Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 528, 2023 г.

В. Р. Крым

ОБ ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНОМ ОТОБРАЖЕНИИ ГЕОДЕЗИЧЕСКИХ В СУБРИМАНОВОЙ ГЕОМЕТРИИ

§1. Введение

Распределением на гладком многообразии N называется семейство подпространств $\mathcal{A}(x) \subset T_xN$, гладко параметризованное точками многообразия. В каждой точке $x \in N$ на $\mathcal{A}(x)$ определена квадратичная форма $\langle u, u\rangle_x$, $u \in \mathcal{A}(x)$, т.е. метрический тензор $g_{ij}(x) = \langle e_i, e_j\rangle_x$, где $\{e_i\}$ – базис распределения. Метрический тензор распределения гладко зависит от точки. Абсолютно непрерывный путь $x(t)$ называется допустимым, если $x'(t) \in \mathcal{A}(x(t))$ при почти всех t. В субримановой геометрии метрический тензор $g_{ij}(x)$ распределения положительно определен. По теореме Рашевского–Чжоу, если распределение вполне неголономно и риманово многообразие связно, то любые две точки многообразия можно соединить допустимой геодезической.

Оценку множества достижимости в субримановой геометрии дает *теорема о параллелепипеде* [1–3]. Для вполне неголономного распределения на римановом многообразии существуют такие координаты x^i, что множество достижимости оценивается сверху и снизу множеством $|x^i| \leqslant \varepsilon^{\varphi(i)}$, где целочисленная функция φ определяется флагом распределения, т.е. его последовательными коммутаторами. Эти координаты называются привилегированными [4].

Задачу о допустимых геодезических обычно рассматривают в кокасательном расслоении T^*N, т.е. в импульсном представлении. Но более естественно рассмотреть смешанное расслоение, т.е. использовать все независимые компоненты вектора скорости и все импульсы, соответствующие аннулятору распределения. Эта задача решена в предположении, что в касательном расслоении многообразия определена горизонтальная проекция на распределение (структура расслоенного пространства). Связность, которая возникает при решении вариационной задачи, оказывается римановой pr-симметричной связностью.

Ключевые слова: субриманова геометрия, допустимые геодезические, анормальные геодезические, неголономные распределения.

Мы рассматриваем свойства экспоненциального отображения $\exp_x^\lambda u$, где $u \in \mathcal{A}(x)$, $x \in N$ – точка многообразия N, λ – вектор из $n-m$ начальных значений множителей Лагранжа. Оказывается, что при $\lambda = 0$ дифференциал этого отображения $d_0 \exp_x^0 = \mathrm{id}_{\mathcal{A}(x)}$ (второе касательное пространство канонически отождествлено с первым). Это отображение по совокупности аргументов будет диффеоморфизмом в некоторой окрестности точки $(u, \lambda) \in (\mathcal{A}(x) \setminus \{O\}) \times \mathbb{R}^{n-m}$, достаточно близкой к нулю, если, например, распределение является *сильно скобочно порождающим* [5,6], $u \neq 0$ и метрический тензор распределения положительно определен.

Мы также рассматриваем уравнения допустимых геодезических на трехмерных группах Ли.

§2. Уравнения Эйлера–Лагранжа допустимых геодезических

Рассмотрим m-мерное распределение на многообразии размерности n. Предположим, что распределение $\mathcal{A}$ задано семейством дифференциальных форм $\{\omega^\alpha\}_{\alpha=m+1,\ldots,n}$: $\mathcal{A}(x) = \{u \in T_xN \mid \omega^\alpha(u) = 0,\ \alpha = m{+}1, \ldots, n\}$ для всех $x \in U$, $U \subset N$ – некоторая область. Рассмотрим классическую задачу вариационного исчисления: найти абсолютно непрерывную вектор-функцию, которая доставляет экстремум функционалу

$$E(x(\cdot)) = \frac{1}{2}\int\limits_{t_0}^{T} \langle \dot{x}(t), \dot{x}(t)\rangle\, dt \tag{1}$$

на множестве абсолютно непрерывных путей $\gamma : [t_0, T] \to N$ при ограничениях $\omega^\alpha(\dot{x}) = 0$, $\alpha = m{+}1, \ldots, n$, и при закрепленных концах: $x(t_0) = x_0$, $x(T) = x_1$. Пусть в окрестности точки x_0 задана система координат $(x^k)_{k=1,\ldots,n}$. Обозначим $\partial_k = \dfrac{\partial}{\partial x^k}$ – координатные векторные поля. Предположим, что базис распределения имеет вид

$$e_k = \partial_k - \sum_{\alpha=m+1}^{n} A_k^\alpha \partial_\alpha, \quad k = 1, \ldots, m. \tag{2}$$

