Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 531, 2024 г.

Е. Б. Плоткин, А. И. Генералов, Н. С. Гельдхаузер, Н. Л. Гордеев, А. Ю. Лузгарев, В. В. Нестеров, И. А. Панин, В. А. Петров, С. Ю. Пилюгин, А. В. Степанов, А. К. Ставрова, В. Г. Халин

О Николае Александровиче Вавилове

§1. Николай Александрович Вавилов

Каждое мгновение время оставляет отпечатки в нашей памяти. Так и лежат они в ней – незримые, нетленные, неподвластные ничему и никому артефакты эпох и страстей, чтобы всплыть однажды перед закрытыми глазами и вернуть в повседневность кусочек мерцающей вдалеке, но бесконечно непрерывной жизни.

Институт математики на Фонтанке 27, семинарская аудитория 311, третий этаж. За столом сидит, согнувшись, Дмитрий Константинович Фаддеев, подпирает худощавое лицо правой рукой, внимательно слушает докладчика. Рядом Зенон Иванович Боревич, топорщит усы, что-то пишет в тетрадке, иногда всматриваясь в доску и снова погружаясь в тетрадку. У окна Анатолий Владимирович Яковлев, порывистый, острый, речь отрывистая, периодически смотрит в окно, думая о чем-то своем. Иногда забегает Андрей Александрович Суслин, редко, но все же заходит, опаздывает, останавливается в двери, смотрит на доску, все сразу понимает и садится, где попало, ожидать конца доклада. Теперь среди них Николай Александрович Вавилов. Навсегда... навечно. Для многих – Коля. Ученый, Учитель, Коллега, Друг. Невозможно в это поверить...

Профессор Николай Александрович Вавилов скоропостижно скончался 14 сентября 2023 года у себя дома в Санкт-Петербурге, не дожив 3 дня до своего 71-летия. Он ушел на пике творческой и жизненной активности, будучи полным научных идей и организационных планов. Вместе с ним ушел целый мир, на который опирались семья и все остальные, кому посчастливилось с ним дружить и работать. Помимо доказательства многочисленных теорем и построения новых теорий, Николаю Александровичу довелось сделать то, что удается лишь немногим – он создал большую, живую и многогранную научную школу в области структурной теории групп Шевалле над кольцами. Ученики и соратники Н. А. Вавилова работают в университетах России, Израиля, Польши, Германии, Китая. Под его руководством защитили диссертации более 20 кандидатов и пятеро докторов наук.

Николай Вавилов родился 17 сентября 1952 года в Ленинграде, в семье преподавателей ЛЭТИ – Натальи Николаевны Созиной и Александра Александровича Вавилова. Наталья Николаевна была талантливым физиком, доцентом кафедры электронной техники. У нее однажды писал диплом будущий Нобелевский лауреат Ж. И. Алферов. Она же, безусловно, была хранителем семейного очага и уюта в доме Вавиловых. Его отец А. А. Вавилов рано стал профессором, заведующим кафедрой автоматики и процессов управления, а впоследствии ректором ЛЭТИ, председателем Совета ректоров вузов Ленинграда. Он всегда был в работе, в делах, в решениях. Такова была атмосфера семьи, в которой рос Николай.

Коля учился в конце 60-х в знаменитой Ленинградской “Тридцатке”, школе номер 30, той самой, что и сейчас на углу Среднего проспекта и 7-й линии Васильевского острова. В то время по Ленинграду гремело имя преподавателя Иосифа Яковлевича Веребейчика. Учитель милостью Божьей, он сам заранее отбирал в класс, где был руководителем, способных школьников. В этот класс попали будущие Колины друзья, известные ученые В. Крейнович, М. Захаревич, И. Виденский, Е. Глускин. А Н. Вавилов вместе с Н. Гордеевым оказались в классе, где Веребейчик только вел математику, классным же руководителем был опытный педагог, физик М. Л. Шифман. Поначалу Коля Вавилов глубоко увлекался химией и иностранными языками. О профессиональной карьере математика речь как-то не заходила. Но постепенно Веребейчик сумел привить школьникам настоящую любовь к этой науке. Магия его личности и педагогический талант кардинально изменили Колины интересы, и в десятом классе вопрос о поступлении на матмех был решен.

Николай Вавилов поступил на матмех Ленинградского университета в 69-м году. Среди всех предметов алгебра сразу же выдвинулась для него на первое место. Довольно рано завязались контакты с профессором из ЛОМИ Анатолием Николаевичем Андриановым, специалистом в теории модулярных форм. Однако настоящей работы не получилось, и диплом Н. Вавилов писал у Анатолия Владимировича

Яковлева по теории Галуа, а в аспирантуру в 75-м году поступил к Зенону Ивановичу Боревичу.

Зенон Иванович в это время отошел от целочисленных представлений и локальных полей, неожиданно заинтересовавшись линейными группами. Где-то в 75-м году он набрел на идею описания подгрупп в полной линейной группе, и в 76-м году появилась его судьбоносная статья “Описание подгрупп полной линейной группы, содержащих группу диагональных матриц” [7]. Он ввел понятие сети и в его терминах описал структуру некоторых подгрупп полной линейной группы над полем, при естественных ограничениях на количество элементов поля. В частности, оказалось, что такое описание никак не зависит от основного поля, а зависит только от размерности полной линейной группы.

Видимо, Боревич внутренним зрением уловил необычную важность красивого, но частного результата. Он организовал алгебраический семинар по этой тематике, в котором участвовали Е. В. Дыбкова, Р. А. Шмидт и тогдашние аспиранты и студенты: Н. Вавилов, Л. Колотилина, В. Койбаев, С. Крупецкий, Е. Плоткин и другие. Заходил иногда на семинар и А. И. Скопин. Ну а дальше... дальше, наверное, звезды далеких созвездий встали таким образом, что сошлось воедино множество обстоятельств – и в результате родилась наука, определившая судьбы и жизни множества питерских математиков. Что касается научной содержательности, возникшая теория, без всякого сомнения, стала свершившимся фактом современного математического знания.

Главным фактором, обусловившим все это, стала работа в семинаре Н. А. Вавилова. Вот как все это происходило. Зенон Иванович ходил по аудитории и скрупулезно выписывал формулы, задумывался – и снова понемногу что-то писал. Он был всегда очень аккуратен, четок и вдумчив. Н. А. Вавилов все воспринимал на лету. Было такое впечатление, что звук голоса Боревича еще не затих, а Н. Вавилов уже подхватывает мысль. Так продолжалось относительно недолго, и в 77-м инициатива решительно перешла к Н. Вавилову. Он просто парил в аудитории, постоянно подбрасывая в огонь все новые и новые идеи доказательств, а главное – нащупывая пути развития теории. Обоим – Боревичу и Вавилову – необыкновенно повезло друг с другом. Они стали работать вместе – два человека разного возраста, разного характера, разной энергетики, спаянные одной математической темой.

Коля был похож на глубоко интеллигентный математический паровоз, неудержимо набирающий обороты. В какой-то момент он стал настоящим мотором всего дела. Это нормально, такова жизнь...

В 1978-м году Н. А. Вавилов защитил кандидатскую диссертацию. Годом ранее произошло еще одно важнейшее событие его жизни. В 1977 году Коля женился на Ольге Сергеевне Бычковой. Оля стала светочем и опорой всей его жизни, домоправительницей, человеком, который всегда рядом и всегда поймет и поможет. Ольга Вавилова многие годы была преподавателем – доцентом кафедры физики Политехнического института. В 1987 году у них родился сын Саша, ныне топ-менеджер одной из крупных фирм в сфере коммуникаций. Дома все роли были тщательно распределены и заточены на то, чтобы Николай Александрович мог работать и жить так, как ему комфортно.

То, что Н. А. Вавилов был ярким, необыкновенным человеком, становилось ясно после первых пяти минут знакомства с ним. Иногда казалось, что Коля – человек Ренессанса, занесенный на математическую ниву волею обстоятельств. Его взгляды, его тексты всегда несут утерянный теперь свет универсального знания. Математика, история, лингвистика, культурология, десятки цитат на самых немыслимых языках создавали ощущение незримого братства Н. А. Вавилова с Дидро, Ларошфуко, Бюффоном, Вольтером и другими достойными мужами. При этом отношения с живой природой у него были сложные, без особой любви. Другое дело мир Конфуция или Омара Хайяма, в оригинале. Ему ничего не стоило спросить у собеседника цитату из Лао-цзы. “Как, вы не помните Лао-цзы? – удивлялся Коля. – Ну как же, у него в таком-то трактате сказано..., да и у Гете об этом же, но уже на рейнской почве...” Можно было его не проверять, все точно. Хотя можно было и проверить – Коля любил эпатировать, да и просто преувеличивать.

Лингвистика была любовью его детства, она же сохранилась в виде страсти на всю жизнь. Он знал 10–12 языков, говорил свободно на 5–6 из них, понимал вообще неизвестно сколько. Он чувствовал языковые конструкции кончиками пальцев, любил искать индоевропейские или, скажем, семитские корни, проводить параллели между далекими языками. “Как ты учишь языки?” – спросил я его однажды. “Ооо, это очень просто. Берешь словарь на 30 тысяч слов какого-то нового языка и читаешь его два раза, вперед-назад. И все, тысяч 20 слов у тебя уже в запасе. Потом неделю подучить грамматику – да вот, собственно, и все". До сих пор не знаю, придуривался ли он, а если да, то до какой степени. В любом случае, помимо богатого английского он читал лекции на итальянском, польском и немецком языках. Его математические тексты переполнены цитатами и эпиграфами, и, вдумываясь, поражаешься степени точности их соответствия тому или иному математическому феномену. "Я – интеллектуал", – говорил Коля. "Я не интеллигент, я – интеллектуал", – говорил он, и конечно кривил душой. Интеллигентность у него была врожденной, но, вживаясь в какой-нибудь образ, Коля самозабвенно преувеличивал, эпатаж становился неотъемлемой частью образа. Ему ничего не стоило сказать, что классификация конечных простых групп – наиболее значимое событие XX века, или написать, что строение линейных групп изучалось последнюю тысячу лет. "Подумаешь, понятие группы появилось всего 200 лет назад. А изучали их – тысячу!" В полемике Коля был свободен от условностей и временных рамок. Он говорил, что вся российская молодежь пьет только французские вина категории "Гран Крю". В первый мой визит в Париж он сообщил, что там надо есть исключительно котлетки из гиппопотама. Любил самозабвенно ленинградский стеб, в 90-х годах прошлого века цитировал Курехина, а в 10-х годах этого – уже Шнурова, параллельно, скажем, с Камоэнсом или Рильке.

