Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 528, 2023 г.

С. В. Соловьев

О РАННЕМ ПЕРИОДЕ НАУЧНОЙ БИОГРАФИИ Н. А. ШАНИНА

§1

Николай Александрович Шанин (1919–2011) – выдающийся математик, который ныне известен в основном как один из главных представителей "конструктивного направления в математике". Основателем этого направления был А. А. Марков[1].

Как отмечается в юбилейной статье [4], математические способности Н. А. Шанина проявились рано: он поступил на математико-механический факультет ЛГУ в 1935 г., а в 1939 г. стал аспирантом; его руководителем в аспирантуре был А. А. Марков.

Там же отмечается, что его научная деятельность "четко делится на два периода – топологический и конструктивистский", до конца сороковых годов и после.

Поворот А. А. Маркова к конструктивизму начался приблизительно в 1946 г. [6]. Вскоре к Маркову примкнул Н. А. Шанин.

Этому периоду предшествовал период, когда Шанин занимался топологией, построенной на теоретико-множественной основе.

Тогда им были защищены кандидатская (1942) и докторская (1945) диссертации, значимость которых он впоследствии отвергал.

При этом, как отмечают авторы [4] (со ссылкой на обзор [5]), "Работы Н. А. Шанина по топологии не утратили своей ценности и в настоящее время".

В этой статье речь пойдет о письмах А. А. Маркова и П. С. Александрова к Н. А. Шанину, относящихся именно к этому периоду.

Ключевые слова: история математики, общая топология, произведения топологических пространств, конструктивная математика.

[1]А. А. Марков-младший (1903–1979), чл.-корр. АН СССР (1953). В 1936–1942 и 1943–1953 г. заведующий кафедрой геометрии ЛГУ. До июля 1942 года находился в блокадном Ленинграде. В 1939–1972 также работал в Математическом институте имени Стеклова АН СССР. В годы, рассматриваемые в статье – заместитель директора, сначала по МИАН в целом, а с 1943 г. после реэвакуации из Казани – по ЛОМИ.

Хотя ответные письма, насколько известно, не сохранились, из цитируемых ниже писем (в особенности писем Александрова[2]) видно, как у Шанина постепенно могли зарождаться сомнения, которые в дальнейшем привели к его переходу на позиции конструктивизма.

Яркой иллюстрацией постепенно усиливающегося расхождения точек зрения может служить то, что Александров неоднократно подчеркивает важность полученных Шаниным теорем, в которых используется условие регулярности кардинальных чисел (в связи с понятием "калибра" и "веса" топологических пространств). Но задача выяснения регулярности несчетных кардиналов не имеет конструктивного решения (с конструктивной точки зрения она вообще не может считаться корректно поставленной). Даже конкретный вопрос, является ли мощность множества вещественных чисел регулярным кардиналом, неразрывно связан с континуум-гипотезой. Независимость континуум-гипотезы от теории множеств Цермело-Френкеля была доказана П. Коэном в 1965 г., однако фундаментальный характер этой проблемы был ясен и в 1940-х годах, когда Шанин работал над докторской диссертацией.

Письма сохранялись в семейном архиве Н. А. Шанина.

Я хотел бы поблагодарить вдову Николая Александровича Л. С. Сарочинскую за возможность получить доступ к этим документам, а также Ю. В. Матиясевича и Н. Н. Васильева за ряд советов при подготовке данной статьи..

В настоящее время с оцифрованными письмами можно ознакомиться на сайте лаборатории математической логики ПОМИ.[3]

[2]П.С. Александров (1896-1982). Ученик Н.Н. Лузина, один из создателей советской школы общей, а в дальнейшем и алгебраической топологии. Классической монографией по основам общей топологии и теории компактных топологических пространств считается книга: П.С. Александров, П.С. Урысон. Мемуар о компактных топологических пространствах. (Первое издание вышло на французском языке в 1929 г.) Чл.-корр. АН СССР (1929), лауреат Сталинской премии (1942), академик АН СССР (1953). До начала 1930-х неоднократно посещал Западную Европу и США, и имел возможность завязать там контакты с Д. Гильбертом, Э. Нётер, Л.Э.Я. Брауэром и другими выдающимися математиками. Многие годы сотрудничал с Х. Хопфом. Широкой известностью и поныне пользуется книга: P. Alexandroff, H. Hopf. Topologie I. Springer, 1935. (Она, кстати, посвящалась Брауэру, чьи взгляды оказали большое влияние на конструктивизм.)

[3]См. `https://logic.pdmi.ras.ru/shanin/letters.html`

§2

Вот выдержка из самого раннего из этих писем.