Тогда

$$\omega^\alpha = \sum_{s=1}^{m} A_s^\alpha dx^s + dx^\alpha, \quad \alpha = m{+}1, \ldots, n. \tag{3}$$

Вектор скорости $u = \dot{x}$ можно разложить по базисным векторным полям распределения:

$$u(t) = \sum_{k=1}^{m} v^k(t)\, e_k(x(t)). \tag{4}$$

Тогда $\langle u, u\rangle_x = \sum\limits_{i,j=1}^{m} g_{ij}(x) v^i v^j = \sum\limits_{i,j=1}^{m} g_{ij}(x) u^i u^j$, т.к. $u^k = v^k$, $k = 1, \ldots, m$, в силу выбора базиса (2). Функция Лагранжа для рассматриваемой задачи имеет вид

$$\mathcal{L}(x, u, \lambda) = \frac{a_0}{2}\langle u, u\rangle_x + \sum_{\alpha=m+1}^{n} \lambda_\alpha \omega^\alpha(u). \tag{5}$$

Ковариантная производная ∇ в субримановой геометрии определена для горизонтальных векторных полей X, Y и $\nabla_X Y$ также горизонтальное векторное поле. Условие римановости определяется как обычно, а в условие симметричности связности необходимо ввести проекцию на распределение: $\nabla_X Y - \nabla_Y X = \mathrm{pr}([X, Y])$, где $\mathrm{pr} = \sum\limits_{k=1}^{m} e_k \otimes dx^k$ [7–10]. Тогда для любых горизонтальных векторных полей X, Y, Z

$$\begin{aligned} 2\langle \nabla_X Y, Z\rangle = (X\langle Y, Z\rangle - \langle Y, \mathrm{pr}[X, Z]\rangle) + (Y\langle Z, X\rangle - \langle X, \mathrm{pr}[Y, Z]\rangle) \\ - (Z\langle X, Y\rangle - \langle Z, \mathrm{pr}[X, Y]\rangle). \end{aligned} \tag{6}$$

Ковариантная производная вектора скорости кривой вдоль пути $\left(\dfrac{Du}{dt}\right)^l = \dot{u}^l + \sum\limits_{i,j=1}^{m} \Gamma^l_{ij} u^i u^j$, причем связность на распределении зависит не только от метрического тензора, но и от распределения:

$$\Gamma^l_{pr} = \frac{1}{2}\sum_{q=1}^{m} g^{lq} \sum_{i=1}^{n}\Big(e^i_r \frac{\partial g_{pq}}{\partial x^i} + e^i_p \frac{\partial g_{rq}}{\partial x^i} - e^i_q \frac{\partial g_{pr}}{\partial x^i}\Big), \quad l, p, r = 1, \ldots, m. \tag{7}$$

Так как $\omega^\alpha(e_k) = 0$, то

$$d\omega^\alpha(u, e_k) = \sum_{j=1}^{m} d\omega^\alpha(e_j, e_k) v^j = -\sum_{j=1}^{m} \omega^\alpha([e_j, e_k]) v^j.$$

Этот коммутатор можно выразить через структурные постоянные распределения $\mathcal{A}$: $[e_j, e_k] = \sum\limits_{s=1}^{n} c^s_{jk}\partial_s$. В базисе (2) все $c^s_{jk} = 0$ для $s, j, k = 1, \ldots, m$, и $\omega^\alpha(\partial_\beta) = \delta^\alpha_\beta$, $\alpha, \beta = m{+}1, \ldots, n$. Поэтому $\omega^\alpha([e_j, e_k]) = c^\alpha_{jk}$.

Введем обозначение $F_s^{\alpha l} = \sum\limits_{k=1}^{m} g^{lk} c_{ks}^{\alpha}$, где $(g^{lk})_{l,k=1,..,m}$ – матрица, обратная к матрице метрического тензора распределения. Тогда

$$\begin{cases} a_0 \left(\dfrac{Du}{dt}\right)^l + \displaystyle\sum_{\alpha=m+1}^{n} \lambda_\alpha \sum_{s=1}^{m} F_s^{\alpha l} u^s = 0, \quad l = 1, \ldots, m, \\ \dot{\lambda}_\beta - \displaystyle\sum_{\alpha=m+1}^{n} \lambda_\alpha \sum_{s=1}^{m} \frac{\partial A_s^\alpha}{\partial x^\beta} u^s - \frac{a_0}{2} \sum_{i,j=1}^{m} \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^\beta} u^i u^j = 0, \quad \beta = m+1, \ldots, n. \end{cases} \tag{8}$$

Теорема 1. *Решение вариационной задачи* (1) *почти везде удовлетворяет системе уравнений* (8). *Если* $a_0 \neq 0$, *то это система дифференциальных уравнений. Если* $a_0 = 0$, *то это уравнение на нулевое собственное значение.*

В частности, решениями неголономной вариационной задачи могут быть *анормальные геодезические*, т.е. кривые, которые доставляют экстремум функционалу длины, но не удовлетворяют регулярным уравнениям Эйлера–Лагранжа [11–16].

