gamma) = \mathrm{C}(\Gamma_1) \dotplus \cdots \dotplus \mathrm{C}(\Gamma_k) = \mathrm{C}(\Gamma'_1) \dotplus \cdots \dotplus \mathrm{C}(\Gamma'_k) = \mathrm{C}(\Gamma')$.

Лемма 3. *Пусть L – центральная простая конечномерная алгебра над полем алгебраических чисел F, Γ – максимальный S-порядок в L, где $S = \mathrm{C}(\Gamma)$ – кольцо целых алгебраических чисел поля F, $n = \dim_{\mathbb{Q}} F$. Тогда для любого простого целого $p > 2n+1$ существует такой элемент $\alpha \in \Gamma$, что $\alpha + p\Gamma$ – единица кольца $\Gamma/p\Gamma$, но $\alpha \not\equiv \gamma \pmod{p\Gamma}$, $\gamma \in \Gamma^*$.*

Доказательство. Пусть p – простое целое, $p > 2n+1$, целое a – первообразный корень по модулю p, то есть $a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p\mathbb{Z}}$ и $a^k \not\equiv 1 \pmod{p\mathbb{Z}}$ при $k < p-1$. Ясно, что $a + pS$ – единица кольца S/pS.

В качестве искомого элемента возьмем $\alpha \in \Gamma$, такой что редуцированная норма $\nu(\alpha) \equiv a \pmod{pS}$. Он существует согласно [1, теорема 11] и является единицей кольца $\Gamma/p\Gamma$. Допустим, что $\alpha \equiv \gamma \pmod{p\Gamma}$, $\gamma \in \Gamma^*$. Тогда $\nu(\alpha) \equiv \nu(\gamma) \equiv a \pmod{pS}$, $\nu(\gamma) = \varepsilon \in S^*$, норма $\mathrm{Nr}(a) \equiv \mathrm{Nr}(\varepsilon) \pmod{p\mathbb{Z}}$. Поскольку $\mathrm{Nr}(\varepsilon) = \pm 1$, $\mathrm{Nr}(a) = a^n$, имеем $a^n \equiv \pm 1 \pmod{p\mathbb{Z}}$ и получаем $a^{2n} \equiv 1 \pmod{p\mathbb{Z}}$. Но, по условию леммы и выбору числа a, это невозможно, так как $2n < p-1$. $\square$

Лемма 4. *Пусть R – кольцо с UL–свойством, Γ – эквивалентный ему порядок с $n\Gamma \subset R \subset \Gamma$. Тогда для любого целого m, взаимно простого с n, каждая единица кольца $\Gamma/m\Gamma$ поднимается до единицы кольца Γ.*

Доказательство. Пусть $\alpha \in \Gamma$, $\alpha + m\Gamma$ – единица кольца $\Gamma/m\Gamma$. Так как $(n,m) = 1$, то $nk \equiv 1 \pmod{m}$ для некоторого $k \in \mathbb{Z}$. Тогда $nk\alpha \equiv \alpha \pmod{m\Gamma}$, $nk\alpha \in R$ и $nk\alpha$ – единица кольца R/mR. По условию леммы, $nk\alpha \equiv \gamma \pmod{mR}$, где $\gamma \in R^*$. Отсюда $\alpha \equiv \gamma \pmod{m\Gamma}$, $\gamma \in \Gamma^*$. $\square$

Следствие 2. *Пусть R – кольцо с UL–свойством в полупростой алгебре, $n\Gamma \subset R \subset \Gamma = \Gamma_1 \dotplus \cdots \dotplus \Gamma_k$ – максимальный порядок, где Γ_i – максимальные порядки в простых алгебрах, $1 \leqslant i \leqslant k$.*

Тогда центры $\mathrm{C}(\Gamma_i)$ не являются кольцами целых алгебраических чисел для всех $1 \leqslant i \leqslant k$.

Доказательство. Действительно, тогда по предыдущей лемме почти для всех целых m каждая единица кольца $\Gamma/m\Gamma$ поднимается до единицы кольца Γ. Поэтому кольца Γ_i также обладают данным свойством, $1 \leqslant i \leqslant k$. Однако, согласно лемме 3, это невозможно в случае, когда $\mathrm{C}(\Gamma_i)$ является кольцом целых алгебраических чисел.

Далее M^t обозначает прямую сумму t экземпляров модуля M, $\mathrm{Mat}_t(R)$ – кольцо матриц порядка t над кольцом R.

Теорема 7. *Пусть модуль* $M \asymp M' = M_1^{t_1} \oplus \cdots \oplus M_s^{t_s}$, *где модули* M_i *сильно неразложимы и* $M_i \not\asymp M_j$ *при* $i \neq j$, *кольца* $R = \mathrm{E}_\Lambda(M)/\mathbf{N}(\mathrm{E}_\Lambda(M))$, $R' = \mathrm{E}_\Lambda(M')/\mathbf{N}(\mathrm{E}_\Lambda(M'))$, $R_i = \mathrm{E}_\Lambda(M_i)/\mathbf{N}(\mathrm{E}_\Lambda(M_i))$. *Тогда*

(a) $\mathrm{E}_\Lambda(M) \asymp \mathrm{E}_\Lambda(M')$, $R \asymp R'$ *и* $\mathrm{C}(R) \asymp \mathrm{C}(R')$.