Казань, Академическая ул. 21, кв. 2. 5.12.1941. (П. С. Александров — Н. А. Шанину.):

“*Спешу ответить на Ваши вопросы.*

1. *Защита Вами диссертации в Казани – в университете или в Математическом Институте Академии Н[а]ук (вероятнее - второе) как я надеюсь, вполне осуществимы. Путь этого осуществления представляется мне такой. Вы присылаете мне, как только они будут готовы, те рукописи, совокупность которых составляет Вашу диссертацию, вместе с Ваш[и]м заявлением о желании защитить ее в Математическом Институте Академии наук (соотв. на физико-математическом факультете Казанского университета[)] – на всякий случай пришлите заявление в каждое из этих учреждений, хотя, как сказано, я считаю более вероятным, что защита состоится в Академии Наук*. По получении этих материалов, я немедленно сделаю о Вас представление, и не предвижу на него возражений. Этим данная сторона дела могла бы почитаться законченной. Все рукописи направляйте в мой адрес.*

**Одновременно пришлите, конечно, копию о сдаче кандидатск. минимума и диплома.* $< \cdots >$”

В 1941–45 Н. А. Шанин служил в армии [4]. Известно, что большую часть этого времени он преподавал в Ленинградской Военно-Воздушной Академии (в будущем — им. Можайского), которая в 1941 г. была эвакуирована в г. Йошкар-Ола.[4]

Судя по письму П. С. Александрова (5.12.41), Н. А. Шанин уже находился в эвакуации. В документальном фильме, посвященном 70-летию Математического Института им. В. А. Стеклова, он коротко говорит, что был мобилизован в начале войны. Далее, их часть была направлена в Вильнюс, но эшелон разбомблен по дороге, после чего Н. А. Шанин в составе запасного полка отступал до Москвы, а в дальнейшем был эвакуирован в Казань.

[4] `http://i-ola-museum.ru/clauses/vystavki-i-ekspozitsii/virtualnye-vystavki/leningradskaya-voenno-vozdushnaya-akademiya-v-1941/` (12.11.2023)

При нем в это время уже была практически готовая рукопись кандидатской диссертации. В Казань был эвакуирован также Математический Институт. Из Казани Н. А. Шанина направили преподавателем в Военно-Воздушную Академию, эвакуированную в г. Йошкар-Ола, где он оставался до конца войны (числясь в составе действующей армии).

Более позднее письмо А. А. Маркова упоминает это место его службы и г. Йошкар-Ола.

А. А. Марков Н. А. Шанину (15.5.1944):

“*Разумеется для этого надо, чтобы в Ленинград вернулись и Вы и чтобы Ваша Военная Воздушная Академия либо отпустила Вас либо разрешила совместительство <. . . > На днях быть может поедут в Йошкар-Ола наши сотрудники за картошкой. Я попрошу их повидать Вас и с ними Вы сможете передать Ваш ответ.*”

Открытка П. С. Александрова (напечатанная на машинке, как и все его письма) относится к теме защиты диссертации:

“23.2.1942. Казань Академическая 21 кв. 2.

Дорогой Николай Александрович! Вашу рукопись и повидимому все Ваши письма я получил. Послал Вам телеграмму в которой сообщаю, что Ваша защита назначена на начало марта и прошу сообщить адрес по которо[м]у надо ходатайствовать о Вашем отпуске в Казань для защиты. Защита будет по рукописи без всякой ее перепечатки, поэтому все заботы о перепечатании временно отложил, но если Вам не удастся приехать, то конечно все эти заботы будут осуществлены согласно Вашим указаниям, которые в этом случае прошу Вас повторить т.к. в связи с новыми обстоятельствами эти указания могут измениться. Оппоненты – А. Н. Тихонов и я. Заочных защит не бывает, и теперь все дело в том чтобы Вам получить разрешение.”

В более позднем письме говорится уже о новых результатах и о возможности поступления в докторантуру:

“Москва 27.8.1943 *Дорогой Николай Александрович!*

Я Вам писал, очевидно мое письмо пропало. Напишу на днях Вам более подробное письмо и пошлю заказным.

Все Ваши результаты о диадических бикомпактах , в значительной степени неожиданные для меня и опровергающие мои предположения считаю в высшей степени интересными и с нетерпением жду работы Вашей, в которой они будут изложены. Присланную с *тов. Коробовым отправлю печатать или в ДАН, или в "Известия" Академии Наук.*

С приветом

П. Александров

PS Отвечаю на Ваши вопросы, к сожалению, довольно бессодержательно:

а) О заочной докторантуре я ничего не знаю, узнаю – напишу.

б) Не знаю также, приеду ли в Казань. Если приеду, то дней на 5 в сентябре, тогда телеграфирую Вам заблаговременно.

в) О работах Перельмана[5] *обратитесь к Андр. Андр. Маркову – Казань, Чернышевская 18, Матем Институт АН СССР – я не знаю, опубликованны ли они, Андр. Андр. конечно знает.*"

Подробнее о своем интересе к результатам Н. А. Шанина о "диадических бикомпактах" Александров говорит в более позднем письме. Выдержка из этого письма (интересно, что текст напечатан на "фирменном бланке" Александрова):

"Prof. Dr. P. Alexandroff 2.11.1943

Moskau 6

Staropimenowski per.6, kw.8

Дорогой Николай Александрович!