При движении вдоль регулярной геодезической норма вектора скорости сохраняется. Действительно,

$$\frac{d}{dt}\langle u, u\rangle = 2\left\langle \frac{Du}{dt}, u \right\rangle = -2 \sum_{\alpha=m+1}^{n} \lambda_\alpha F^\alpha(u, u) = 0,$$

где $\hat{F}^\alpha$ – это отображение, определяемое матрицей $(F_s^{\alpha l})_{s,l=1,..,m}$.

В силу $\omega^\alpha(\partial_\beta) = \delta_\beta^\alpha$, $\alpha, \beta = m+1, \ldots, n$, и $\omega^\alpha(u) = 0$, $d\omega^\alpha(u, \partial_\beta) = -\omega^\alpha([u, \partial_\beta]) = -\sum\limits_{k=1}^{m} c_{k\beta}^\alpha v^k$. Поэтому второе слагаемое в уравнении для множителей Лагранжа равно $\sum\limits_{\alpha=m+1}^{n} \lambda_\alpha \sum\limits_{k=1}^{m} c_{k\beta}^\alpha v^k$. Если для распределения выполняется условие цикличности по x^α, т.е. метрический тензор распределения g_{ij} и потенциалы A_k^α не зависят от координат x^α, $\alpha = m+1, \ldots, n$, то $c_{k\beta}^\alpha = 0$, $k = 1, \ldots, n$, и $\dfrac{\partial g_{ij}}{\partial x^\alpha} = 0$. Тогда $\dot{\lambda}_\alpha = 0$, т.е. $\lambda_\alpha = \mathrm{const}$. В физике это соответствует закону сохранения электрического заряда (или зарядов, для более общих расслоенных пространств) [17, 18].

В субримановой геометрии начальные данные задачи Коши состоят не только из начальной скорости, т.е. допустимого вектора $u \in \mathcal{A}(x_0)$, но и ковектора ω_{x_0}, поскольку необходимо задать начальные значения для множителей Лагранжа. Дифференциальные формы $\{\omega^\alpha | \alpha = m+1, \ldots, n\}$ задают кораспределение $\mathcal{A}^\perp$ в T^*N, дуальное к распределению $\mathcal{A}$ («аннулятор распределения»). Расслоение ken$\mathcal{A} = \mathcal{A} \oplus \mathcal{A}^\perp$ над N называется *смешанным расслоением («кентавром»)*, порожденным распределением $\mathcal{A}$. Идея рассмотрения смешанного касательного пучка была высказана в работе [1, стр. 20]. Смешанное расслоение есть фазовое пространство для неголономных динамических систем. Уравнения Эйлера—Лагранжа для неголономной задачи определяют векторное поле в смешанном расслоении. Возникает задача о нахождении *неголономного геодезического потока* в $\mathcal{A} \oplus \mathcal{A}^\perp$, предложенная А.М. Вершиком.

§3. Дифференциал экспоненциального отображения

Если путь $x(\,\cdot\,)$ удовлетворяет системе уравнений (4), (8) при $a_0 = 1$, то этот путь называется *регулярной* допустимой геодезической. Далее мы рассматриваем только регулярные допустимые геодезические.

Лемма 1. *Пусть $x \circ \varphi$ – репараметризация геодезической, причем $\varphi(t) = ct$, $c = \mathrm{const}$. Тогда $(x \circ \varphi, c\lambda \circ \varphi)$ является решением системы* (4), (8).

Пусть γ_u^λ – геодезическая с начальными значениями λ и начальным вектором скорости $u \in \mathcal{A}(x)$, выходящая из точки $x \in N$. В силу леммы 1, $\gamma_{tu}^{t\lambda}(1) = \gamma_u^\lambda(t)$. Для некоторой точки $x \in N$ и любого вектора $(u, \lambda) \in \mathcal{A}(x) \times \mathbb{R}^{n-m}$ обозначим $\exp_x^\lambda u = \gamma_u^\lambda(1)$, если геодезическая γ_u^λ продолжима до значения параметра $t = 1$. Отображение $\exp_x$, действующее по правилу $\exp_x^\lambda u = \gamma_u^\lambda(1)$, называется *экспоненциальным отображением*. В связи с этим возникает вопрос, чему равен дифференциал отображения $(u, \lambda) \mapsto \gamma_u^\lambda(1)$. Рассмотрим сначала часть этого дифференциала для случая фиксированных значений λ.