Фактологическая память у него была феноменальная. В частности, Н.А. обладал фантастической математической памятью. Это было что-то немыслимое, чудесное и неповторимое. В 1980-х годах эталоном универсального математического знания в Питере считался Борис Борисович Венков. Мне кажется, что со временем Н. А. Вавилов набрал еще большую мощь. Во всяком случае, в своей профессиональной области он имел в рабочем активе целую энциклопедию знаний. Причем этот "компьютер" никогда не давал сбоя...

Ничто человеческое не было чуждо Николаю Александровичу. Он любил поесть, любил хорошую еду, особенно итальянскую кухню, сам прекрасно готовил. Этот процесс, как и все другие процессы на свете, он знал досконально. Помню, как в первый раз в Париже он самозабвенно рассказывал обо всем, неважно о чем – о пламенеющей готике, об архитектуре Елисейских полей, о девицах на Пляс Пигаль, об особенностях карпаччо и пармской ветчины на французской почве, о различии сыров, вин, колбас и о библиофилах на Сене, конечно.

О вине Коля Вавилов знал почти столько же, сколько о строении групп Шевалле. Знал марки, виноградники, почвы, регионы, регалии. Изучал наклейки со страстью, пил с удовольствием, очень гордился тем, что один из его математических учеников – профессиональный сомелье. Простота общежития давалась Коле с трудом. И с винами так же. Вообще, он любил все хорошее, качественное, марочное – от шампанского в самолете или ресторане до карандашей, одежды или книг факсимильного издания. От спорта он был бесконечно далек. Однако помнится, как в самом начале 80-х в Юрмале, Н.А. увидел традиционную прибалтийскую игру новус, этакий упрощенный вариант бильярда. Коля быстро проиграл десяток партий в новой, незнакомой игре, и, как он выражался, опечалился. В пять утра я вышел из дома. Коля неистово гонял шашки по новусу – и попадал, попадал, попадал. Азартен оказался Парамоша…

Но вернемся к математическому творчеству Н. А. Вавилова.

§2. Алгебраическое творчество

Первым насущным математическим вопросом, который встал перед Н. А. Вавиловым в начале 80-х, был "Quo vadis" – куда идешь? И параллельно – "куда вести", – "Quo ducere", поскольку, как известно, мы в ответе за тех, кого приручили. К этому времени у него уже были ученики, последователи, семинар, намечались первые аспиранты. Неосознанно он стоял у истоков неизвестного, и эта роль накладывала определенный уровень обязательств.

Первое направление исследований напрашивалось само собой: мы фиксируем полную или специальную линейную группу и стараемся уйти как можно дальше от случая поля, сохраняя возможность описания над каким-либо кольцом структуры подгрупп, содержащих что-либо разумное, ну, например, диагональ. Это направление привело к серии статей с последовательно усложнявшимися кольцами: локальные, полулокальные, гауссовы, с условиями стабильности, дедекиндовы кольца арифметического типа и так далее (см., например, [9, 8, 65, 68, 69]) сменяли друг друга. В какой-то момент Н. А. Вавилов понял, что можно над произвольным коммутативным кольцом описать все подгруппы полной линейной группы, содержащие группу клеточно-диагональных матриц с достаточно большими клетками ([10, 11]). Это был момент истины, большую роль в котором сыграли идеи

А. А. Суслина и его работа [63]. Оказалось, что произвольные коммутативные кольца вполне достижимы.

Второе направление исследований было не менее естественным. Если мы можем менять кольцо, то мы можем, конечно, менять и группу. Поэтому возник цикл работ, посвященный классическим группам над разнообразными кольцами. В частности, были рассмотрены симплектическая, ортогональные, спинорная, унитарная и другие им подобные группы (см. [13, 66, 14, 15, 67, 70, 71]). Именно тогда Николай Александрович научился виртуозно работать с соответствующими матрицами, перемножая и складывая в уме веса и корни и преобразуя их в трансвекции.

На всю жизнь классические группы остались для Н. Вавилова полигоном для тестирования идей и оттачивания интуиции. Им посвящено множество глубоких работ. Симплектическую группу $Sp(4, R)$ он считал самым трудным и вообще исключительным случаем среди всех классических групп, а к полной линейной группе обращался не иначе как "Your Majesty" – Ваше Величество.

Все это привело к третьей теме исследований, ставшей для Н. А. Вавилова источником научного вдохновения всей его жизни. Группы Шевалле над кольцами появились в работах Н. А. Вавилова в начале 80-х и очень быстро стали для него миром, в котором будут в течение последующих 40 лет свершаться события, твориться мироздание и устанавливаться связи и законы. Все это теперь называется "структурная теория групп Шевалле над кольцами", а тогда была лишь терра инкогнита – и непонятно было, как к ней подступиться и какие звери в ней водятся.

С 1980-о по 1990-е годы у Н.А.Вавилова шел процесс накопления знаний, обдумывания принципов, задач и методов, подходящих для групп Шевалле над кольцами. Это свелось, в конце концов, к совершенно определенному кругу идей. Мир групп Шевалле вдруг ожил и приобрел форму. Вслед за формой пришло мировоззрение. К 1990-му году Н. А. Вавилов стал крупнейшим в мире специалистом по группам Шевалле над кольцами и был готов к созданию школы. Фактической манифестацией этого статуса явился его обзор "Structure of Chevalley groups over commutative rings", [72], опубликованный в рамках Международного Математического Конгресса в Киото 1990-го года и вышедшие чуть раньше или примерно в это же время работы обзорного характера [70, 73, 98].

Процесс познания происходил постепенно. Вначале Н. А. Вавилов понял, что никакие канонические разложения элементов не работают в случае общих колец. Что же оставалось делать? Первая мысль состояла в том, что для общих колец единственный путь – это работать в подходящих неприводимых представлениях. Но как? Ведь возникают большие, сложно устроенные матрицы. Однажды мы сидели и мучительно перемножали симплектические матрицы. Вдруг он сказал: "Все неверно. Нужно работать так, как предлагают М. Стейн и Х. Мацумото", – и нарисовал первую весовую диаграмму. Препринт статьи Стейна появился в Ленинграде усилиями К. Суле и А. Суслина. Андрей Александрович немедленно передал его Н. А. Вавилову со словами: "Ты же знаешь, я работаю только в специальной линейной группе, ну, максимум в ортогональной". Этот препринт сыграл особую роль в работах Н. А. Вавилова. Стало ясно, что в представлениях работать можно. Нужно лишь правильным образом организовать вычисления и заменить матрицы весовыми диаграммами. Коля тогда сформулировал это так: "А ведь Хариш-Чандра был прав. Все, что можно доказать для SL_n, можно доказать для произвольной группы Шевалле над произвольным кольцом".

Между 1980-м и 1990-м годами Н. А. Вавилов опубликовал более 20 статей, посвященных группам Шевалле. Были исследованы разложения Брюа различных элементов, весовые элементы групп Шевалле, введены сетевые подгруппы, описаны подгруппы, содержащие максимальный расщепимый тор, и так далее. Статья Стейна также дала толчок серии работ Н. А. Вавилова и его учеников, посвященных стабильным вычислениям и стабильности K_1-функтора, описанию некоторых специальных подгрупп, и многим другим. В 1989-м и 1990-м годах Н. А. Вавилов прочел два крайне важных курса лекций о группах Шевалле в университете на Крите и в университете Нотр-Дам в Индиане. Параллельно концептуальные доклады были прочитаны в различных университетах Польши, Италии, Америки, Японии, Англии и, конечно, России. Его имя стало широко известно в мире, и, как только это стало возможным, Н. А. Вавилова с научными визитами посетили Б. Куперстейн, Г. Зейтц, Е. Абе, А. Хан и другие ведущие ученые. Напряжение жизни было невероятным. Давно осталась позади докторская диссертация (1988), и Н.А. полностью сосредоточился на науке. Он успевал запоминать новые результаты в смежных областях алгебры, преломлять их сквозь призму своего понимания предмета и сразу выдавать множество идей.

В своем обзоре [72] он пишет: “Наша главная цель показать, почему и как, а не что именно делать. Мы будем больше концентрироваться на методах доказательства, чем, собственно, на результатах. Все изложение будет заточено на двух проблемах: нормальность элементарной подгруппы и классификация нормальных делителей. Решения этих задач называются основными структурными теоремами”. Вавилов прямо указывает в одном из параграфов, что хочет оторваться от сиюминутных целей и понять глубоко структуру полиномиальных уравнений, определяющих группу. Он цитирует Чанга Чоу (в существовании которого, кстати, я совершенно не уверен – это может быть мистификация): “Взгляд из-за горизонта всегда обостряет зрение, а болото всегда дает ограниченную картину реальности”. Или в присущей ему лингвистической манере: “Wenn der Horizont verschieden ist sind es auch die Gedanken” – “Когда горизонт не тот, то и мысли не те”. Он всегда считал, что суть первична, а результаты придут сами. Вавилов приводит 4 различных доказательства нормальности элементарной подгруппы. Каждое из них имеет свои особенности и в дальнейшем будет им использовано в конкретных обстоятельствах. Этому предшествует чисто вавиловское блестящее рассуждение, которое он приписал “основному даосскому мыслителю Винни Пуху: разные доказательства должны доказывать разные вещи, иначе это было бы одно доказательство!” Жизнь показала, что он был абсолютно прав.

§3. Задачи, результаты, школа

Конечно, обзор Н. Вавилова, сделанный на основе докладов в Киото и Хиросиме, был уникален. На самом деле это было прозрение, взгляд в будущее. Это особенно явственно видно теперь, когда это будущее стало прошлым и настоящим. И дело даже не в сформулированных задачах. Первый список задач Н. А. Вавилов опубликовал еще в конце предыдущего обзора [70]. Дело в гармонии концептуализма и практики. Теперь мы понимаем, что он заложил фундамент дома, который, начиная с некоторого момента, стал строить сам себя. Сейчас это очевидно. А тогда все было совсем не так. Были рабочие будни, удивительная Япония, бесконечная череда знакомств и общение с коллегами. Жизнь. А в результате сложилась предметная философия, которая на поверку оказалась самой практической из практических наук. Итогом размышлений, тем самым “горизонтом”, о котором Вавилов говорит в обзоре, стали следующие принципы.