Мне хочется упорядочить для себя всю совокупность результатов, полученных Вами за последнее время в теории бикомпактных пространств, топологических расширений и пр. Я уже Вам писал, что Вашу работу о диадических бикомпактах я считаю очень интересной и значительной независимо от того, посвящена ли она доказательству моих гипотез или более их опровержению. Сообщите мне пожалуйста, когда я могу рас[с]читывать получить готовую к печати рукопись этой работы. Ваша работа о погружениях в степень топологического пространства также в высшей степени понравилась мне; ближайшие заседания Топологического кружка будут посвящены докладам о этой работе. Эту Вашу работу я передал для напечатания в Известия Академии наук. $< \cdots >$"

[5]Речь идет о М. Я. Перельмане (1919–1942), сыне известного популяризатора математики Я. И. Перельмана. Он был другом детства Н. А. Шанина. Две его работы, относящиеся к математическому анализу, были опубликованы, а рукопись "Мощности в топологии" (объемом 361 с.) осталась неопубликованной и, возможно, утеряна, хотя сохранились комментарии к ней А. А. Маркова [7]. Вопрос о связи этой работы Перельмана с работами Н. А. Шанина 1941–47 г. требует дополнительного исследования.

Это письмо особенно важно, показывая, на каком уровне в это время происходило научное взаимодействие Александрова и Шанина.

Интересны также (как характеристика того времени) аспекты взаимодействия с мировой наукой. Вот еще несколько выдержек из того же письма.

“*На днях я получил письмо от Лефшеца, – пишет Александров, – в котором он сообщает, что перевод моего длинного мемуара о гомологических свойствах расположения комплексов и замкнутых множеств выходит (следовательно, в настоящее время уже вышел) в сентябрьском номере Transactions Amer. M. S. Работа Фомина о бикомпактных расширениях топологических пространств (его кандидатская диссертация, с которой Вы по моему познакомились в Казани) в ближайшее время выходит (или может быть уже вышла) в Annals of math. Я бы считал очень целесообразным, чтобы Вы написали сводный мемуар о Ваших исследованиях в теории топологических пространств для напечатания его в одном из американских топологических журналов, чему ни в какой мере не противоречит, если эти результаты полностью или частично опубликованы в наших изданиях на русском языке. Я считаю, что в этот мемуар должны войти во всяком случае Ваши результаты о диадических бикомпактах, а также результаты полученные Вами “о погружениях в степень...” Какие результаты Вы еще найдете нужным включить в этот мемуар предоставляю всецело Вашему усмотрению. Американцы печатают быстро: перевод моей работы “О гомологических свойствах расположения” был послан в сентябре 1942 г., получен там в феврале 1943 и, как я уже говорил, опубликован в сентябре 1943. Таким образом от отправки до опубликования прошел всего лишьъ год – это и по мирному времени было бы недолго.*”

Тон разговора здесь напоминает об отношениях учителя и ученика (на уровне подготовки “докторской”, а не кандидатской).

“*Ваши работы по бикомпактным пространствам получили бы, как мне кажется, прекрасное завершение, если бы Вам удалось решить следующую задачу:*

Доказать или опровергнуть, что для всякого бикомпакта индуктивная размерность совпадает с размерностью, определенной при помощи покрытия <...>”

Далее довольно подробно обсуждаются технические вопросы. Александров также говорит о своей гипотезе относительно свойств размерности и добавляет, что Шанин, возможно, ее опровергнет, но положительный будет результат или отрицательный в общем неважно, важнее, что это прояснит вопрос. Он обещает прислать некоторые свои статьи и завершает письмо вопросом о докторантуре.

“*Между прочим, мне кажется, Вы с излишним пессимизмом подошли к вопросу о Вашей докторантуре: повидимому Академии наук удается в отдельных случаях брать к себе в докторанты людей в точности Вашего служебного положения. Подумайте об этом и, если Вы пришлете мне соответствующее заявление, направленное в Математический институт Академии Наук, Вы можете быть совершенно уверены в интенсивной потдержке (так!) этого заявления, как с моей стороны, так и со стороны А. Н. Колмогорова, что, впрочем, конечно, еще не является гарантией успеха.*

Шлю Вам искренний привет.

Ваш

П. Александров”

Можно добавить еще восторженную оценку Александровым (в письме от 15.8.44) одного из результатов Шанина, вошедших в докторскую диссертацию.

“*Дорогой Николай Александрович!*

Получил все Ваши письма. Ваши результаты я считаю очень крупным успехом и большим продвижением вперед в теории бикомпактных пространств. Я никогда не верил, что гипотеза о непредставимости в виде вполне упорядоченных растущих сумм нигде не плотных замкнутых множеств верна для любых бикомпактов. И наоборот, давно предполагал, что она верна для бикомпактов диадических (так я предлагаю назвать бикомпакты, являющиеся непрерывными образами D^*). Таким образом, Ваш результат в точности подтверждает то, на что я надеялся и что желал видеть доказанным. Я совершенно не понимаю, как после доказанной Вами замечательной теоремы Вы можете еще предаваться унынию и быть недовольным этими результатами нескольких месяцев работы; что касается меня, то я был бы счастлив, если бы доказал эти вещи, затратив на них хотя бы год работы. $<\ldots>$”.

