Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 528, 2023 г.

В. В. Корняк

ОПИСАНИЕ ЭВОЛЮЦИИ КОНЕЧНОМЕРНЫХ КВАНТОВЫХ СИСТЕМ ГРУППАМИ ПЕРЕСТАНОВОК

§1. Введение

В основе квантовой механики лежат две базовые концепции: предположение о том, что эволюция замкнутой системы описывается унитарными преобразованиями в гильбертовом пространстве, и идея наблюдения, формализуемая в понятии наблюдаемой и канонических коммутационных соотношениях между парами наблюдаемых, обеспечивающих получение максимально возможного количества информации о состоянии квантовой системы. Такие пары, часто называемые сопряженными, мы будем называть комплементарными, поскольку на их основе реализуется квантовый принцип дополнительности. Комплементарные наблюдаемые связаны с такими конструкциями и понятиями как каноническое коммутационное соотношение, принцип неопределенности, принцип наименьшего действия, формулировка квантовой механики через интегралы по траекториям и т.п.

В стандартной квантовой механике наблюдаемые определяются как эрмитовы операторы. Некомпактность спектра таких операторов приводит к тому, что канонические коммутационные соотношения, а следовательно и квантовый формализм в целом, могут быть реализованы только в бесконечномерном гильбертовом пространстве.

Однако во многих важных задачах квантовой механики, особенно, в квантовой информатике, размерности гильбертовых пространств неизбежно являются конечными. Мы рассматриваем версию квантовой механики, основанную на перестановочных представлениях конечных групп и квантовую механику конечного фазового пространства

Ключевые слова: принцип дополнительности, конечная квантовая механика, перестановочная эволюция, двойственность Понтрягина, каноническое коммутационное соотношение Вейля, комплементарные наблюдаемые, взаимно несмещенные базисы.

Вейля–Швингера. В обоих случаях возникают идентичные коммутационные соотношения для комплементарных наблюдаемых, в основе которых лежит циклическая перестановка конечного множества. При этом в качестве наблюдаемых используются унитарные операторы вместо эрмитовых.

При изучении конечномерных квантовых систем центральную роль играют теоретико-числовые характеристики размерностей как натуральных чисел. Это приводит к задачам сама формулировка которых невозможна в рамках стандартной (непрерывной) квантовой механики. Исследование подобных задач требует конструктивных подходов с использованием, в частности, теории конечных групп, комбинаторики и теории чисел. Важную роль в таких исследованиях играют методы компьютерной алгебры и вычислительной теории групп.

§2. Основные элементы квантовой механики

2.1. Квантовые состояния. Обозначим N-мерное комплексное гильбертово пространство символом $\mathcal{H}_N$. Пусть $\{|k\rangle\}_{k=0}^{N-1}$ – ортонормированный базис в этом пространстве. *Чистое квантовое состояние* представляет собой единичный вектор

$$|\psi\rangle = \sum_{k=0}^{N-1} a_k \, |k\rangle \tag{1}$$

в пространстве $\mathcal{H}_N$. Здесь $a_0, \ldots, a_{N-1}$—комплексные числа, удовлетворяющие условию нормировки $\sum_{k=0}^{N-1} |a_k|^2 \equiv \langle \psi \mid \psi \rangle = 1$. Чистое состояние также можно записать в виде *матрицы плотности*

$$\rho = |\psi\rangle \langle\psi| \,,$$

которая в данном случае является оператором проектирования ранга 1.

Умножение чистого состояния (1) на фазовый множитель вида $\mathrm{e}^{\mathbf{i}\theta}$, где $\theta \in \mathbb{R}$, не приводит ни к каким физическим последствиям. Однако, если рассматривается *квантовая суперпозиция*, т.е., нормализованная линейная комбинация нескольких чистых состояний, то фазовые множители при компонентах суперпозиции становятся существенными, если они различны.

Смешанное квантовое состояние, представляющее собой взвешенную сумму чистых состояний, описывается матрицей плотности ρ общего вида, т.е., неотрицательной эрмитовой матрицей со следом равным единице.

2.2. Квантовые измерения и наблюдаемые.