- Нет существенного различия между классическими группами и исключительными группами, если мы рассматриваем последние в подходящем представлении. Поэтому Н. А. Вавилов последовательно изучает структуру и геометрию минимальных модулей для групп Шевалле. На этом пути выясняется, что ключевым является, как любил говорить А. В. Михалев, следующий сюжет.
- Комбинаторика базисных представлений, в частности микровесовых представлений, и ее визуализация с помощью весовых диаграмм. Как только Н. А. Вавилов разобрал весовую диаграмму для минимального представления группы типа E_6, он понял, что в его руках находится абсолютное оружие. Различие между матричными вычислениями в классических и исключительных группах было нивелировано и стало не проблемой, а задачей. Эта задача потребовала осознания механизма стабильных и элементарных вычислений, то есть вычислений, заменяющих умножение произвольных матриц на операции с элементарными матрицами и контроль действия элементарных матриц на строках и столбцах с помощью визуализации соотношений Стейнберга. Под стабильными вычислениями понимаются вычисления, имеющие дело с одной строкой или столбцом.
- Одновременно Н. А. Вавилов выделил в качестве еще одного основного направления исследований нахождение явных уравнений, независимых от характеристики, задающих исключительные группы Шевалле в минимальных представлениях, а также изучение реализаций исключительных групп как групп изометрий подходящих форм.

Возвращаясь к задачам, в которых применима указанная философия, Вавилов концентрирует внимание на структурной теории. Основными становятся следующие темы:

- Нормальность группы элементарных матриц во всей группе Шевалле над коммутативным кольцом и нильпотентность K_1-функтора;

- Нормальная структура групп Шевалле. В частности, описание подгрупп групп Шевалле, нормализуемых подгруппой элементарных матриц. Описание решетки подгрупп групп Шевалле;
- Стабильность функторов K_1 и K_2, а также центральность функтора K_2.

Решение этих и других сопряженных проблем станет доминантой для Н. А. Вавилова и его учеников на многие годы. Спираль знания будет раскручиваться, будут написаны сотни работ. О чем бы ни писал Николай Александрович, всегда за кадром звучит его научный максимализм и наслаждение процессом познания. У него была привычка возвращаться к основным мотивам с течением времени, все заостряя и углубляя владение предметом. Названия статей этого математического "Болеро" говорят сами за себя: "Разложение трансвекций: тема с вариациями" [60], "Третий взгляд на весовые диаграммы" [74], "Структура групп Шевалле: доказательство из Книги" [16], "Йога коммутаторов" [21], "Йога коммутаторов: дальнейшие применения" [22], "Коммутаторы элементарных подгрупп: все любопытнее и любопытнее" [103], "Вычисления в исключительных группах: пять лет спустя" [38], "Разложение унипотентов для E_6 и E_7 : 25 лет спустя" [77].

Для произвольной группы Шевалле Н. А. Вавилов выделяет 5 методов решения задачи нормальности элементарной подгруппы. Это прямая факторизация по Суслину, метод факторизации и склейки (также Суслин), локализация и склейка Квиллена–Суслина–Васерштейна, метод локализации и пополнения Бака и метод Степанова–Вавилова разложения унипотентов, открытый А. Степановым в 1987 году. Алексей Степанов стал на все годы ведущим учеником и последователем Николая Александровича. Нормальность элементарной группы была доказана А. А. Суслиным для полной линейной группы и В. Копейко для классических групп ([63], [26]). Затем Д. Таддеи доказал этот результат для произвольной группы Шевалле, [64]. Н. Вавилов и Р. Хазрат [25] показали, что при разумных ограничениях на кольцо фактор-группа односвязной группы Шевалле по ее элементарной подгруппе (то есть K_1-функтор) является нильпотентной группой. Позднее, Н. Вавилов вместе с А. Баком и Р. Хазратом [3] доказали, что и в относительном случае K_1-функтор есть расширение нильпотентной группы с помощью абелевой.

Описание подгрупп групп Шевалле, нормализуемых подгруппой элементарных матриц, было получено Абе–Сузуки–Васерштейном с помощью локализационных методов. В серии работ (1976–1995) они доказали стандартность такого описания, в том смысле, что каждая такая подгруппа зажимается между подходящей относительной элементарной подгруппой уровня A, где A – идеал, и соответствующей конгруэнц-подгруппой. Н. А. Вавилов вместе с учениками нашел другие доказательства этого факта (1980–2015), см. [16, 17, 76]. Эти доказательства, отличаясь концептуально, позволяют получить некоторые более тонкие результаты, а также визуализировать ход рассуждений и понять "quo" все это "vadis?". Возможно, это и имел в виду Николай Александрович, когда в работе [16] окрестил полученный результат "доказательством из Книги".

Всю свою научную жизнь Н. А. Вавилов испытывал особый пиетет перед теоремой классификации конечных простых групп. Он следил за "Атласом", за новыми доказательствами, за всем проектом в целом. Постоянно подчеркивал, что наука до сих пор не рождала ничего подобного. Поэтому, когда в 1984 году М. Ашбахер [2] описал максимальные подгруппы конечных классических групп по модулю классификации и ввел классы (Ашбахера) $C_1 ... C_8$, а Г. Зейтц [48] и другие распространили результат на все группы Шевалле над алгебраически замкнутым полем, Н. Вавилов был к этому морально готов. Он сразу понял, что подгруппы Ашбахера при небольшой модификации определений остаются большими для произвольных групп Шевалле над коммутативными кольцами и допускают стандартные описания решеток надгрупп. Так решетка подгрупп групп Шевалле над кольцами приобрела форму. Тема классов Ашбахера стала обьектом многочисленных исследований Н. А. Вавилова и его учеников и предметом нескольких диссертаций ([11, 70, 52, 53, 58, 59, 1, 44, 45, 34, 35, 36, 32, 33, 18, 19]).

Стабильные вычисления появились в арсенале Н. А. Вавилова в 1977-м году и стали мощным универсальным инструментом, который он применял на протяжении всей его научной карьеры. Они явились объединяющим началом самых разных исследований. Все началось со статьи М. Стейна по маломерной K-теории [57]. Н. А. Вавилов довел до блеска идеи, разработанные для стабилизации низших K-функторов. Попутно он развил чрезвычайно важную технику стабильных матричных вычислений в исключительных группах, которая неразрывно связана с техникой треугольных факторизаций типа разложений Брюа или Гаусса и параболических факторизаций типа разложения Денниса–Васерштейна. Последнее генетически связано с инъективной стабилизацией K_1-функтора (см. [102, 4] и ссылки в них). Эта тематика начала 80-х не отпускала Н. А. Вавилова в течение всей его карьеры и возвращалась в самых разных инкарнациях, см., [95, 38]. Она получила новый импульс в совсем недавних работах Н. А. Вавилова, посвящённых ограниченной порождаемости групп Шевалле. Например, нерешенная трудная проблема инъективной стабилизации K_2-функтора для систем корней с кратными связями обсуждалась в связи с ограниченной порождаемостью групп Стейнберга. Другим важным объектом исследований Н. А. Вавилова, родственным стабилизациям низших K-функторов, является метод разложения унипотентов, который вместе с разложением Шевалле–Мацумото позволяет вести индукцию по рангу группы. Наконец, ученики Н. А. Вавилова, Е. Воронецкий, А. Лавренов, С. Синчук, довели до конца решение принципиальной проблемы центральности K_2-функтора над коммутативным кольцом [31, 30, 54, 104].

Одним из ноу-хау Н. А. Вавилова было то, что он называл нумерологией. Идея состоит в следующем. Мы рассматриваем группу Шевалле в каком-то представлении, как правило минимальном или присоединенном. Мы рисуем диаграмму весов. Как, глядя на рисунок, на количество и расположение квадратов, получить полную информацию о квадратичных уравнениях, определяющих орбиту старшего веса, включая знаки, или, что почти то же самое, включая знаки возникающих при действии унипотентов структурных констант? Тема эта, возникшая из одного замечания К. Рингеля на семинаре в Билефельде, получила развитие в работах [47, 46, 74, 78, 79] и других. Мысль была в том, чтобы оторваться от геометрической теории стандартных мономов, и извлечь всю информацию из рисунка. Вспоминает Н. Гельдхаузер: “Николай Александрович активно продвигал идею нумерологии алгебраических групп. Многие теоремы (на лекциях) он так и доказывал: если нумерология сошлась, то все верно. А если мы нумерологию не понимаем, то надо догадаться, почему она такая (причем не формально, а по смыслу), и все станет ясно. Эта идея, известная также специалистам по классификации конечных простых групп, распространилась в Петербургской алгебраической школе благодаря Н.А. и его способности переносить общие принципы из одной области в другую, благодаря широте его взглядов, позволяющей взглянуть на проблему издалека”. В работах В. Петрова, А. Лузгарева, Н. Гельдхаузера, А. Ставровой, И. Певзнера, П. Гвоздевского, А. Смоленского и других последователей Н.А. можно проследить красивые нумерологические мотивы.

Научное наследие Н. А. Вавилова огромно, Николай Александрович является автором более 200 научных трудов. Мы коснулись пока только некоторых направлений его алгебраического творчества. Прежде чем перейти к другим направлениям исследований Н. А. Вавилова, уместно сейчас остановиться на главном его детище – на научной школе.

“Когда б мы знали, из какого сора растет талант, не ведая стыда...” – и в самом деле, из каких клеточек, нюансов, междометий сплетается талант преподавателя и возникает аура сопереживания действию, имя которому – лекция. У Н. Вавилова был природный дар очаровывать слушателей иллюзией понимания, его харизма была позитивна до последней запятой, а шквальный математический оптимизм заряжал у слушателя такие батарейки, о существовании которых он даже и не подозревал. Зачастую Коля не рассказывал факты, не объяснял теоремы – нет, он просто дирижировал аудиторией, всплескивая руками, то поднимаясь вверх, то опускаясь вниз. Он прекрасно и точно распределял материал на доске, он следил за реакцией аудитории, он делал многое профессионально и уверенно. Но главным нюансом все же было умение передавать слушателям свое удовольствие от того, что мы тут, мы все вместе, делаем общее дело, и не в лом, не через силу, а с уверенностью в конечном успехе. Лекции Н. А. Вавилова были пропитаны математическим гедонизмом, и не зря он так любил обсуждать разные проекты за бокалом вина или бельгийского пива. Они прочищают чакры и открывают гармонии, сказал бы Коля, или все дело в “маленьких серых клеточках” – сказал бы Эркюль Пуаро.