Теорема 2. *Для любой точки $x \in N$ существует такая окрестность Λ нуля в пространстве $\mathbb{R}^{n-m}$, что для любого $\lambda \in \Lambda$ существует такая окрестность V нуля в пространстве $\mathcal{A}(x)$, что экспоненциальное отображение $\exp_x^\lambda$ определено для всех $u \in V$ и является диффеоморфизмом окрестности V на ее образ $\exp_x^\lambda V$ в N.*

Отображение $(u, \lambda) \mapsto \exp_{x_0}^\lambda(u)$ по совокупности аргументов не является диффеоморфизмом ни для какой окрестности нуля в $\mathcal{A}(x_0) \times$

$\mathbb{R}^{n-m}$, так как $\gamma_0^\lambda(1) = x_0$ при всех λ. Но, если взять проколотую в точке $u = 0$ окрестность нуля $\dot{V} \subset \mathcal{A}(x_0)$ и некоторую окрестность нуля $\Lambda \subset \mathbb{R}^{n-m}$, и если распределение вполне неголономно, то это отображение на $\dot{V} \times \Lambda$, как правило, будет диффеоморфизмом.

Предположим, что для распределения и для метрического тензора распределения выполняется условие цикличности по $(x^\alpha)_{\alpha=m+1,\ldots,n}$. Тогда уравнения (регулярных) допустимых геодезических имеют вид

$$\begin{cases} \dot{x}^l = u^l = \sum\limits_{s=1}^m v^s e_s^l, \quad l = 1, \ldots, n, \\ \dot{v}^l = -\sum\limits_{i,j=1}^m \Gamma_{ij}^l v^i v^j - \sum\limits_{s=1}^m \sum\limits_{\alpha=m+1}^n \lambda_\alpha F_s^{\alpha l} v^s, \quad l = 1, \ldots, m, \\ \dot{\lambda}_\beta = 0, \quad \beta = m+1, \ldots, n. \end{cases} \tag{9}$$

В статье [6] было показано, что матрица дифференциала экспоненциального отображения геодезических $\exp_x^\lambda u$ в точке $(vt, \lambda t)$ имеет вид $\begin{pmatrix} \frac{dx^l}{dv^i} & \frac{dx^\alpha}{dv^i} \\ \frac{dx^l}{d\lambda_\beta} & \frac{dx^\alpha}{d\lambda_\beta} \end{pmatrix}$

$$= \begin{pmatrix} \delta_i^l & \frac{1}{2}\sum\limits_{k=1}^m \left(\dfrac{\partial e_k^\alpha}{\partial x^i} + \dfrac{\partial e_i^\alpha}{\partial x^k}\right) v^k t \\ -\frac{1}{2}\sum\limits_{s=1}^m F_s^{\beta l} v^s t & -\frac{1}{6}\sum\limits_{j,k=1}^m \left(\dfrac{\partial e_j^\alpha}{\partial x^k} + 2\dfrac{\partial e_k^\alpha}{\partial x^j}\right) v^j \sum\limits_{s=1}^m F_s^{\beta k} v^s t^2 \end{pmatrix} \tag{10}$$

Если эту матрицу привести к верхнетреугольной форме, получим

Теорема 3. *Пусть для распределения выполняется условие цикличности по $(x^\alpha)_{\alpha=m+1,\ldots,n}$. Пусть матрица $(\langle \hat{F}^\alpha v, \hat{F}^\beta v \rangle)_{\alpha,\beta=m+1,\ldots,n}$ невырождена для некоторого вектора $v \in \mathcal{A}(x_0)$, $x_0 \in N$ и $\lambda \in \mathbb{R}^{n-m}$, причем $|v|^2+|\lambda|^2 = 1$. Тогда при достаточно малых $t \neq 0$ отображение $\exp_{x_0}$ по совокупности аргументов является диффеоморфизмом для некоторой окрестности точки $(vt, \lambda t)$.*

Здесь $\hat{F}^\alpha$ – тензор $F^\alpha = (F_{ij}^\alpha)_{i,j=1,\ldots,m}$ с поднятым вторым индексом (подъем индекса осуществляется с помощью матрицы обратного метрического тензора распределения). Из этой теоремы следует теорема Стрихартца [5, с. 241] для сильно скобочно порождающих распределений. Для двумерного распределения на трехмерном многообразии формула (10) принимает вид

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{2}\sum\limits_{k=1}^{2}\left(\dfrac{\partial A_k}{\partial x^1}+\dfrac{\partial A_1}{\partial x^k}\right)v^k t \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2}\sum\limits_{k=1}^{2}\left(\dfrac{\partial A_k}{\partial x^2}+\dfrac{\partial A_2}{\partial x^k}\right)v^k t \\ -\frac{1}{2}\sum\limits_{s=1}^{2}F_s^1 v^s t & -\frac{1}{2}\sum\limits_{s=1}^{2}F_s^2 v^s t & \frac{1}{6}\sum\limits_{j,k=1}^{2}\left(\dfrac{\partial A_j}{\partial x^k}+2\dfrac{\partial A_k}{\partial x^j}\right)v^j\sum\limits_{s=1}^{2}F_s^k v^s t^2 \end{pmatrix} \tag{11}$$