(b) $R \asymp \mathrm{Mat}_{t_1}(R_1) \dotplus \cdots \dotplus \mathrm{Mat}_{t_s}(R_s)$ *и* $\mathrm{C}(R) \asymp \mathrm{C}(R_1) \dotplus \cdots \dotplus \mathrm{C}(R_s)$.

(c) *Пусть* $n_i\Gamma_i \subset R_i \subset \Gamma_i$ *– максимальные порядки в* $\mathbb{Q}R_i, 1 \leqslant i \leqslant s$. *Тогда* $\Gamma' = \mathrm{Mat}_{t_1}(\Gamma_1) \dotplus \cdots \dotplus \mathrm{Mat}_{t_s}(\Gamma_s)$ *– максимальный порядок в* $\mathbb{Q}R$, $m\Gamma' \subset R' \subset \Gamma'$, *где* $m = n_1 \cdots n_s$. *Причем центры* $S_i = \mathrm{C}(\Gamma_i) = \overline{\mathrm{C}(R_i)}$ *– дедекиндовы кольца, являющиеся целыми замыканиями колец* $\mathrm{C}(R_i)$.

(d) *Пусть* $n\Gamma \subset R \subset \Gamma$ *– максимальный порядок в* $\mathbb{Q}R$. *Тогда его центр* $\mathrm{C}(\Gamma) = \overline{\mathrm{C}(R_1)} \dotplus \cdots \dotplus \overline{\mathrm{C}(R_s)}$.

Доказательство. Пункты (a) и (b) доказываются совершенно аналогично [7, теорема 9.10], а пункт (c) следует из [7, следствие 10.3] и [7, следствие 10.13]. (d): Поскольку ясно, что $\Gamma \asymp \Gamma'$, то утверждение вытекает из следствия 1 и пункта (c). $\square$

Теорема 8. *Если кольцо эндоморфизмов модуля* M *имеет UL–свойство, то все квазислагаемые* M *удовлетворяют слабому условию Эйхлера.*

Доказательство. Известно [1, лемма 1], что $M \asymp M' = M_1^{t_1} \oplus \cdots \oplus M_s^{t_s}$, где модуль M_i – сильно неразложим, и $M_i \not\asymp M_j$ при $i \neq j$, $1 \leqslant i, j \leqslant s$.

Введем обозначения $R, R', R_i, \Gamma_i, \Gamma', S_i$ как в предыдущей теореме. Так как по условию кольцо эндоморфизмов $\mathrm{E}_\Lambda(M)$ имеет UL-свойство, то им также обладает кольцо R [16, лемма 2.2]. Согласно теореме 6 существует максимальный порядок $\Gamma = \Gamma_1 \dotplus \cdots \dotplus \Gamma_s$ в $\mathbb{Q}R$ с $n\Gamma \subset R \subset \Gamma$, где Γ_i – максимальные порядки в простых алгебрах $\mathrm{Mat}_{t_i}(\mathbb{Q}R_i)$, $1 \leqslant i, j \leqslant s$. Отсюда, по следствию 2 и пункту (d) теоремы 7 центры

$\mathrm{C}(\Gamma_i) = \overline{\mathrm{C}(R_i)}$ не являются кольцами целых алгебраических чисел для всех $1 \leqslant i \leqslant k$.

Пусть теперь N – квазислагаемое модуля M и имеется максимальный порядок с $m\Gamma'' \subset \mathrm{E}_\Lambda(N)/\mathbf{N}(\mathrm{E}_\Lambda(N)) \subset \Gamma''$. В силу единственности квазиразложения [1, предложение 2], $N \approx M_1^{r_1} \oplus \cdots \oplus M_s^{r_s}$, $0 \leqslant r_i \leqslant t_i$. Без уменьшения общности можно даже считать, что $N \asymp M_1^{r_1} \oplus \cdots \oplus M_s^{r_s}$. Тогда по пункту (d) теоремы 7 центр $\mathrm{C}(\Gamma'')$ является прямой суммой $\overline{\mathrm{C}(R_i)}, r_i > 0$, ни одно из которых не является кольцом целых алгебраических чисел.

Поэтому из теоремы 4 следует, что теоремы A и B Эйхлера имеют место для Γ'', то есть квазислагаемое N удовлетворяет слабому условию Эйхлера. $\square$

Суммируя данную теорему с теоремой 5, получаем:

Теорема 9. *Если кольцо эндоморфизмов модуля M обладает UL–свойством, то M имеет свойство сокращения.*

Теперь в теореме 1 мы можем опустить второе условие и в итоге получаем окончательное решение проблемы 70 Фукса о свойстве сокращения:

Теорема 10. *Абелева группа конечного ранга без кручения A имеет свойство сокращения тогда и только тогда, когда $A = B \oplus C$, где группа B является свободной, а для любого $n \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}$ каждая единица кольца $\mathrm{E}(C)/n\,\mathrm{E}(C)$ поднимается до единицы $\mathrm{E}(C)$.*

Полный вывод данного утверждения, опирающийся здесь на довольно длинное доказательство теоремы 1 в [1, теорема 21], можно сильно сократить, если изначально использовать теорему 8.