Вот не претендующий на полноту список некоторых формальных и неформальных учеников Николая Александровича: Е. Воронецкий, М. Гаврилович, П. Гвоздевский, Н. Гельдхаузер, В. Голубовский, Е. Денисова, В. Казакевич, А. Лавренов, Р. Лубков, А. Лузгарев, М. Митрофанов, В. Нестеров, И. Певзнер, Е. Перельман, В. Петров, Е. Плоткин, А. Семенов, С. Синчук, А. Смоленский, Е. Сопкина, А. Ставрова, А. Степанов, И. Хамдам, А. Щеголев.

На один из юбилеев ученики подарили Николаю Александровичу постер, на котором он изображен в виде наседки, а окружение – птенцы его курятника. За этой нехитрой шуткой кроется очень многое.

Н. А. Вавилов продумывал задачи для тех, кто хотел и мог с ним работать, взвешивал комбинации идей, направлял, помогал, писал совместные статьи, постоянно держал всех на острие последних математических новостей, делился своими идеями, знаниями и мыслями. Он очень гордился успехами своих учеников и вообще математиков питерской школы. Он говорил о них в самых превосходных степенях, не скупясь на эпитеты. “Как, вы не читали последний результат Вити, или Кати, или Насти, или Леши ... это совершенно замечательно, теперь все встало на свои места, это все должны знать, это проливает свет, это связывает, это объясняет...”. Он организовал Интернет-семинары разного уровня, где работал, не покладая рук. Комментировал, ставил вопросы, обсуждал. Это была настоящая “коза ностра” – общее дело, на любимом итальянском. “Carissimi – дорогие”, – обращался он к участникам семинара, и они в самом деле были “дорогими”. Главное же, он сумел спаять всех в единый организм, который слаженно работал под крышей структурной теории групп Шевалле. Конечно же – и слава Богу! – многие давно стали самостоятельными учеными, со своими взглядами, интересами, темами, зачастую достаточно далекими от занятий группами Шевалле. Другие остались в лоне изначальных научных предпочтений, третьи покинули активную алгебру. Но отношение к Н.А. как учителю осталось навсегда. Поэтому начиная с конца 90-х и начала 2000-х, говоря о результатах и теоремах, можно смело относить их к достижениям школы Вавилова.

Возвращаясь к результатам, следует отметить несколько других тем, лежавших в русле интересов Н. А. Вавилова и с различных сторон близких вышеперечисленным. В начале 90-х годов Н. А. Вавилов вместе с Лино Ди Мартино получил ряд интересных результатов по (2,3)-порождаемости классических групп [12]. Теплые, дружеские отношения с Лино сохранились впоследствии на всю жизнь. Они перезванивались, много говорили по-итальянски, причем зачастую темы были не обязательно математическими, просто обсуждали различные новости. С Ди Мартино были также начаты работы по геометрии корневых подгрупп и торов, продолженные позднее с В. Нестеровым и И. Певзнером [39, 40, 97, 80, 81]. К этому направлению примыкает цикл работ (совместно с А. Семеновым) по весовым элементам и полупростым корневым элементами ([99, 100, 101]) и мелким клеткам

Брюа (с М. Митрофановым) [96].Наконец, комбинаторика систем корней и групп Вейля, замкнутые множества корней изучались совместно с А. Харебовым и Н. Харчевым [20, 94].

Коммутационные формулы и связанные с ними вопросы порождаемости абсолютных и относительных подгрупп были одним из лейтмотивов математического творчества Николая Александровича. Он возвращался к этому сюжету постоянно, и не зря коммутационные соотношения и классы сопряженности возникали под разным соусом на протяжении как минимум двадцати последних лет. Н.А. со свойственным ему темпераментом окрестил весь проект "Йогой коммутаторов". Статья под таким названием вышла в свет в 2011 году (совместно с Рузби Хазратом, А. Степановым и Жанг Дзухонгом) [21]. Затем в содружестве с этим же коллективом соавторов Н.А. опубликовал порядка 20-25 работ, связанных с "йожеством". Последняя в соавторстве с Жанг Дзухонгом появилась в 2023 году [103]. Она называлась так же, как и первая, с одной добавкой – "все любопытнее и любопытнее...". К сожалению, эта песня осталась неоконченной. По сути, в проекте речь идет о наборе сложных коммутационных формул, обобщающих классические коммутационные формулы и дающих универсальный подход для доказательства различных структурных теорем – как описанных выше, так и новых. В частности, они позволили А. Степанову и Н. Вавилову доказать ряд результатов о конечности ширины коммутаторов в элементарных образующих для групп над коммутативными кольцами [61, 23, 62]. Основными средствами, используемыми для доказательств формул из "йоги", являются два типа локализации: "localization and patching" Квиллена–Суслина и "localization-completion" А. Бака, которые, в отличие от разложения унипотентов, позволяют вести редукцию по размерности основного кольца.

Сотрудничество с Тони Баком стало вехой в биографии Н. А. Вавилова, см., [24]. Знакомство произошло в 1990 году во время Конгресса в Киото. Тони делал большой доклад, тема была как-то связана с нильпотентностью K_1-функтора. После доклада неожиданно завязался очень оживленный и заинтересованный разговор о K-теории вообще и K_1-функторе в частности. Потом пошли выпивать, но ничего не нашли, и разговор продолжился. Тони был несколько удивлен и откровенно обрадован живостью реакции. Так все и началось.

Помимо чисто научных результатов, связанных со структурными теоремами для унитарных групп Бака, с алгебраической теорией квадратичных форм, с фундаментальными идеалами групповых колец, это сотрудничество оказалось чрезвычайно важным для многих студентов Санкт-Петербургского университета, которые побывали в Билефельде и получили возможность участвовать в многочисленных конференциях и научных школах. Н. А. Вавилов мыслил это содружество масштабно. Выиграв приз Гумбольдта, Н.А. провел в Билефельде несколько лет, наполненных научными контактами и плотной работой. Фактически, Билефельд через программу SFB 343 стал вторым домом для многих российских математиков, это был своеобразный катализатор международного сотрудничества на немецкой почве. Укрепив свое реноме, Н.А. в сотрудничестве с Баком сумел продвинуть двустороннее соглашение между университетами Билефельда и Санкт-Петербурга. В результате всей этой работы талантливые питерские студенты появились в Билефельде, а некоторые защитили там свои диссертации.

Кроме групп Шевалле, Н. А. Вавилова интересовали все их близкие родственники, такие как группа Стейнберга, унитарная группа Бака, изотропные редуктивные группы. Последним была посвящена диссертация А. Ставровой (2009). Фактически В. Петров и А. Ставрова инициировали активное исследование изотропных, но не обязательно расщепимых редуктивных групп. Они вместе с А. Степановым и А. Лузгаревым показали, что и как можно переносить с расщепимых групп на изотропные редуктивные группы [82, 49, 50, 43, 51, 37]. Можно сказать что возникшая теория сочетает в себе структурную теорию групп Шевалле над кольцами и глубокую теорию алгебраических групп по Борелю–Титсу и Гротендику–Демазюру. В частности, был определен аналог элементарной подгруппы и доказана ее нормальность во всей редуктивной группе. Возникла теория относительных корней, а с нею и коммутационные формулы. Построенная теория привела к красивому результату стандартности нормального строения редуктивных групп над коммутативными кольцами изотропного ранга не меньше 2 при условии обратимости структурных констант. Еще более важным является то, что эта теория имеет яркие перспективы дальнейшего развития. Отметим, что в качестве побочного продукта этой активности было получено ключевое продвижение в проблеме Серра–Гротендика для изотропных групп (совм. с И. Паниным и А. Ставровой) [41].

Н. А. Вавилов широко интересовался [5] свойствами введенной А. Баком унитарной группы. Последняя стала предметом исследований В. Петрова, который обобщил определение и установил основные структурные свойства [42]. Впоследствии эти исследования продолжил и обобщил Е. Воронецкий [105]. Все время продолжается взаимодействие учеников Н. А. Вавилова с учениками А. Бака Р. Хазратом, Г. Тангом, Р. Пройсером и другими.

В последние годы Николай Александрович (совместно с Б. Кунявским и Е. Плоткиным) уделял большое внимание проблеме ограниченной порождаемости групп Шевалле, Каца-Муди и Стейнберга [28, 27, 29]. Он чувствовал, что для этой тематики, тесно связанной с конгруэнц-проблемой, теорией представлений и с теорией моделей, пришло время. Восходящие к знаменитой работе Басса–Милнора–Серра [6] идеи заработали в полной мере, и немедленно возник новый этап понимания. Фантастические вычисления Н. А. Вавилова с группой типа C_2 и работы А. Троста позволили заполнить последние лакуны для функционального случая глобального поля, и вся картина мира сошлась воедино. Было показано, что группы Шевалле над Дедекиндовыми кольцами арифметического типа допускают равномерно ограниченную порождаемость с константой, зависящей только от системы корней [29].

Суммируя, в рамках школы Н. А. Вавилова были решены многие принципиальные проблемы и созданы новые направления в математике. В частности, были получены различные доказательства нормальности элементарной подгруппы и нормального строения для групп Шевалле, унитарных и изотропных редуктивных групп, классифицированы промежуточные подгруппы различных классов Ашбахера, получены коммутационные формулы для конгруэнц-подгрупп, доказана нильпотентность и гомотопическая инвариантность нестабильных K_1-функторов, центральность нестабильных K_2-функторов, показана ограниченная порождаемость групп Шевалле над дедекиндовыми областями, и так далее.