В ряде писем А. А. Маркова, датированных 1944 годом, обсуждается в вопрос устройства Н. А. Шанина на работу в Ленинграде.

Письмо от 07.06.1944:

“*Дорогой Николай Александрович! Ваше письмо я получил, но не ответил сразу, так как со дня на день ожидал возвращения из Саратова А. Д. Александрова*[6]*, командированного туда для выяснения университетских дел (пропусков для семей и др.) Теперь он приехал и выяснилось, что в июле нам всем, казанцам ленинградского происхождения, математикам по специальности, надлежит приехать в Ленинград для выяснения различных вопросов в том числе вопроса о делении кафедр. Поэтому мне очень хотелось бы, если это возможно, знать-в[озможно] более определенно могу ли я рассчитывать на то, что к 1/X (предполагаемое начало занятий в ЛГУ) Вы будете в Ленинграде и сможете начать работу на кафедре топологии. Я буду ждать Вашего скорого ответа на этот вопрос так как повидимому уеду из Казани в первых числах июля.*

Мне очень хотелось бы также Вас видеть в числе сотрудников ЛОМИ, но если невозможно, чтобы Вы до окончания войны стали работать и в ЛГУ и в ЛОМИ, мне приходится предпочесть, чтобы Вы зачислились в ЛГУ. По существу тут большой разницы не будет, так как Ваша нагрузка будет минимальная, близкая к нулю.

Я конечно понимаю, что в настоящее время Вы не сможете дать совершенно определенный ответ на поставленный вопрос. Поэтому я удовольствуюсь ответом вероятностного типа в духе современной физики. Однако рассчитываю на то, что этот ответ будет утвердительный и что наш контакт в скором времени возобновится.

передайте мой привет Вашей мамаше и Сергею Михайловичу.

С искренним приветом

А. Марков 7/VI/1944

<адрес>”

На базе результатов, полученных Н.А. Шаниным, готовилась докторская диссертация. В 1945 он вернулся в Ленинград. В материалах, о которых идет речь, имеется также положительный отзыв А.А. Маркова на рукопись докторской диссертации Н. А. Шанина. Марков на этом этапе еще никак не критикует результаты в рамках теоретико-множественной топологии.

---

[6]А. Д. Александров (1912–1999), физик и математик, с 1938 по 1953 год – ст.н.с. ЛОМИ АН СССР, с 1944 г. профессор на мат-мехе ЛГУ (с 1945 на кафедре геометрии), чл.-корр. АН СССР (1946), академик АН СССР (1964), в 1952–1964 ректор ЛГУ.

Согласно [9], защита состоялась 29.12.1945 г. Цитируемый ниже отзыв Маркова [7] также датирован 29.12.1945.

“Отзыв о диссертации Н. А. Шанина “О произведении топологических пространств”, представленной на соискание степени доктора физико- математических наук.

Диссертация Н. А. Шанина посвящена некоторым трудным проблемам, связанным с произведением топологических пространств. В основном это вопросы о пересечении открытых множеств. Вопросы этого рода играют большую роль в теоретико-множественной топологии. Достаточно вспомнить известную часто применяемую теорему о том, что в полном метрическом пространстве всякая последовательность плотных открытых множеств имеет плотное пересечение. Из более современных результатов можно указать теорему Э. Шпильрайна: “В произведении топологических пространств счетного веса всякое несчетное семейство открытых множеств содержит пару пересекающихся множеств.” К обоим этим результатам в известной мере примыкает исследование Н. А. Шанина.

Основным стержнем этого исследования является введенное Н. А. Шаниным понятие “калибра” топологического пространства, позволяющее коротко формулировать главнейшие результаты.

Кардинальное число ρ называется калибром топологического пространства, если в этом пространстве всякое семейство открытых множеств мощности ρ имеет подсемейство той же мощности, имеющее непустое пересечение. Н. А. Шанин ставит и успешно решает проблему определения калибров произведения системы пространств по калибрам пространств-сомножителей. Ключом к решению этой проблемы является замечательная теоретико-множественная теорема о разложении k-значного отображения на отображения некоторого нормального типа, доказываемая Н. А. Шаниным с большим мастерством (теорема 6). Эту теорему следует особо отметить, как имеющую самостоятельный интерес. С её помощью Н. А. Шанин доказывает ряд результатов, относящихся к калибрам произведения топологических пространств. Главным из этих результатов можно считать теорему 16, дающую необходимые и достаточные условия того, чтобы несчетное

[7]В материалах имеется лишь копия машинописного текста, где не вписаны символические обозначения. Мы восстанавливаем их по смыслу, по возможности согласуя с [9].