Заметим также, что если Γ – максимальный порядок во вполне определенной алгебре кватернионов и его центр $\mathrm{C}(\Gamma)$ – кольцо целых алгебраических чисел, то для него теоремы A и B могут не выполняться, как показывают контрпримеры Суона [17] и автора [3, лемма 2]. Поэтому резонно теперь условие Эйхлера заменить на еще более слабое ограничение, при котором результаты [1] и [13] приобретают несколько более общий вид:

Определение 5. *Λ-модуль M удовлетворяет слабейшему условию Эйхлера, если в его квазиразложении на сильно неразложимые модули $M_1^{t_1} \oplus \cdots \oplus M_s^{t_s}$ для всех $1 \leqslant i \leqslant s$ выполнено хотя бы одно из следующих условий:*

(i) $t_i > 1$;

(ii) *алгебра* $\mathbb{Q}\,\mathrm{E}_\Lambda(M_i)/\mathbf{J}\big(\mathbb{Q}\,\mathrm{E}_\Lambda(M_i)\big)$ *не является вполне определенной алгеброй кватернионов;*

(iii) *центр кольца* $\mathrm{E}_\Lambda(M_i)/\mathbf{N}\big(\mathrm{E}_\Lambda(M_i)\big)$ *не лежит в кольце целых алгебраических чисел.*

Список литературы

1. А. В. Блаженов, *Роды и сокращение модулей конечного ранга без кручения.* — Алгебра и анализ **7**, No. 6 (1995), 33–78.
2. А. В. Блаженов, *Исправления к статье "Роды и сокращение модулей конечного ранга без кручения".* — Алгебра и анализ **11**, No. 4 (1999), 222–224.
3. А. В. Блаженов, *О самосокращении абелевых групп конечного ранга без кручения.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **265** (1999), 7–10.
4. Э. Гекке, *Лекции по теории алгебраических чисел*, Государственное издательство технико-теоретической литературы, М., 1940.
5. Л. Фукс, *Бесконечные абелевы группы*, т. 2, Мир, М., 1977.
6. D. M. Arnold, *Genera and direct sum decompositions of torsion free modules*, Abelian Group Theory, Lecture Notes in Math., 616, Springer–Verlag, Berlin–New York, 1977, pp. 197–218.
7. D. M. Arnold, *Finite rank torsion free abelian groups and rings.* — Lecture Notes Math. **931**, Springer–Verlag, Berlin–New York (1982).
8. R. A. Beaumont, R. S. Pierce, *Subrings of algebraic number fields.* — Acta Sci. Math. Szeged **22** (1961), 202–216.
9. M. Eichler, *Bestimmung der Idealklassenzahl in gewissen normalen einfachen Algebren.* — J. reine angew. Math. **176** (1937), 192–202.
10. M. Eichler, *Über die Idealklassenzahl hyperkomplexen Zahlen.* — Math. Z. **43** (1938), 481–494.
11. M. Eichler, *Allgemeine Kongruenzklasseneinteilungen der Ideale einfacher Algebren über algebraischen Zahlkörpern und ihre L-Reihen.* — J. reine angew. Math. **179** (1938), 227–251.
12. L. Fuchs, F. Loonstra, *On the cancellation of modules in direct sums over Dedekind domains.* — Indaq. Math. **33** (1971), 163–169.
13. H. Jacobinski, *Genera and decompositions of lattices over orders.* — Acta Math. **121** (1968), 1–29.
14. K. Roggenkamp, *Lattices over orders II.* Lect. Notes Math. **142** (1970).
15. J. Stelzer, *A cancellation criterion for finite-rank torsion-free abelian groups.* — Proc. Amer. Math. Soc. **94** (1985), 363–368.
16. J. Stelzer, *Ring theoretical criteria for cancellation.* — Abelian group theory (Oberwolfach, 1985), Gordon and Breach, New York, 1987, pp. 175–196.
17. R. G. Swan, *Projective modules over group rings and maximal orders.* — Ann. Math. **76** (1962), 55–61.
18. R. B. Warfield, *Cancellation of modules and groups and stable range of endomorphism rings.* — Pac. J. Math. **91**, 1980, 457–485.

Blazhenov A. V. The cancellation property of torsion-free abelian groups of finite rank.

A final solution to Fuchs's problem 70 on the cancellation property is given. First, Eichler's theorem is modified for the case of totally definite quaternion algebras. Then this result is applied to show that one of the conditions in the author's earlier criterion can be omitted.

Федеральное государственное
автономное образовательное учреждение
высшего образования
"Национальный исследовательский университет ИТМО"
Кронверкский пр., д. 49, лит. А.
Санкт-Петербург 197101, Россия
E-mail: a_blazh@mail.ru, a.blazh@gmail.com

Поступило 25 января 2024 г.