§4. Философия математики

Николай Александрович никоим образом не был философом от математики – он был мыслителем от Бога! В этой пафосной фразе кроется осознание того, что и как он говорил, под каким углом думал и особенно – сколько он знал. Расхожий образ мускулистого роденовского героя мало ему подходит. Скорее следует изобразить его перед компьютером, в окружении книг, бумаг, с бокалом вина в одной руке, с фолиантом в другой и с ручкой в третьей. Квинтэссенция его подхода к философским проблемам математики изложена в фундаментальной работе 2019-го года "Reshaping the metaphor of proof" [83]. Фактически это настоящий водопад имен, фактов и идей. Окунувшись в него раз, стоит повторить это со временем, потом снова перечитать весь текст, и так несколько раз, пока вся эта масса информации не уляжется в голове на подходящие полочки. Да, надо бы еще заказать эти полочки, знать бы только где... Эссе посвящено сложным проблемам, связанным с понятием математического доказательства. Прежде всего, перед читателем проходит захватывающий экскурс в историю математики, где имена Даламбера, Гаусса, Коши, Римана, Абеля, Гильберта и многих других приобретают плоть, и только диву даешься, как можно все эти исторические факты и образы держать в активе. Затем на примере математических доказательств анализируется понятие знания. Здесь присущее Н. А. Вавилову стремление к парадоксальности проявляется во всем блеске. Н.А. не упускает ни одной возможности увидеть и заострить дуализм понятий, неполноту знаний, несовершенство формальных теорий, нечеткость выводов и все остальное, что присуще познанию. У него всегда в запасе примеры и контрпримеры, и контр-контрпримеры, и под любое утверждение находится цитата из Конфуция. Объём используемой информации растет экспоненциально, и вот уже различные достижения и ошибки современности дают новый набор аргументов. Поскольку человек – это стиль, хочется процитировать один из абзацев статьи: "Пафос, этос, дух и ценности математических исследований мало изменились за последние 2500 лет. Чисто интеллектуально Архимед, Ферма, Лейбниц, Эйлер, Лагранж, Дирихле, Якоби, Гамильтон и Риман все же ближе к нам, чем большинство наших современников". И далее: "Более легкомысленно мой покойный друг Олег Ижболдин уточнял: "Кто доказал, что и кому?" По сути, в то время это можно было перевести, например, как "Воеводский доказал Суслину гипотезу Милнора". Цитируя Ю. Манина, Н. Вавилов пишет: "Хорошее доказательство – это то, что делает нас мудрее". При этом он, как всегда, лукавит – кому хорошее, для кого хорошее, и что такое "хорошее" вообще. Затем он приводит рассуждения Воеводского, связанные с K-теорией, предваряя их фирменным вавиловским позитивным максимализмом: "Это абсолютно ошеломляющий человеческий документ, огромной интеллектуальной честности и, возможно, он имеет примерно такое же историческое значение, как и знаменитое письмо Ферма к Декарту, или как последнее письмо Галуа. Абсолютно необходимо прочитать всем, кто хочет понять, что такое творческая математика". Рассуждая об эстетике математических доказательств, Н.А. уходит в уютный и родной мир Возрождения. Он очень хорошо знал историю искусства и чувствовал деликатные художественные аналогии так же естественно, как обычный человек ест, скажем, мороженое в жаркую погоду. Большие теоремы у него ассоциируются с фресками кватроченто, с работами Пьеро делла Франческа, Беноццо Гоццоли, Филиппо Липпи. Ну а для коротких доказательств возникают видения Рогира ван дер Вейдена, Роберта Кампена или Ганса Мемлинга. "Каждый пишет, как он дышит..." – учил Окуджава. Так вот, Николай Александрович дышал именно так! Он сам говорит об этом: "Математика мало чем отличается от других возвышенных проявлений свободного творчества, таких как Язык, Живопись, Музыка. Единственная причина, по которой я сам стал профессиональным математиком, заключалась в том, что для меня, как и для всякого знающего человека, математические конструкции и концепции обладают высочайшей интеллектуальной и эмоциональной привлекательностью".

Из этого гуманитарного кредо в статье [83] делаются чисто научные выводы. Вначале Н.А. формулирует несколько (считающихся общепринятыми) постулатов о структуре математического доказательства. Вот, упрощая, примеры некоторых из них:

- доказательство – это формальный текст, в котором по строго определенным правилам результат выводится из набора аксиом и ранее полученных результатов;
- иногда очень трудно предъявить доказательство, но его проверка – это чисто технический процесс (в частности, доступный компьютеру);
- существуют общепринятые во всех областях математики критерии строгости доказательства;
- все утверждения, формулируемые в учебных курсах достаточно продвинутого уровня, приводятся с полными и четкими доказательствами.

Приводя очень убедительные примеры и аргументы, Н.А. опровергает основную часть сформулированных выше тезисов. Согласно его концепции, доказательство более или менее содержательного математического утверждения – это не формальный вывод результата из аксиом и предшествующих теорем, а скорее "дорожная карта", пользуясь которой (и прикладывая при этом иногда не менее усилий, чем приложил автор доказательства для его создания), математик-профессионал может убедиться в верности доказываемого результата.

Именно на этом этапе проверки нового знания и требуется разумное сочетание логики и интуиции, взаимодействующих на базе фундаментальной математической подготовки.

§5. Вавилов – историк математики

В 2020–2022 гг. Н. А. Вавилов опубликовал серию статей [84]–[89], объединенных слегка засушенным заголовком "Компьютер как новая реальность математики". Сам автор несколько ограничивает значение этих текстов (или, по крайней мере, их части), говоря, что "они имеют не научный и не исторический, а именно методический и методологический характер" [85]. На самом деле, статьи [84]–[89] – серьезное, уникальное по глубине историческое исследование некоторых классических задач теории чисел, написанное первоклассным математиком. В них обсуждаются проблема Варинга в различных постановках, проблема Гольдбаха, задачи, связанные с поведением чисел Мерсенна и Ферма и их аналогов. Приведено огромное количество указаний на результаты, полученных в этой области как профессиональными математиками, так и любителями (среди которых школьные учителя, сельские священники и даже генералы).

Большое внимание уделено постановкам классических задач; как показывает Н.А., в большинстве исторических обзоров и книг эти постановки отражены неточно. Точные постановки подтверждаются буквально чтением самих оригиналов "под увеличительным стеклом". Вот что Н.А. пишет в [87] на стр. 10 о маргиналии Гольдбаха в письме к Эйлеру, в которой сформулирована его гипотеза: "В более крупном разрешении хорошо видно, что слова "die grosser ist als 1" дописаны вообще без пробелов под строкой, потом 1 там заменена на 2, а потом снова на 1". Ну, вот так, по-простому, каждый может с утра поднять переписку Гольдбаха и Эйлера и проверить особенности почерка на немецком. К счастью, это делает за нас Н. Вавилов, и уж ему можно верить, подавляя внутри чувство изумления: к хорошему привыкаешь быстро.

В соответствии с названием цикла, Н.А. детально прослеживает фантастический прогресс в теории чисел, связанный с использованием современных компьютеров. Например, в статье [87] обстоятельно проанализировано полное решение нечетной проблемы Гольдбаха (каждое нечетное натуральное число $n > 5$ можно представить как сумму трех натуральных простых) Х. Хельфготтом, опубликованное в 2013–2014 гг. и соединившее достижения, основанные на классических подходах, с существенным использованием компьютеров.

Значительная часть материала посвящена методам теории чисел; так, автор приводит большое количество полиномиальных тождеств, использованных различными математиками, начиная с Эйлера и Лиувилля. Кроме того, Н.А. включил в тексты много задач, которые читатель может решать, используя компьютер.

Наконец, он в деталях обсуждает идеи и подходы, позволившие превратить современную теорию чисел в важнейший раздел математики.

Статьи написаны человеком замечательной образованности (и, конечно, рассчитаны на очень образованного и вдумчивого читателя); вполне возможно, что аналогия между Н. А. Вавиловым и мускулистым мыслителем Родена все же уместна – просто мускулы его интеллектуальные. Тексты включают цитаты (данные без перевода на русский язык) на латыни, английском, немецком, французском языках, на той своеобразной смеси немецкого и латыни, на которой переписывались Эйлер и Гольдбах, в них встречаются отрывки на итальянском, польском, греческом...

Для Н.А. прогресс математики был неотъемлемой частью развития всей культуры человечества, поэтому у него совершенно естественными выглядят упоминания Блаженного Августина и Леонардо да Винчи, О. Шпенглера, братьев Гримм, О. Уайльда, Л. Кэрролла и Л. Борхеса, И. С. Баха, Г. Генделя, Д. Скарлатти, Л. Джустини, Ж-Ф. Рамо, Марко Поло (и, конечно, художника Васи Ложкина).

К 300-летию Санкт-Петербургского университета журнал "Вестник СПбГУ" начал публиковать серию исторических обзоров о достижениях петербургских и ленинградских математиков, связанных с университетом. Для этой серии Н. А. Вавилов начал писать цикл статей, посвященных вкладу петербургских математиков в теорию линейных, классических и алгебраических групп. Вышли две статьи [90, 91] из задуманного цикла из четырех статей; к сожалению, мы никогда не узнаем, что было в продолжении...

§6. Н. А. Вавилов: преподавание и прикладные исследования

В юности Николай Александрович написал повесть. По несчастью или счастью, текст ее утерян и беллетристика не стала его профессией. Тем не менее, писал он свои работы замечательно, перо было лёгким и быстрым, а текст светлым и гармоничным. Он пользовался щедрым языком, не боялся многословия или дополнительных красок, не скупился на объяснения, не стремился к лаконичности, но, тем не менее, достигал зачастую необыкновенной четкости формулировок. Стиль его с годами все оттачивался, и некоторые обороты сами выпрыгивали на бумагу, помогая сосредоточиться на том главном, что было в данном конкретном тексте. Сейчас особенно больно, что так и не появилась задуманная Н. А. Вавиловым и во многом написанная монография "Теория групп Шевалле". С его энциклопедическими знаниями и литературным мастерством она бы наверняка встала в ряд с классическими трудами Стейнберга, Картера, Спрингера. Просто не сложилось. Но хорошо, что существует его серия учебников для младших курсов университета, излагающих современную алгебру в оригинальной и красочной манере: "Не совсем наивная теория множеств", "Не совсем наивная линейная алгебра", "Конкретная теория групп". Работоспособность Николая Александровича поражала: под настроение он мог за несколько дней написать полноценную статью страниц на тридцать, да еще на великолепном английском – именно так родилась "The Skies are Falling: Mathematics for Non-Mathematicians" [92]. Наработки по курсу "Математика и компьютер", лишь часть которых удалось "уложить" в сжатый формат книги "Mathematica для нематематика" [93], по оценкам самого Вавилова насчитывали более тысячи страниц!

Ясность изложения была для Н.А. не только математическим, но и этическим критерием верности и значимости результатов. Вспоминает А. Степанов: "После того, как мы с Сашей Сивацким доказали ограниченность длин коммутаторов $[a, b]$, где $a \in GL_n(R)$, а $b \in E_n(R)$ [55], Коля решил перенести этот результат на все группы Шевалле вместо полной линейной группы. Однако у нас с Сивацким наряду с локализацией был использован метод разложения трансвекций, который доступен не для всех групп Шевалле. Ну, раз нельзя разложением трансвекций, будем делать двойную локализацию, решили мы. После нескольких обсуждений я написал текст. Коля вернул его мне сильно разочарованный. Он сказал, что так писать нельзя, что это все равно, что нет результата, потому что даже если формально все верно, то вообще непонятно почему. На этом мы разошлись – Коля считал точную оценку для нульмерных колец, а я пытался упростить доказательство. Через пару лет(!) мы вернулись к моему тексту, который я к тому моменту не смог улучшить, но смог рассказать Коле идеи без технических подробностей. Он по-прежнему был неудовлетворен, и мы отложили написание статьи еще на пару лет. Наконец я смог написать идеи, которые рассказывал ему. Он сказал: “Да, теперь я понимаю, что проще не сделать”, переписал весь мой текст, вставив в него свой кусок, и статья была готова. После этого Коля написал еще несколько текстов, доведя технику двойной локализации до совершенства и объяснив всем читателям, как это работает и при решении каких задач это можно применять”.