Отметим также, что точки Якоби являются критическими точками экспоненциального отображения геодезических [19, 20]

§4. Уравнения допустимых геодезических на группах Ли

Каждому элементу g группы Ли G сопоставляют отображение *левого сдвига* $L_g : G \to G$, действующее по правилу $L_g h = gh$. Векторное поле X на группе Ли G называют *левоинвариантным*, если для всех $g, h \in G$ $(d_h L_g)X(h) = X(gh)$. Риманова (или псевдориманова) метрика $\langle\cdot,\cdot\rangle$ на группе Ли G называется *левоинвариантной*, если для всех $g, h \in G$ и всех $\xi, \eta \in T_h G$ $\langle (d_h L_g)\xi, (d_h L_g)\eta\rangle_{gh} = \langle \xi, \eta\rangle_h$. Касательное пространство в единице группы Ли является алгеброй Ли этой группы. Пусть $(\,\cdot\,,\,\cdot\,)$ – некоторое скалярное произведение в алгебре Ли. Тогда левоинвариантную метрику можно получить как $\langle (dL_g)\xi, (dL_g)\eta\rangle_g = (\xi, \eta)$ [21].

Рассмотрим левоинвариантные распределения на группе Ли с левоинвариантным метрическим тензором [1, 22–24]. Тогда любая допустимая геодезическая левоинвариантна, вектор $\gamma(t)^{-1}\dot\gamma(t)$ принадлежит алгебре Ли. Будем считать, что метрический тензор распределения приведен к “постоянному” виду и $h_{ij} = (e_i, e_j)$ – скалярное произведение в алгебре Ли. Тогда по формуле Кошуля (7) получаем, что

$$\left\langle \frac{D\dot\gamma}{dt}, \xi_k \right\rangle = \sum_{s=1}^{m} h_{ks}\dot v^s + \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{m}(c_{j|ki} + c_{i|kj})v^i v^j, \quad k = 1, \ldots, m, \tag{12}$$

где $c_{j|ki} = \sum\limits_{s=1}^{m} h_{js} c_{ki}^{s}$. Уравнение для управляющего вектора (8) принимает вид

$$a_0\Big(\sum_{s=1}^{m} h_{ks}\dot{v}^s + \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{m}(c_{j|ki} + c_{i|kj})v^i v^j\Big) + \sum_{\alpha=m+1}^{n} \lambda_\alpha \sum_{q=1}^{m} c_{kq}^{\alpha} v^q = 0,$$
$$k = 1, \ldots, m. \quad (13)$$

Уравнение для множителей Лагранжа

$$a_0 \sum_{i,j=1}^{m} c_{j|\beta i}\, v^i v^j + \dot{\lambda}_\beta + \sum_{\alpha=m+1}^{n} \lambda_\alpha \sum_{q=1}^{m} c_{\beta q}^{\alpha} v^q = 0, \quad \beta = m{+}1, \ldots, n, \quad (14)$$

где $c_{j|\beta i} = \sum\limits_{s=1}^{m} h_{js} c_{\beta i}^{s}$.

Рассмотрим уравнения допустимых геодезических на трехмерных группах Ли. На трехмерных группах Ли только двумерные распределения нетривиальны [1, 22]. Структурные константы на группах Ли удовлетворяют тождеству Якоби:

$$\sum_{r=1}^{3}\big(c_{ij}^{r} c_{rk}^{l} + c_{jk}^{r} c_{ri}^{l} + c_{ki}^{r} c_{rj}^{l}\big) = 0, \quad i, j, k, l = 1, \ldots, 3. \quad (15)$$

Будем считать, что распределение $\mathcal{A}$ порождается векторными полями e_1, e_2. На трехмерных группах Ли, кроме разрешимых групп, можно считать, что $[e_1, e_2] = e_3$. Тогда $c_{12}^{1} = c_{12}^{2} = 0$, $c_{12}^{3} = 1$, и тождество Якоби превращается в систему уравнений

$$\left\{\begin{array}{l} c_{13}^{1} = -c_{23}^{2} \\ c_{23}^{1} c_{13}^{3} - c_{13}^{1} c_{23}^{3} = 0 \\ c_{23}^{2} c_{13}^{3} - c_{13}^{2} c_{23}^{3} = 0. \end{array}\right. \quad (16)$$

Это следует из уравнений (15) при $i = 1$, $j = 2$, $k = 3$. Если $c_{23}^{1} c_{13}^{2} - c_{13}^{1} c_{23}^{2} \neq 0$, то $c_{13}^{3} = 0$ и $c_{23}^{3} = 0$. Для группы верхнетреугольных матриц соотношение $c_{23}^{1} c_{13}^{2} - c_{13}^{1} c_{23}^{2} \neq 0$ не выполняется, но в базисе (18) равенства $c_{13}^{3} = 0$ и $c_{23}^{3} = 0$ сохраняются[1]. На трехмерных группах Ли нет анормальных геодезических, т.к. в силу (13), если $a_0 = 0$, то $\lambda = 0$. Следовательно, $a_0 = 1$. Уравнения допустимых геодезических

[1] Авторами [1, 22] не было получено уравнение $c_{13}^{3} = 0$ при $c_{23}^{1} c_{13}^{2} - c_{13}^{1} c_{23}^{2} \neq 0$.