регулярное кардинальное число было калибром произведения системы пространств. Это условие состоит, оказывается, только в том, чтобы это число было калибром каждого из пространств-сомножителей. Важными результатами являются также теоремы 18 и 14. Первая из них дает необходимые и достаточные условия того, чтобы кардинальное число было калибром произведения пространств счетного веса, и является существенным усилением цитированной теоремы Э. Шпильрайна. Вторая также является усилением теоремы Шпильрайна уже в том отношении, что “вес” пространства заменяется в этой теореме другой мощностной характеристикой “псевдовесом”. Так называется наименьшая из мощностей множеств плотных в пространстве.”

Как мы видим, в это время Марков еще не выступает “с открытым забралом” против теоретико-множественной парадигмы. В то же время неоднократно подчеркивается, что результаты и методы Шанина относятся к теоретико-множественной топологии, т.е. для Маркова это существенно.

“*Автор далее применяет полученные им общие результаты к теории “диадических бикомпактов*”. <...>

В главе о диадических бикомпактах следует особо отметить теорему 45, которая гласит, что всякий упорядоченный диадический бикомпакт подобен множеству действительных чисел. В мастерски проведенном доказательстве этого результата еще раз используется теорема диссертанта об n-значных отображениях.

Несколько особняком стоит заключительная глава, посвященная вопросу о топологическом погружении пространства в степень другого пространства. Диссертант вскрывает здесь общий корень многих ранее известных “теорем погружения” (А. Н. Тихонова, П. С. Александрова и др.), и доказывает некоторые новые теоремы погружения. Отличаясь легкостью и изяществом конструкции эта теория диссертанта позволяет охватить в едином аспекте многие существенные результаты теоретико-множественной топологии.”

Как принято, отзыв заканчивается словами, что “Н. А. Шанин вполне заслуживает присуждения ему степени доктора физико-математических наук”.

Приведем также выдержки из отзыва П. С. Александрова, датированного 01.12.1945.

Интересно, что это в некоторых словах Александрова (а не Маркова) найти косвенное свидетельство о начавшемся повороте Шанина к конструктивизму: “При помощи теории калибров автор решает ряд интересных и трудных задач, которые – я считаю нужным это подчеркнуть – ставятся вне – часто сложных – систематизаторских теорий Н. А. Шанина...”

Александров также (как и Марков) выделяет теорему 16:

“При помощи весьма тонких рассмотрений Н. А. Шанин в первой части своей работы устанавливает калибры произведения топологических пространств по калибрам и некоторым другим характеристиками сомножителей и дает исчерпывающий ответ на вопрос о том, какие кардинальные числа могут служить калибрами топологических пространств, являющихся произведениями пространств не более чем счетного веса. В частности, для того, чтобы кардинальное число было калибром произведения, необходимо и достаточно, чтобы оно было калибром каждого из множителей”.

Выделяет он и теорему о связи диадических бикомпактов с действительными числами (теорема 51): “Всякий упорядоченный диадический бикомпакт подобен некоторому ограниченному замкнутому множеству действительных чисел (значит, всякое связное упорядоченное множество, являющееся диадическим бикомпактом, подобно отрезку числовой прямой”.

Косвенное отражение споров, которые вели к появлению конструктивного направления в математике, можно найти и в том, что Александров находит нужным особо подчеркнуть в своем отзыве важность “абстрактной топологии”, и даже выбор слов для положительной оценки работы Шанина: “В работе Шанина абстрактная топология впервые сталкивается с проблемами, быть может уже трансцендентной трудности; с другой стороны, в ней решаются проблемы, о которых неясно было, можно ли их решить современными средствами теоретико-множественной топологии”.

Как уже отмечалось, защита состоялась 29 декабря 1945 г. Текст диссертации, в слегка переработанном виде, был опубликован в виде отдельного тома Трудов МИАН [9].

Среди писем, относящихся к этому периоду, есть еще одно письмо П. С. Александрова (01.06.1947), которое показывает, как дальше развивался творческий кризис, приведший Н. А. Шанина к конструктивизму.

Несколько выдержек.

"*Дорогой Николай Александрович!*

Простите, что отвечаю на Ваше письмо с некоторым запозданием: Ваше письмо по самому своему характеру таково, что отвечать на него поспешно не имеет смысла, а для того, чтобы сосредоточиться и ответить, собравшись с мыслями, требуется время: вот мне и пришлось подождать, пока в моем распоряжении оказалось хоть немного времени, свободного от повседневных обязанностей и забот..."

"*Вы пишите мне, что Ваша "математическая работа в последнее время протекала неудовлетворительно во всех отношениях". Мне кажется, сама эта формулировка не только сильно преувеличена, но и просто несправедлива: Вы совсем недавно закончили большую и достаточно трудную работу, после этого переключились на совершенно новую для Вас область, и как Вы сами говорите, вошли в курс этой новой области. Другими словами, Вы за последние годы много сделали, как в смысле Вашего собственного творчества, так и в смысле овладения новыми для Вас областями математики. О каких-же неудачах можно в таких обстоятельствах говорить? Ведь математические результаты не суть блины, они появляются время от времени, а не стопками, один за другим, непрерывно.*

Отвергая таким образом совершенно решительно самую постановку вопроса о Ваших неудачах, я с другой стороны охотно поделюсь с Вами своими соображениями о том, чем сейчас можно заниматься в топологии. Само собой разумеется, эти соображения будут суб'ективны и в значительной мере выражать мои собственные научные вкусы. Но иначе и не может быть: вопрос о том, что -– "перспективно" и что - "неперспективно", что – на главной дороге научного развития, а что лежит, так сказать, на переулках к этой главной дороге — лучше всего представить для решения истории: опыт показывает, что все эти вопросы "перспективности" получают в фактическом развитии математики совсем не то решение, которое в каждый данный момент кажется правильным даже и наиболее влиятельным математикам..."