К математике он относился как к “...высшему проявлению человеческого духа и культуры, ценному независимо от каких-либо приложений”. Именно этим он объяснял совершенно особую роль математического образования в функционировании общества, выделяя три принципиально разных уровня: доуниверситетский; математика для математиков; математика для нематематиков. Николай Александрович считал, что “...самый важный аспект преподавания математики на элементарном уровне – выработка интеллектуальной честности, т.е. способности отличать то, что ты понимаешь, от того, чего ты не понимаешь; то, что имеет точный смысл, от того, что не имеет; то, что сказано, от того, что имеется в виду; возможное от невозможного; истинное от ложного; доказанное от предполагаемого”. Второй столь же важный аспект – физкультура мозга, подготовка к умению решать любые трудные задачи. На университетском уровне на первый план выходят другие цели – в первую очередь, развитие математического способа мышления, т.е. способности начинать с первых принципов, рассматривать самый простой случай, использовать аналогии и метафоры, обобщать и специализировать и так далее. Ну и, конечно, развитие собственно математического понимания и тренировка основных способов рассуждений.

Профессор Н. А. Вавилов является автором уникальной концепции обучения математике нематематиков на университетском уровне с использованием систем символьных вычислений и компьютерной алгебры. Николай Александрович считал, что “преподавание математики должно интриговать, увлекать и очаровывать” и предлагал учить математике по-новому – перепоручить основную часть рутинных вычислений системам компьютерной алгебры и целиком сфокусироваться на идейной стороне математики, делая акцент на основные, самые важные, полезные, интригующие и увлекательные пласты математики – понятия, идеи, аналогии, конструкции и метафоры. Он настаивал, что нематематиков нужно “учить математике так, как мы, математики, ее понимаем, т.е. в первую очередь – ПОНИМАНИЮ” [92].

С 2005-го года на экономическом факультете СПбГУ Н.А. Вавилов начал читать авторский курс “Математика и компьютеры”. Курс концентрировался на основных математических идеях, а не на специфических приложениях. Вот как сам Николай Александрович описывал эту работу: “Вначале мы излагали какие-то новые математические понятия и идеи, а также формулировали несколько ключевых утверждений, иногда с набросками доказательств. Полностью доказательства излагались только в тех случаях, когда они были особенно короткими и наглядными или содержали мощные общие соображения, полезные во многих ситуациях. Потом переходили к алгоритмам и компьютерным демонстрациям, вычислениям, графике и т.д... При активном участии и интересе со стороны студентов нам удалось покрыть за то же время гораздо больше математики, более разнообразной математики, более интересной и, в конечном счете, более полезной математики с гораздо лучшими результатами, чем это было бы возможно при более традиционном подходе” [93].

Студентам подход Н. А. Вавилова весьма импонировал, и даже по прошествии лет они с воодушевлением вспоминают занятия по курсу. Один из них пишет: “Математика и компьютеры” – одна из дисциплин обучения на специальности “Прикладная информатика в экономике” в СПбГУ, и соответствующая ей книга оставили приятное послевкусие, поскольку концепции и алгоритмы, описанные в книге, максимально актуальны при решении любых задач, где требуется математика, а в работе аналитика или профессионала в области данных математика необходима повсеместно", другой добавляет: "Mathematica для нематематика" – это единственная университетская книга, к которой я периодически возвращаюсь даже спустя десять лет после выпуска.

Что касается собственно математического преподавания, то здесь Н.А. прочитал огромное количество различных курсов. Приведем только некоторые из них: "Алгебраическая геометрия", "Алгебры и группы Ли", "Алгебраические группы", "Алгебры Хопфа и теория Галуа", "Алгебры и группы Каца-Муди", "Теория категорий", "Центральные простые алгебры", "Компьютерная алгебра", "Некоммутативные кольца", "Теория представлений конечных групп", "Конечные группы типа Ли", "Модулярные представления конечных групп", "Разложение унипотентов", "Исключительные объекты алгебры и геометрии", "Алгебры Картановского типа", "Проблема якобиана" ... Этот список может быть продолжен, так как легче найти область алгебры, которую он не читал, чем создать полный список прочитанных курсов. Не вдаваясь в детали его преподавания, следует сказать одно: он был МАСТЕР. Он умел не только дать материал, он мог найти тех избранных, у которых возникало чувство предмета. Потом они писали у него дипломы, защищали диссертации, становились учеными – но все начиналось именно с его алгебраических студенческих курсов.

Начиналось, но не заканчивалось. У каждого ученого, за именем которого стоит его школа, есть свои секреты работы. Так, Н. Бор говорил, что секрет его успеха в том, что "он никогда не боялся говорить ученикам о себе, что он дурак". Л. Ландау, напротив, "никогда не боялся говорить ученикам, что они дураки". Фирменным ноу-хау Н. А. Вавилова было умение сказать "Мы". Мы можем, мы докажем, мы наверняка получим лучшую оценку, мы напишем эту теорему для всех групп Шевалле и так далее. При этом, как правило, наполовину именно так и было. Но только *наполовину*! А секрет состоял в том, что он-то говорил – *всегда.* Никаких половин. А потом что-то выяснялось специфическое, но это уже было не так важно. Он чувствовал, что, когда и кому надо сказать. Ученик Вавилова В. Нестеров пишет: "Одной из особенностей Н.А. во время обсуждений было создание сильной мотивации к решению поставленной задачи. Он увлекал задачей, показывал её перспективы, часто обозначая сверхзадачи, которые можно будет решить в дальнейшем. Прекрасно зная историю математики, Н.А. приводил многие любопытные и вдохновляющие примеры". А вот уже наблюдения А. Лузгарева: “Он выкладывал необыкновенное количество информации, затрагивал совершенно разные области математики. Кажется, он начал с определения группы, а где-то на втором занятии уже появились алгебры Ли. Мы, наверное, понимали лишь малую долю, но чувствовали его эрудицию и широчайший охват материала; и, думаю, именно благодаря ему я впервые начал осознавать единство математики. Позднее я понял, что это была важная часть его метода. Помню, как он говорил: “Некоторые считают, что нужно говорить только то, что человек может понять, теми словами, которые он уже знает. По этой логике с младенцем вообще не стоить разговаривать”. И далее: “По словам Николая Александровича, обучение математике, как и обучение иностранным языкам, должно происходить путем “погружения в среду”. Он говорил: “Вот вы слушаете, и какие-то слова, понятия повторяются много раз и откладываются в подсознании; и через некоторое время вы уже не боитесь их, а еще через какое-то время внезапно начинаете все понимать”.

Н.А. очень любил работать вне аудиторий. На прогулке, в кафе, за дружеской беседой. Его бесконечно куда-то заносило, он мог часами говорить о любимых темах, и все, кто с ним работал, прекрасно это знали. Но когда иссякал запас смеси культурологии и кулинарии, наступал час математики, и вся остальная прелюдия к этому начинала казаться уместной. Вот что пишет А. Лузгарев: “Мы с ним вместе ходили от Камской улицы до Василеостровской станции метро и потом ехали на метро. Это происходило 1–2 раза в неделю в течение нескольких месяцев. Во время пути он постоянно что-то рассказывал: что-то из математики, из истории, какие-то детали его встреч с зарубежными математиками. Я совершенно не знал, что говорить, это был практически монолог. Сейчас я не помню никаких подробностей, но эти прогулки оказали на меня огромное влияние!”

Придет время, и будут собраны многочисленные воспоминания о Н.А. его друзей, коллег и учеников. Приведем же здесь отрывок из очень ярких воспоминаний ученика Н. А. Вавилова Виктора Петрова. Они также посвящены особому стилю преподавания математики, которым Н. А. Вавилов владел виртуозно. “Занятия велись в совершенно неподражаемом стиле. Практика по алгебре, конечно, подразумевает решение вычислительных задач, но на это отводилась, может быть, одна десятая времени, а главным образом Николай Александрович нас просвещал в широком смысле слова. Причем не только по математике, но и по лингвистике (настоящее количество падежей в русском языке, индоевропейский язык, ностратическая теория, структура китайских иероглифов...), и по философии (любимым произведением Николая Александровича был трактат “Чжуан-цзы”, а любимой цитатой оттуда – “Белая лошадь – не лошадь, абелева группа – не группа”). Структура изложения больше всего напоминала “Сад расходящихся тропок” Борхеса: упомянув какое-то понятие, отвечая на вопрос, Николай Александрович сразу начинал говорить на новую тему. Например, возникло определение максимального идеала – и тут же возникнет теорема Стоуна о булевых алгебрах, ультрафильтры, гипервещественные числа, теория моделей... Изложение было эмоциональное, Николай Александрович жестикулировал, использовал интонацию, тавтологические фразы для эмфазиса (“Именно ровно так”). Видно было, что его переполняют знания и впечатления, которыми он хотел поделиться, поскольку “от избытка сердца глаголют уста”.

§7. О человеке и о времени

Николай Александрович любил жизнь во всех ее проявлениях. Страстный путешественник, он объездил множество стран с научными визитами. Посетил Японию, Индию, Китай, Иран, Турцию, Таиланд, Камбоджу, почти все европейские станы, Израиль, Канаду, Америку. Любитель комфорта, он, тем не менее, был в походах на Волге, Соловках, Северо-Западе России.

Он высоко ценил дружеское и научное общение. После поездки на Крит он говорил “мой друг Деризиотис”, а после визита в Израиль – “мой астральный двойник Анер Шалев”. Он был желанным гостем в Японии, его связывали близкие отношения с многими итальянскими математиками, в Перудже он регулярно читал курсы лекций, Билефельд, и, конечно, персонально Тони Бак сыграли важную роль в его жизни, в Англии написаны несколько принципиальных работ. Это было незакрывающееся в то время окно в Европу. Одновременно с начала 80-х близкие дружественно-рабочие отношения сложились у Н.А. с многими минскими, новосибирскими, московскими и киевскими математиками.