на трехмерных группах Ли, кроме групп с разрешимой алгеброй Ли, имеют вид

$$\begin{cases} \dot v_1 = -\lambda v^2 \\ \dot v_2 = \lambda v^1 \\ \dot\lambda + c_{1|31}(v^1)^2 + (c_{1|32} + c_{2|31})v^1 v^2 + c_{2|32}(v^2)^2 = 0, \end{cases} \tag{17}$$

где $\dot v_k = \sum\limits_{s=1}^{2} h_{ks}\dot v^s$ и $c_{j|3i} = \sum\limits_{s=1}^{2} h_{js}c^s_{3i}$. Метрический тензор h_{ij} приведем к наиболее простому виду с помощью автоморфизмов алгебры Ли. Пусть $e'_1 = A_{11}e_1 + A_{12}e_2$, $e'_2 = A_{21}e_1 + A_{22}e_2$. Тогда $[e'_1, e'_2] = (A_{11}A_{22} - A_{12}A_{21})[e_1, e_2]$. Так как $[e_1, e_2] = e_3$ и вектор e_3 не меняется, $\det A = 1$. Другие свойства этих автоморфизмов будут определены ниже.

Перечислим коммутационные соотношения и соответствующие уравнения движения для трехмерных групп Ли. Классификация трехмерных вещественных алгебр Ли с точностью до изоморфизма хорошо известна [25, с. 211]. Трехмерный тор мы рассматривать не будем, т.к. на этой группе нет неголономных двумерных левоинвариантных распределений.

1). На группе верхнетреугольных матриц

$$[e_1, e_2] = e_3, \quad [e_1, e_3] = 0, \quad [e_2, e_3] = 0. \tag{18}$$

Так как $[e'_1, e_3] = [A_{11}e_1 + A_{12}e_2, e_3] = 0$ и $[e'_2, e_3] = [A_{21}e_1 + A_{22}e_2, e_3] = 0$, матрица A — произвольная с $\det A = 1$. Метрический тензор можно привести к собственным числам χ_1, χ_2 при помощи вращения. Будем рассматривать задачу с точностью до изометрии. Тогда, умножая метрический тензор на число, если метрический тензор положительно определен, то можно считать, что $\chi_1 = 1/\chi_2$. Этот метрический тензор приводится к единичному автоморфизмами. Следовательно, уравнения геодезических имеют вид

$$\dot v^1 = -\lambda v^2, \quad \dot v^2 = \lambda v^1, \quad \dot\lambda = 0. \tag{19}$$

На этой группе все двумерные неголономные левоинвариантные распределения лежат на одной орбите относительно действия группы автоморфизмов алгебры Ли ([1, с. 28], [22]).

2). Группы с разрешимой алгеброй Ли:

$$[e_1, e_2] = b_{11}e_1 + b_{12}e_3, \quad [e_2, e_3] = b_{21}e_1 + b_{22}e_3, \quad [e_3, e_1] = 0, \tag{20}$$

где матрица b — одна из пяти возможных: а) $\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$, б) $\begin{pmatrix}-1 & -1\\ 0 & 1\end{pmatrix}$, в) $\begin{pmatrix}-a & -1\\ -1 & a\end{pmatrix}$, г) $\begin{pmatrix}-a & 1\\ -1 & a\end{pmatrix}$, где $a \neq 1$, д) $\begin{pmatrix}-1 & 1\\ -1 & 1\end{pmatrix}$. Из (13), (14) следует, что уравнения геодезических имеют вид

$$\dot{v}_1 + \sum_{i,j=1}^{2} c_{i|1j} v^i v^j = -\lambda v^2, \quad \dot{v}_2 + \sum_{i,j=1}^{2} c_{i|2j} v^i v^j = \lambda v^1,$$
$$\dot{\lambda} + \sum_{i,j=1}^{2} c_{i|3j} v^i v^j - \lambda b_{22} v^2 = 0, \tag{21}$$

где $\dot{v}_k = \sum\limits_{s=1}^{2} h_{ks}\dot{v}^s$. Например, если $h_{ij} = \delta_{ij}$ (единичная матрица), то

$$\dot{v}^1 + b_{11}v^1v^2 = -\lambda v^2, \quad \dot{v}^2 - b_{11}(v^1)^2 = \lambda v^1, \quad \dot{\lambda} - b_{21}v^1v^2 - \lambda b_{22}v^2 = 0. \tag{22}$$

На этой группе все двумерные неголономные левоинвариантные распределения лежат на одной орбите относительно действия группы автоморфизмов алгебры Ли ([1, с. 28], [22]) (в случае (а) неголономных распределений нет).