С общематематической точки зрения, эти слова Александрова продиктованы здравым смыслом и заботой о будущем молодого талантливого математика.

"*Ну а теперь*, – пишет Александров, – *после всех этих предисловий, перехожу наконец к делу. - Как Вы знаете, я совершенно не* *верю в существование какой-то особой “теоретико-множественной топологии”*

“*Только с большим трудом можно в настоящее время найти в топологии вопросы, представляющие большой интерес, и которые можно надеяться решить “чисто теоретико-множественными методами”. Право же, я даже горжусь тем, что в первой Вашей работе над диссертацией мне, как мне кажется, удалось найти несколько таких вопросов и присоединить их к тем, которые совершенно самостоятельно нашли Вы*”

“*Считая полученные Вами результаты значительными и интересными, я в то же время понимаю Вас, когда Вы говорите, что круг этих вопросов довольно узок: он потому и узок, что исходит из не вполне естественного стремления очертить круг вопросов таким образом, чтобы, Боже сохрани, не пришлось для их решения привлекать комбинаторные методы*”

“*Это то-же самое что в такой называемой “чисто комбинаторной” топологии (которая столь же изысканна, если не более, как и “чисто теоретико-множественная”!) интересоваться лишь такими проблемами, к решению которых, Боже сохрани, не пришлось бы никогда привлекать никаких соображений теоретико-множественного характера: тогда в этой комбинаторной топологии только и останется, что проблема четырех красок, да еще, может быть, узлы.*”

“*Между тем, если не ограничиваться совершенно искусственными препятствиями “чистоты метода” (теоретико-множественного или комбинаторного), то можно только удивляться обилию новых интересных вещей, которые сейчас в топологии происходят*”

Далее Александров говорит о новейших результатах и публикациях; о достижениях иностранных ученых и необходимости знакомиться с достижениями мировой науки; предлагает ряд интересных с его точки зрения направлений исследований, довольно детально обсуждая некоторые конкретные вопросы.

В конце — снова “общечеловеческий” совет.

“*Но прошу Вас только об одном: привлекут ли Вас предлагаемые мною Вашему вниманию направления топологического исследования, или нет -– во всякеом случае, ни на минуту не теряйте рабочей энергии — я считаю совершенно достоверным, что после некоторых колебаний, неизбежных в научной биографии всякого математика, ставящего перед собою серьезные задачи, а не идущего по проторенной* *дорожке (от одного "усиления" известных результатов к следующему, немного лучшему) — Вы найдете свой собственный творческий путь: Ваша творческая индивидуальность достаточно сильна и она опирается на очень выраженные волевые свойства Вашей личности, для того, чтобы иметь полную уверенность в преодолении Вами всех Ваших научных "кризисов". А сама наличность этих так наз. "кризисов" меня чрезвычайно радует: именно в ней-то я вижу залог предстоящего Вам "большого научного плавания": опыт показывает, что люди, таких кризисов не испытавшие, ни к чему, кроме кропания мелочей в своей научной деятельности не бывают способны.*

Шлю Вам самый искренний привет.

Ваш П. Александров"

Судя по этому письму, Александрову кризис представлялся скорее психологическим, чем идейным или даже "идеологическим". Например, противопоставляя (как крайности) теоретико-множественную топологию комбинаторной, он не замечает (или пренебрегает) противопоставленем идеи актуальной и потенциальной бесконечности, которое было ключевым для конструктивистов, а также вообще бесконечного и конечного – в финитизме, притом, что эти противопоставления играли большую роль уже в дискуссиях между интуиционистами и представителями классической математики и в работах Гильберта 1920-х годов.

§3

Время идеологических баталий в математике давно прошло. Мы знаем, что конструктивизм достиг гораздо большего, чем мог предполагать Александров. Но гораздо меньшего, чем ожидали сами конструктивисты. В этой статье речь, однако, в большей мере шла о зарождении конструктивизма, как направления, а не об итогах нескольких десятилетий его развития.

Целесообразно, вместо заключения, коснуться некоторых из основных результатов диссертации Н. А. Шанина, о которых шла речь в процитированных выше документах (добавив необходимые пояснения относительно терминологии). Мы остановимся на двух теоремах – теореме 16 и теореме 51, важность которых подчеркивается в отзывах Александрова и Маркова.