Но душа Н.А., конечно, принадлежала Петербургу. Он отдал Университету и Лаборатории имени Чебышева всю свою научную жизнь. У него всегда была активная до непримиримости социальная позиция.

Будущее петербургской математики, пути и направления развития математической жизни и образования в университете затрагивали самую суть его натуры. Дитя матмеха, он стоял у колыбели становления Лаборатории имени Чебышева, много занимаясь запуском программы бакалавриата при лаборатории: учебные планы, рабочие программы алгебраических дисциплин и т.п. С появлением в 2019-м году нового факультета Математики и Компьютерных Наук (МКН) Н.А. перешел туда на работу. Васильевский остров, его дворы, переходы, кафе и рестораны были средой его обитания. Он с гордостью показывал мемориальную доску, посвящённую Георгу Кантору, беседовал со знакомыми официантками в итальянском кафе, мечтал о международном математическом конгрессе в Петербурге.

Часть жизни Н.А. прошла на Петроградской стороне, совсем недалеко от Вяземского садика, где сейчас находится Международный математический институт имени Эйлера. Другая – на углу Садовой и Гороховой, где были исхожены все пути-тропинки до ПОМИ, где открывались двери знакомых магазинов и булочных, где неторопливо текла Фонтанка и вся жизнь. В последнее время центр бытия Н.А. сместился на дачу, в Токсово. Здесь, конечно, правила Ольга Сергеевна, здесь воспитывался внук Ярик и здесь, в доме посреди большого сада, были созданы многие принципиальные работы, написано огромное количество статей.

Благословенна память о Николае Александровиче. Жизнь, прошедшая рядом, встает перед глазами гигантским облаком. Мы топчем суету будней, не задумываясь о счастье быть рядом друг с другом, снять трубку или включить камеру и сказать: “Привет... Как дела?” Теперь пришло время говорить незримо, каждой клеточкой ощущая зияющую пустоту, пришедшую в этот мир.

Благословенна память о тебе, Коля. Ты создал так много, что изменил судьбы соприкоснувшихся с тобой людей; ты создал науку, которая уже никогда не уйдет, оставаясь частью природы, переплетенной со временем; ты создал свет, который, как верится, пройдет через поколения.

Список литературы

1. A. Ananievskii, N. Vavilov, S. Sinchuk. *Overgroups of* $E(l,R)\otimes E(m,R)$. — J. Math. Sci. **161**, No. 4 (2009), 461–473.
2. M. Aschbacher M. *On the maximal subgroups of the finite classical groups.* — Invent. Math. **76**, No. 3 (1984), 469–514.

3. A. Bak, R. Hazrat, N.A. Vavilov, *Localization-completion strikes again: relative K1 is nilpotent by abelian.* — J. Pure Appl. Algebra **213** (2009), 1075–1085.
4. A. Bak, V. Petrov, Guoping Tang, *Stability for quadratic K_1.* — K-Theory **30:1** (2003), 1–11.
5. A. Bak, N.A. Vavilov, *Structure of hyperbolic unitary groups. I. Elementary subgroups.* — Algebra Colloquium **7**, No. 2 (2000), 159–196.
6. H. Bass, J. Milnor, J-P. Serre, *Solution of the congruence subgroup problem for SL_n $(n \geq 3)$ and Sp_{2n} $(n \geq 2)$.* — Publ. Math. IHES **33** (1967), 59–137.
7. Z. I. Borewicz, *A description of the subgroups of the general linear group containing the group of diagonal matrices.* — J. Sov. Math. **17**, No. 2 (1981), 1718–1730.
8. Z. I. Borewicz, W. Narkiewicz, N. A. Vavilov, *On subgroups of the general linear group over a Dedekind ring.* — J. Sov. Math. **19**, No. 1 (1982), 982–987.
9. Z. I. Borewicz, N. A. Vavilov, *Subgroups of the general linear group over a semilocal ring containing the group of diagonal matrices.* — Proc. Steklov Inst. Math. No. 4 (1980), 41–54.
10. Z. I. Borewicz, N. A. Vavilov, *On the subgroups of the general linear group over a commutative ring.* — Soviet Math. Dokl. **26**, No. 3 (1982), 679–681.
11. Z. I. Borewicz, N. A. Vavilov, *The distribution of subgroups in the general linear group over a commutative ring.* — Proc. Steklov. Inst. Math. **165**, No. 3 (1985), 27–46.
12. L. Di Martino, N.A. Vavilov, *(2; 3)-generation of $SL(n;q)$. I. Cases $n = 5; 6; 7$,* Commun. Algebra, (1994), p.1321–1347.
13. E. V. Dybkova, N. A. Vavilov, *Subgroups of the general symplectic group, containing the group of diagonal matrices.* — J. Sov. Math. **24** (1984), 406–416.
14. E. V. Dybkova, N. A. Vavilov, *Subgroups of the general symplectic group containing the group of diagonal matrices.* — Zap. Nauchn. Semin. LOMI **103** (1980), 31–47, 155–156.
15. E. V. Dybkova, N. A. Vavilov, *Subgroups of the general symplectic group containing the group of diagonal matrices*, II. — Zap. Nauchn. Semin. LOMI **132** (1983), 44–56.
16. M. Gavrilovich, S. I. Nikolenko, N. A. Vavilov, *Structure of Chevalley groups: the proof from the Book.* — J. Math. Sci. **140**, No. 5 (2007), 626–645.
17. M. Gavrilovich, N. A. Vavilov, *An A_2-proof of the structure theorems for Chevalley groups of types E_6 and E_7.* — St. Petersburg Math. J. **16**, No. 4 (2005), 649–672.
18. P. Gvozdevsky, *Overgroups of subsysten subgroups*, Ph.D. thesis / SPbU. (2023).
19. P. Gvozdevsky, *Overgroups of subsystem subgroups in exceptional groups: nonideal levels.* — St. Petersburg Math. J. **33**, No. 6 (2022), 897–925.
20. A. L. Harebov, N. A. Vavilov, *On the lattice of subgroups of Chevalley group containing a split maximal torus.* — Commun. Algebra **34**, No. 1 (1996), 103–133.
21. R. Hazrat, A. Stepanov, N. A. Vavilov, Z. Zhang, *The yoga of commutators.* — J. Math. Sci. **179** (2011), 662–678.
22. R. Hazrat, A. Stepanov, N. A. Vavilov, Z. Zhang, *The yoga of commutators:further applications.* — J. Math. Sci. **200**, No. 6 (2014), 742–768.
23. R. Hazrat, A. Stepanov, N. A. Vavilov, Z. Zhang,*Commutator width in Chevalley groups.* — Note di Mat. **33**, No. 1 (2013), 139–170.
24. R. Hazrat, N. A. Vavilov, *Bak's work on K-theory of rings.* — J. Pure Appl. Algebra **213** (2009), 1075–1085.

25. R. Hazrat, N. A. Vavilov, *K_1 of Chevalley groups are nilpotent.* — J. Pure Appl. Algebra **179** (2003), 99–116.
26. V. I. Kopeiko, *The stabilization of symplectic groups over a polynomial ring.* — Math. U.S.S.R., Sbornik **34** (1978), 655–669.
27. B. Kunyavskii, A. Lavrenov, E. Plotkin, N. Vavilov, *Bounded generation of Steinberg groups over Dedekind rings of arithmetic type*, `arXiv:2307.05526v2 [math.KT]`, (2023), 23pp.
28. B. Kunyavskii , E. Plotkin, N. Vavilov, *Bounded generation and commutator width of Chevalley groups: function case.* — European J. Math. **9** (2023), 53.
29. B. Kunyavskii, E. Plotkin, N.Vavilov, *Uniform bounded elementary generation of Chevalley groups*, `arXiv:2307.15756 [math.GR]`, (2023), 30pp.
30. A. Lavrenov, S. Sinchuk. *On centrality of even orthogonal K_2.* — J. Pure Appl. Alg. **221**, No. 5 (2017), 1134–1145.
31. A. Lavrenov, S. Sinchuk, E. Voronetsky, *Centrality of K_2 for Chevalley groups: a pro-group approach.* – Isr. J. Math. (2024).
32. R. Lubkov *Overgroups of the elementary subgroups of reductive groups in irreducible representations*, Ph.D. thesis / SPbU. (2022).
33. R. Lubkov, A. Stepanov, *Subgroups of Chevalley groups over rings.* — J. Math. Sci. **252** (2021), 829–840.
34. A. Luzgarev, *Overgroups of exceptional groups*, PhD thesis, SPbU, Saint-Petersburg (2008).
35. A. Luzgarev, *On overgroups of $E(E_6, R)$ and $E(E_7, R)$ in their minimal representations.* — J. Math. Sci. **134**, No. 6 (2004), 2558–2571.
36. A. Luzgarev, *Overgroups of F_4 in E_6 over commutative rings.* —St.Petersburg Math. J. **20** (2009), 955–981.
37. A. Luzgarev, A. Stavrova, *Elementary subgroup of an isotropic reductive group is perfect.* — St. Petersburg Math. J. **23(5)** (2012), 881–890.
38. A. Luzgarev, N. A. Vavilov, *Calculations in Exceptional Groups, an Update.* — J. Math. Sci. **209** (2015), 922–934.
39. V. V. Nesterov, N. A. Vavilov, *Geometry of microweight tori.* — Vladikavkaz J. Math. **10**, No. 1 (2008), 10–23.
40. V. V. Nesterov, N. A. Vavilov, *Pairs of microweight tori in GL_n.* — Chebyshevskii Sbornik **21**, No. 4 (2020), 152–161.
41. I. Panin, A. Stavrova, N. Vavilov. *On Grothendieck– Serre's conjecture concerning principal-bundles over reductive group schemes.* — Compositio Mathematica **151**, No. 3 (2015), 535–567.
42. V. A. Petrov, *Odd unitary groups.* — J. Math. Sci. **130(3)** (2005) 475–4766.
43. V. Petrov. A. Stavrova, *Elementary subgroups in isotropic reductive groups.* — St.Petersburg Math. J. **20**, No. 4 (2009), 625–644.
44. V. A. Petrov, N. A. Vavilov, *Overgroups of $Ep(2l; R)$.* — St.Petersburg Math. J. **15**, No. 4 (2004), 515–543.
45. V. A. Petrov, N. A. Vavilov, *Overgroups of $EO(n, R)$.* — St.Petersburg Math. J. **19**, No. 2 (2008), 167–195.
46. E. Plotkin, A.Semenov, N. A. Vavilov, *Visual basic representations: an atlas.* — Int. J. Algebra Comp. **8**, No. 1 (1998), 61–95.