3). На группе $SO(3)$ **ортогональных матриц** реализуется алгебра Ли кососимметрических матриц 3×3:

$$[e_1, e_2] = e_3, \quad [e_2, e_3] = e_1, \quad [e_3, e_1] = e_2. \tag{23}$$

Так как $[e_1', e_3] = [A_{11}e_1 + A_{12}e_2, e_3] = -A_{11}e_2 + A_{12}e_1 = -(A_{21}e_1 + A_{22}e_2)$ и $[e_2', e_3] = [A_{21}e_1 + A_{22}e_2, e_3] = -A_{21}e_2 + A_{22}e_1 = A_{11}e_1 + A_{12}e_2$, получаем, что единственно возможный вариант для матрицы A — это матрица вращения. Метрический тензор вращениями приводится к собственным числам, а т.к. мы рассматриваем задачу с точностью до изометрии, можно считать, что $h = \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & \chi\end{pmatrix}$. Уравнения геодезических имеют вид

$$\dot{v}^1 = -\lambda v^2, \quad \chi\dot{v}^2 = \lambda v^1, \quad \dot{\lambda} = 0. \tag{24}$$

На этой группе все двумерные неголономные левоинвариантные распределения лежат на одной орбите относительно действия группы автоморфизмов алгебры Ли ([1, с. 29], [22]).

4). На группе матриц $SL(2)$ с определителем 1 реализуется алгебра Ли матриц 2×2 с нулевым следом:

$$[e_1, e_2] = e_3, \quad [e_2, e_3] = 2e_2, \quad [e_3, e_1] = 2e_1. \tag{25}$$

Так как $[e_1', e_3] = [A_{11}e_1 + A_{12}e_2, e_3] = -2A_{11}e_1 + 2A_{12}e_2 = -2(A_{11}e_1 + A_{12}e_2)$ и $[e_2', e_3] = [A_{21}e_1 + A_{22}e_2, e_3] = -2A_{21}e_1 + 2A_{22}e_2 = 2(A_{21}e_1 + A_{22}e_2)$, получаем, что матрица $A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 1/a \end{pmatrix}$. Такими преобразованиями привести метрический тензор к диагональному виду нельзя. Уравнения геодезических имеют вид

$$\dot{v}_1 = -\lambda v^2, \quad \dot{v}_2 = \lambda v^1, \quad \dot{\lambda} + c_{1|31}(v^1)^2 + (c_{1|32} + c_{2|31})v^1 v^2 + c_{2|32}(v^2)^2 = 0, \tag{26}$$

где $\dot{v}_k = \sum\limits_{s=1}^{2} h_{ks}\dot{v}^s$ и $c_{j|3i} = \sum\limits_{s=1}^{2} h_{js}c_{3i}^s$. На этой группе все двумерные неголономные левоинвариантные распределения распадаются в объединение двух орбит. Представителями орбит неголономных распределений на $SL(2)$ являются распределения $\mathrm{Lin}\{\xi_1, \xi_2\}$ и $\mathrm{Lin}\{\xi_3, \xi_1 + \xi_2\}$ ([1, с. 29], [22]).

На группе матриц $SL(2)$ с определителем 1 можно также выбрать базис, в котором коммутационные соотношения имеют вид $[e_1, e_2] = e_3$, $[e_2, e_3] = e_1$, $[e_3, e_1] = -e_2$. Тогда матрица A — гиперболическое вращение, т.е. метрический тензор также (как и выше), вообще говоря, не диагонален.

Список литературы

1. А. М. Вершик, В. Я. Гершкович, *Неголономные динамические системы, геометрия распределений и вариационные задачи.* — Итоги Науки и Техники, сер. Совр. Пробл. Мат., Фунд. Напр. **16** (1987), 5–85.
2. В. Я. Гершкович, *Двусторонние оценки метрик, порожденных абсолютно неголономными распределениями на римановых многообразиях.* — Докл. АН **278**, No. 5 (1984), 1040–1044.
3. А. М. Вершик, В. Я. Гершкович, *Оценка функциональной размерности пространства орбит ростков распределений общего положения.* — Матем. заметки **44:** (1988), 596–603.
4. M. Gromov, *Carnot—Carathéodory spaces seen from within.* — Sub-Riemannian geometry. Proceedings of the satellite meeting of the first European congress of mathematics 'Journées nonholonomes: géométrie sous-riemannienne, théorie du contrôle, robotique', Paris, France, June 30–July 1, 1992, pages 79–323. Basel: Birkhäuser, 1996.
5. R. S. Strichartz, *Sub-Riemannian geometry.* — J. Differ. Geom. **24** (1986), 221–263.