Напомним, что согласно первоначальному определению П. С. Александрова и П. С. Урысона (1923), топологическое пространство называется бикомпактным, если каждое его открытое покрытие содержит конечное подпокрытие. При этом бикомпактное хаусдорфово пространство называлось бикомпактом. Термины "компактное пространство" и "компакт" первоначально применялись в случае "счетной компактности". В настоящее время принята другая терминология: бикомпактное пространство называют компактным, бикомпакт – компактом.

Из-за совпадения свойств компактности, счетной компактности и секвенциальной компактности для подмножеств евклидовых пространств (а также для других классов "хороших" пространств: метрических пространств, многообразий, пространств, изучаемых в алгебраической топологии) не сразу стало очевидным, что именно компактные пространства являются правильным расширением класса метрических компактов. Однако дальнейшее развитие математики и ее приложений утвердило фундаментальную важность понятия компактности[8].

Далее используется терминология и обозначения из [9].

Теоретико-множественные понятия играют большую роль в диссертации Н. А. Шанина. Приведем некоторые соглашения, определения и обозначения, используемые в диссертации Н. А. Шанина.

"Для упрощения формулировок ряда определений и теорем мы вводим в рассмотрение высказывание: "множество A есть кардинальное число"и вводим следующую аксиому: для всякого множества существует одно и только одно равномощное ему кардинальное число.

Кардинальное число, равномощное множеству M, называется мощностью множества M и будет обозначаться через $|M|$.

Если A и B – два множества, то выражения $A \sim B$, $A \lesssim B$ и $A < B$ будут соответственно означать: "множество A равномощно множеству B", "множество A равномощно некоторому подмножеству множества B"и "множество A равномощно некоторому подмножеству множества B, но не равномощно самому множеству B".

Если $\mathfrak{N}$ есть некоторое семейство, то через $\mathrm{Sup}(\mathfrak{N})$ будем обозначать кардинальное число, обладающее следующими свойствами: $N \lesssim \mathrm{Sup}(\mathfrak{N})$ для всех $N \in \mathfrak{N}$ и, каково бы ни было кардинальное число

[8]См. напр. http://www.lomonosov-fund.ru/enc/ru/encyclopedia:0135684 (12.11.2023) Ср. также [2].

$\mathfrak{r}$ такое, что $\mathfrak{r} < \mathrm{Sup}(\mathfrak{N})$, существует множество $N \in \mathfrak{N}$ такое, что $\mathfrak{r} < N$."([9], p.10-111).

"Кардинальное число $\mathfrak{m}$ называется калибром топологического пространства R, если $\mathfrak{m} > 1$ и если всякое семейство, состоящее из непустых открытых подмножеств R и имеющее мощность $\mathfrak{m}$, обладает равномощной частью, пересечение всех элементов которой есть непустое множество" ([9], c.6).

"Семейство $\mathfrak{N}$ будем называть скелетом множества A, если выполняются условия:

(1) $\cup\mathfrak{N} = A$,
(2) $N < A$ для всех $N \in \mathfrak{N}$.

Характером множества A будем называть минимум мощностей всевозможных скелетов множества A. Через χ будем обозначать функцию, сопоставляющую каждому множеству характер этого множества $\chi(A)$.

Очевидно, что равномощные множества имеют равные характеры. Будем говорить, что множество регулярно , если $\chi(A) \sim A$. В частности, кардинальное число $\mathfrak{m}$ будем называть регулярным кардинальным числом, если $\chi(\mathfrak{m}) = \mathfrak{m}$.

Отметим следующий очевидный факт: если существует бесконечное кардинальное число, непосредственно предшествующее кардинальному числу $\mathfrak{m}$, то $\mathfrak{m}$ есть регулярное кардинальное число."([9], с. 14)

"**Теорема 16**. Пусть бесконечное кардинальное число $\mathfrak{m}$ удовлетворяет следующим трем условиям:

(1) При каждом $\xi \in \Xi$ кардинальное число $\mathfrak{m}$ является универсальным калибром Т-пространства $X(\xi)$ [иными словами: при каждом $\xi \in \Xi$ кардинальные числа $\mathfrak{m}$ и $\chi(\mathfrak{m})$ являются калибрами Т-пространства $X(\xi)$].
(2) Если множество Ξ бесконечно, то
$$\chi(\mathfrak{m}) > \aleph_0$$
(3) Выполняется по крайней мере одно из следующих двух условий:
 (a) $\mathfrak{m}$ является регулярным кардинальным числом;
 (b) каково бы ни было кардинальное число $\mathfrak{a} < \mathfrak{m}$, существует кардинальное число $\mathfrak{c}$ такое, что
$$\mathfrak{a} \lesssim \mathfrak{c} < \mathfrak{m}$$

и

$$J(\mathfrak{c}) < \chi(\mathfrak{m}),$$

где $J(\mathfrak{c})$ обозначает множество всех тех элементов $\xi \in \Xi$,при которых $\mathfrak{c}$ не является универсальным калибром T-пространства $X(\xi)$.