47. E. Plotkin, A. Stepanov, N.A. Vavilov, *Calculations in Chevalley groups over commutative rings.* — Soviet. Math. Dokl. **40**, No. 1 (1989), 145–147.
48. G. Seitz, *The maximal subgroups of classical algebraic groups.* — Mem. Amer. Math. Soc. **67**, No. 365 (1987).
49. A. Stavrova, *Stroenije isotropnyh reduktivnyh grupp*, PhD Thesis. St. Petersburg State University (2009).
50. A. Stavrova, *Homotopy invariance of non-stable K_1-functors.* — J. K-Theory **13**, No. 2 (2014), 199–248.
51. A. Stavrova, A. Stepanov, *Normal structure of isotropic reductive groups over rings.* — J. Algebra (2022).
52. A. V. Shchegolev, *Overgroups of elementary block-diagonal subgroups in even unitary groups over quasi-finite rings*, Ph.D. thesis, Universität Bielefeld. (2015).
53. A. V. Shchegolev, *Overgroups of an elementary block-diagonal subgroup of the classical symplectic group over an arbitrary commutative ring.* — St. Petersburg Math. J. **30**, No. 6 (2019), 1007–1041.
54. S Sinchuk. *On centrality of K_2 for Chevalley groups of type E_l.* — J. Pure Appl. Alg. **220**, No. 2 (2016), 857–875.
55. A. S. Sivatski, A. V. Stepanov, *On the word length of commutators in $GL_n(R)$.* — K-Theory **17:4** (1999), 295–302.
56. A. Smolensky, B. Sury, N. A. Vavilov, *Gauss decomposition for Chevalley groups, revisited.* — Intern. J. Group Theory **1**, No. 1 (2012), 3–16.
57. M. Stein, *Stability theorems for $K1$, $K2$ and related functors modeled on Chevalley groups.* — Japan. J. Math. **4** (1978), 77–108.
58. A. Stepanov, *Free product subgroups between Chevalley groups $G(\Phi, F)$ and $G(\Phi, F[t])$.* — J. Algebra **324**, No. 7 (2010), 1549–1557.
59. A. Stepanov, *Subring subgroups in Chevalley groups with doubly laced root systems.* — J. Algebra **362** (2012), 12–29.
60. A. Stepanov, N. A. Vavilov, *Decomposition of transvections: a theme with variations.* — K-theory **19** (2000), 109–153.
61. A. Stepanov, N. A. Vavilov, *On the length of commutators in Chevalley groups.* — Israel Math. J. **185**, No. 1 (2011), 253–276.
62. A. Stepanov, N. A. Vavilov, *Standard commutator formulae.* — Vest. St.Petersburg Univ., Ser. 1, No. 1 (2008), 9–14.
63. A. A. Suslin, *On the structure of the special linear group over polynomial rings.* — Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat. **41:2** (1977), 235–252; Math. USSR-Izv. **11:2** (1977), 22–238.
64. G. Taddei, *Normalité des groupes eléméntaire dans les groupes de Chevalley sur un anneau.* — Contemp. Math.**55**, part II (1986), 693–710.
65. N. A. Vavilov, *Parabolic subgroups of Chevalley groups over a semi-local ring.* J. Sov. Math. **37** (1987), 942–952.
66. N. A. Vavilov, *On subgroups of split orthogonal groups over a ring.* — Siberian Math. J. **29**, No. 4 (1988), 537–547.
67. N. A. Vavilov, *Subgroups of split orthogonal groups.* — Siberian Math. J. **29:3** (1988), 341–352.
68. N. A. Vavilov, *The group SL_n over a Dedekind ring of arithmetic type.* — Vestn. Leningrad. Univ. Mat. Mekh. Astronom. (1983), 5–10.

69. N. A. Vavilov, *Subgroups of the general linear group over a ring that satisfies stability conditions.* — Izv. Vysh. Uchebnykh Zavedeniĭ. Matematika **10**, 19–25.
70. N. A. Vavilov, *Subgroups of splittable classical groups.* — Transl. Proc. Steklov Inst. Math,. No. 4 (1991), 27–41.
71. N. A. Vavilov, *On subgroups of the spinor group that contain a splittable maximal torus. II.* — J. Math. Sci. **124:1** (2004), 4698–4707.
72. N. A. Vavilov, *Structure of Chevalley groups over commutative rings.* In: Proc. Conf. Non-associative algebras and related topics (Hiroshima, 1990). World Scientific, Singapore et al., (1991), 219–335.
73. N. A. Vavilov, *Subgroups of Chevalley groups containing a maximal torus.* — Transl. Amer. Math. Soc. **155** (1993), 59–100.
74. N. A. Vavilov, *A third look at weight diagrams.* — Rendiconti del Seminario Matematico dell Universita di Padova **104** (2000), 201–250.
75. N. A. Vavilov, *Do it yourself structure constants for Lie algebras of type E_l.* — J. Math. Sci. **120**, No. 4 (2004), 1513–1548.
76. N. A. Vavilov, *An A_3-proof of the structure theorems for Chevalley groups of types E_6 and E_7.* — Int. J. Algebra Comput. **17**, Nos. 5–6 (2007), 1283–1298.
77. N. A. Vavilov, *Decomposition of unipotents for E_6 and E_7: 25 years after.* — J. Math. Sci. **219**, No. 3 (2016), 355–369.
78. N. A. Vavilov, *Numerology of quadratic equations.* — St. Petersburg Math. J. **20**, No. 5 (2009), 687–707.
79. N.A. Vavilov, *Some more exceptional numerology.* — J. Math. Sci. **171**, No. 3 (2010), 317–321.
80. N. A. Vavilov, *Geometry of 1-tori in GL_n.* — St. Petersburg Math. J. **19**, No. 3 (2008), 407–429.
81. N. A. Vavilov, *Weight elements of Chevalley groups.* — St. Petersburg Math. J. **20**, No. 1 (2009), 23–57.
82. N. A. Vavilov, *The structure of isotropic reductive groups.* — Tr. Inst. Mat. **18(1)** (2010), 15–27.
83. N. A. Vavilov, *Reshaping the metaphor of proof.* — Philos. Trans. Roy. Soc. A **377**, No. 2140 (2019), 20180279, 18.
84. N. A. Vavilov, *Компьютер как новая реальность математики.* I. *Personal account.* — Компьютерные инструменты в образовании, No. 2 (2020), 5–26.
85. N. A. Vavilov, *Компьютер как новая реальность математики.* II. *Проблема Варинга.* — Компьютерные инструменты в образовании, No. 3 (2020), 5–55.
86. N. A. Vavilov, *Компьютер как новая реальность математики.* III. *Числа Мерсенна и суммы делителей.* — Компьютерные инструменты в образовании, No. 4 (2020), 5–58.
87. N. A. Vavilov, *Компьютер как новая реальность математики.* IV. *Проблема Гольдбаха.* — (2021), Компьютерные инструменты в образовании, No. 4 (2021), 5–71.
88. N. A. Vavilov, *Компьютер как новая реальность математики.* V. *Легкая проблема Варинга.* — Компьютерные инструменты в образовании, No. 3 (2022), 5–63.

89. N. A. Vavilov, *Компьютер как новая реальность математики.* VI. *Числа Ферма и их родственники.* — Компьютерные инструменты в образовании, No. 4 (2022), 5–67.
90. N. A. Vavilov, *Санкт-Петербургская школа теории линейных групп.* I. *Предыстория.* — Вестник Санкт-Петербургского университета. Математика. Механика. Астрономия **10 (68)**, Вып. 3 (2023), 381–405.
91. N. A. Vavilov, *Санкт-Петербургская школа теории линейных групп.* II. *Ранние работы Суслина.* — Вестник Санкт-Петербургского университета. Математика. Механика. Астрономия **11 (69)**, Вып. 1 (2024), 48–83.
92. N. A. Vavilov, V. G. Khalin, A. V. Yurkov, *The Skies Are Falling: Mathematics for Non-Mathematicians.* — Dokl. Math. **107** (Suppl 1) (2023), S137–S150.
93. N. A. Vavilov, V. G. Khalin, A. V. Yurkov, *Mathematica для нематематика: учебное пособие для вузов*, Электронное издание. М.: МЦНМО, (2021) 483 с. ISBN 978-5-4439-3584-3. URL: https://www.mccme.ru/free-books/mathematica.pdf
94. N. A. Vavilov, N. P. Kharchev, *Orbits of subsystem stabilisers.* — Zap. Nauch. Semin. POMI **338** (2006), 98–124.
95. N. Vavilov, A. Luzgarev, A. Stepanov, *Calculations in exceptional groups over rings.* — J. Math. Sci. **168**, No. 3 (2010), 334–348.
96. N. A. Vavilov, M. Yu. Mitrofanov, *The intersection of two Bruhat cells.* — Dokl. Ros. Akad. Nauk **377** (2001), 1—4, 7–10.
97. N. A. Vavilov, I. M. Pevzner, *Triples of long root subgroups.* — J. Math. Sci. **147**, No. 5 (2007), 7005–7020.
98. N. Vavilov, E. Plotkin, *Chevalley groups over commutative rings.* I. *Elementary calculations.* — Acta Appl. Math. **45**, No. 1 (1006), 73–113.
99. N. A. Vavilov, A. A. Semenov, *Long root semisimple elements in Chevalley groups.* — Dokl. Akad. Nauk **338:6** (1994), 725–727.
100. N. A. Vavilov, A. A. Semenov, *Bruhat decomposition for long root tori in Chevalley groups.* — J. Math. Sci. **57** (1991), 3453–3458.
101. N. A. Vavilov, A. A. Semenov, *Long root tori in Chevalley groups.* — St. Petersburg Math. J. **24**, No. 3 (2013), 387–430.
102. N. A. Vavilov, S. S. Sinchuk, *Dennis–Vaserstein type decompositions.* — J. Math. Sci. **171**, No. 3 (2010), 331–337.
103. N. A. Vavilov, Z. Zuhong, *Commutators of elementary subgroups:curioser and curioser..* — Transformation Groups **28** (2023), 487–504.
104. E. Voronetsky, *Injective stability for odd unitary K_1.* — J. Group Theory **23**, No. 5 (2020), 781–800.
105. E. Voronetsky, *Centrality of K_2-functors revisited.* — J. Pure Appl. Alg. **225**, No. 4 (2020).