6. В. Р. Крым, *Неголономные геодезические как решения интегральных уравнений Эйлера–Лагранжа и дифференциал экспоненциального отображения.* — Вестн. С.-Петерб. ун-та. Сер. 1 **3** (2009), 31–40.
7. Е. М. Горбатенко, *Дифференциальная геометрия неголономных многообразий* (по В. В. Вагнеру). — Геом. сб. Томского ун-та **26** (1985), 31–43.
8. В. Р. Крым, Н. Н. Петров, *Уравнения движения заряженной частицы в пятимерной модели общей теории относительности с четырехмерным неголономным пространством скоростей.* — Вестн. С.-Петерб. ун-та. Сер. 1 **1** (2007), 62–70.
9. В. Р. Крым, Н. Н. Петров, *Тензор кривизны и уравнения Эйнштейна для четырехмерного неголономного распределения.* — Вестн. С.-Петерб. ун-та. Сер. 1 **3** (2008), 68–80.
10. В. Р. Крым, *Тензор кривизны Схоутена и уравнение Якоби в субримановой геометрии.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **498** (2020), 121–134.
11. Н. Н. Петров, *Существование анормальных кратчайших геодезических в субримановой геометрии.* — Вестн. С.-Петерб. ун-та. Сер. 1. Вып. 3 **15** (1993), 28–32.
12. Н. Н. Петров, *О кратчайших субримановых геодезических.* — Дифференц. уравнения **30**, No. 5 (1994), 768–775.
13. R. Montgomery, *Abnormal minimizers.* — SIAM J. Control Optim. **32**, No. 6 (1994), 1605–1620.
14. R. Montgomery, *A survey of singular curves in sub-Riemannian geometry.* — J. Dyn. Control Syst. **1**, No. 1 (1995), 49–90.
15. B. Bonnard, M. Chyba, *Singular trajectories and their role in control theory*, Vol. 40. Paris: Springer, 2003.
16. А. А. Аграчев, Ю. Л. Сачков, *Геометрическая теория управления.* М., Физматлит, 2005.
17. V. R. Krym, *The Schouten Curvature for a Nonholonomic Distribution in Sub-Riemannian Geometry and Jacobi Fields. — CEUR Workshop Proceedings* **2098** (2018), 213–227.
18. V. R. Krym, *Comparison of basic equations of the Kaluza–Klein theory with the nonholonomic model of space–time of the sub-Lorentzian geometry.* — Int. J. Modern Physics A **38**, No. 9–10 (2023), 2350049.
19. В. Р. Крым, *Уравнение Якоби для горизонтальных геодезических на неголономном распределении и тензор кривизны Схоутена.* — Дифф. Ур. Проц. Упр. **3** (2018), 64–94.
20. В. Р. Крым, *Поля Якоби для неголономного распределения.* — Вестн. С.-Петерб. ун-та. Сер. 1 **4** (2010), 51–61.
21. Ю. Д. Бураго, В. А. Залгаллер, *Введение в риманову геометрию.* СПб., Наука, 1994.
22. А. М. Вершик, В. Я. Гершкович, *Геометрия неголономной сферы трехмерных групп Ли.* — Геометрия и теория особенностей в нелинейных уравнениях. Новое в глобальном анализе. Воронеж, стр. 61–75 (1987).
23. А. М. Вершик, В. Я. Гершкович, *Расслоение нильпотентных алгебр Ли над неголономным многообразием (нильпотентизация).* — Зап. научн. семин. ЛОМИ **172** (1989), 21–40.

24. А. М. Вершик, В. Я. Гершкович, *Геодезический поток на $SL(2,\mathbb{R})$ с неголономными ограничениями.* — Зап. научн. семин. ЛОМИ **155** (1986), 7–17.
25. Б. А. Дубровин, С. П. Новиков, А. Т. Фоменко, *Современная геометрия.* М., Наука, 1986.

Krym V. R. On the exponential mapping of geodesics in sub-Riemannian geometry.

The equations of admissible geodesics for a nonholonomic distribution on Riemannian manifold are written in the mixed bundle. The differential of the exponential mapping for a nonholonomic distribution with the cyclicity condition for vertical coordinates is calculated. This differential is non-degenerate if the distribution is strongly bracket generating. The equations of admissible geodesics on 3-dimensional Lie groups are studied.

Санкт-Петербургский
Государственный университет
E-mail: v.krym@spbu.ru

Поступило 3 ноября 2023 г.