Тогда $\mathfrak{m}$ является калибром (и даже универсальным калибром) произведения X^{Ξ}." ([9], с.60)

"**Определение 13.** Будем говорить, что топологическое пространство R является диадическим пространством, если R есть T_2-пространство, представимое как непрерывный образ произведения компактов. Очевидно, что всякое диадическое пространство является бикомпактом; поэтому диадические пространства мы будем называть также д и а д и ч е с к и м и б и к о м п а к т а м и"([9], с. 79.)

"**Теорема 51**. Всякий упорядоченный диадический бикомпакт подобен некоторому замкнутому ограниченному подмножеству пространства всех вещественных чисел."([9], с. 92.)

Что именно выглядит неприемлемым в этих определениях и теоремах со стороны (еще не созданного в это время) "конструктивного направления в математике"? В некотором смысле, "все", т.е. используемый в них понятийный аппарат, и прежде всего "классические" понятия множеств и функций. Но это – взгляд из будущего, когда "конструктивное направление" уже сформировалось.

Неудовлетворенность в период работы над диссертацией у Н. А. Шанина могли вызывать и куда более конкретные аспекты этих определений и теорем, например, неверифицируемость основных условий, скажем, регулярности несчетных кардиналов.

Это ведет за собой вопросы о приемлемости "классического" определения функции в таких случаях, как определение $\chi(A)$ в виде минимума по всем "скелетам".

Рассмотрение определения функции подчеркивает разницу между классическим и конструктивным пониманием существования – в каком смысле существует этот минимум? Каким образом задано множество "всех" скелетов данного множества? И само это "данное множество".

Реакцией на подобные трудности послужило приоритетное развитие теории алгорифмов, в нашем случае – теории "нормальных алгорифмов" А. А. Маркова, разработка теории конструктивных вещественных чисел на основе алгорифмического подхода, работы по конструктивным метрическим и топологическим пространствам (в рамках школы Маркова–Шанина)[9].

Иногда кажется (вспоминая известные слова В. И. Арнольда), что главным вкладом конструктивизма является ряд ключевых примеров, которые подчеркивают различие конструктивного и классического подхода, и которые, наверное, должен знать каждый образованный математик.

Ярким примером такого типа может служить пример некомпактного замкнутого шара в компактном конструктивном метрическом пространстве, полученный В. А. Лифшицем и В. П. Черновым [3], хотя в классической теоретико-множественной топологии как общеизвестный факт рассматривается утверждение, что "замкнутое подпространство бикомпактного пространства бикомпактно"[2].

Список литературы

1. П. С. Александров, *Страницы автобиографии.* — УМН **34**, вып. 6(210) (1979).
2. А. В. Архангельский, *Бикомпактное пространство. Математическая Энциклопедия.* Т. 1 (А - Г). Ред. коллегия: И. М. Виноградов (глав ред) [и др.] – М., "Советская Энциклопедия", 1977.
3. В. А. Лифшиц, В. П. Чернов, *Некомпактный замкнутый шар в конструктивном компактном метрическом пространстве.* — Зап. научн. семин. ЛОМИ **32** (1972), 53—58.
4. С. Ю. Маслов, Ю. В. Матиясевич, Г. Е. Минц, В. П. Оревков, А. О. Слисенко, *Николай Александрович Шанин (к шестидесятилетию со дня рождения)*, УМН **35**, вып. 2(212) (1980), 241–245.
5. В. И. Малыхин, В. И. Пономарев, *Общая топология (Теоретико-множественное направление)*, Алгебра, Топология, Геометрия' (Итоги науки и техники) **13** (1975), 149–229.
6. А. А. Марков, *Избранные труды.* Т.II. Теория алгорифмов и конструктивная математика,математическая логика, информатика и смежные вопросы. М., Изд-во МЦНМО, 2003.
7. В. П. Одинец, *Судьба двух математиков: отца и сына Перельманов.* — Вестник Сыктывкарского университета. Сер. 1: Математика. Механика. Информатика **4** (37) (2020), 51–65.
8. Николай Александрович Шанин. (Некролог.) УМН, 2013 г. июль–август т. 68, вып. 4 (412)
9. Н. А. Шанин, *О произведении топологических пространств.* — Тр. МИАН СССР **24** (1948), 3—112.

[9]Заметим, что множество конструктивных вещественных чисел не является несчетным. В рамках этой теории и такие утверждения, как теорема 51, процитированная выше, оказываются необоснованными.

Soloviev S. V. On early period of N. A. Shanin's scientific biography.

Early "topological" period in the scientific biography of N. A. Shanin (before his turning to constructivism) is considered on the basis of the letters by P. S. Alexandroff and A. A. Markov to N. A. Shanin (1941–47) and their reports on his doctoral thesis ("state doctorate", 1945).

IRIT, Université de Toulouse
118 route de Narbonne
31062 Toulouse, France;
ЛЭТИ, ул проф. Попова. д.5,
Санкт-Петербург, Россия
E-mail: soloviev@irit.fr

Поступило 20 октября 2023 г.