Номенклатура квантовых измерений. Наиболее общая схема квантовых измерений, обозначаемая аббревиатурой POVM (positive operator-valued measure), задается набором неотрицательных эрмитовых матриц $\{M_r\}_{r=0}^{m-1}$, $M_r \geqslant 0$, для которого выполняется условие полноты

$$\sum_{r=0}^{m-1} M_r = \mathbb{1}\,.$$

Оператор измерения M_r позволяет, в соответствии с правилом Борна, вычислить вероятность получения результата r при измерении квантового состояния с матрицей плотности ρ

$$\Pr(r) = \operatorname{tr}(\rho M_r)\,.$$

Для чистого состояния $|\psi\rangle$ правило Борна принимает вид

$$\Pr(r) = \langle \psi \,| M_r |\, \psi \rangle\,.$$

Проективные измерения являются частным случаем POVM измерений. В простейшей версии операторы проективных измерений образуют полное множество ортогональных проекторов ранга 1 в N-мерном гильбертовом пространстве

$$\sum_{r=0}^{N-1} M_r = \mathbb{1},$$
$$M_r M_\ell = \delta_{r\ell} M_r. \tag{2}$$

Здесь равенства (2) означают, что матрицы M_r идемпотентны (характеристическое свойство проекторов) и взаимно ортогональны. Проекторы M_r можно представить в виде $M_r = |r\rangle\,\langle r|$ в соответствующем ортонормированном базисе $\{|r\rangle\}_{r=0}^{N-1}$.

Важным для квантовой информатики и конструктивной квантовой теории является специальный тип POVM измерений, называемый SIC-POVM (symmetric informationally complete POVM) или сокращенно

SIC. В этой схеме в качестве операторов измерения используется N^2 проекторов, которые можно задать множеством единичных векторов

$$S = \{|\psi_r\rangle\}_{r=0}^{N^2-1},$$

максимально симметрично расположенных в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}_N$, т.е., угол между двумя различными векторами один и тот же для всего множества S. Борновская вероятность квантовых переходов между различными векторами имеет вид

$$|\langle\psi_r \mid \psi_\ell\rangle|^2 = \frac{1}{N+1}.$$

Схема измерений SIC позволяет провести томографию квантовых состояний, т.е., полностью (в статистическом пределе) восстановить матрицу плотности изучаемого состояния с помощью операторов измерений $M_r = |\psi_r\rangle\langle\psi_r|$.

Наблюдаемые. Традиционно наблюдаемыми в квантовой физике называют эрмитовы операторы, однако мы будем придерживаться несколько более общего определения – мы назовём наблюдаемой произвольный невырожденный нормальный оператор.

Оператор $\mathcal{O}$ называется *нормальным*, если $\mathcal{O}\mathcal{O}^* = \mathcal{O}^*\mathcal{O}$. Это условие обеспечивает диагонализируемость оператора унитарным преобразованием. Иными словами, для оператора $\mathcal{O}$ существует *спектральное разложение*. Нормальный оператор $\mathcal{O}$ называется невырожденным, если в его спектре отсутствуют кратные собственные значения.

Оператор $\mathcal{O}$ определяет ортонормированный базис, состоящий из его собственных векторов, причем, вследствие невырожденности, собственные числа однозначно определяют соответствующие собственные векторы.

Важными частными типами нормальных операторов являются эрмитовы и унитарные операторы. Эрмитовы операторы характеризуются тем, что их спектры лежат на вещественной прямой $\mathbb{R}$. Спектры унитарных операторов лежат на единичной окружности комплексной плоскости. Эту окружность, учитывая то, что ее элементы образуют мультипликативную группу, мы будем обозначать символом $\mathsf{U}(1)$.

С каждым нормальным невырожденным оператором можно связать схему квантовых измерений, удобную для обсуждения комплементарных наблюдаемых и принципа дополнительности. В этой схеме, являющейся частным случаем проективных измерений, возможные результаты измерения соответствуют собственным числам наблюдаемой, которые в свою очередь однозначно определяют собственные векторы. Здесь, фактически, собственные числа в проективных измерениях играют вспомогательную роль меток, позволяющие идентифицировать собственные векторы. Поэтому наблюдаемые, имеющие идентичные собственные базисы, можно считать эквивалентными. Таким образом, формальное описание установки для проведения измерений сводится к выбору конкретного ортонормированного базиса в гильбертовом пространстве, при этом собственные значения, получаемые в результате измерений, служат для идентификации соответствующих собственных подпространств.

2.3. Эволюция. Согласно одному из основных постулатов квантовой теории эволюция замкнутой квантовой системы[1] описывается однопараметрическим семейством унитарных преобразований

$$U^t = \exp\left(-\mathbf{i}\frac{H}{\hbar}t\right) = \exp\left(-\mathbf{i}\frac{H}{\hbar}\right)^t, \tag{3}$$

где эрмитов оператор H называется гамильтонианом, порождающим эволюцию. Заметим, что формула (3) универсальна в том смысле, что любой унитарный оператор может быть представлен в виде экспоненты эрмитова оператора. Группа (конечная или бесконечная), порождаемая одним элементом называется *циклической*. Таким образом, замкнутая квантовая система претерпевает циклическую эволюцию

$$\left|\psi_t\right\rangle = U^t\left|\psi_0\right\rangle, \tag{4}$$

где t – параметр, отождествляемый с физическим временем, а $\left|\psi_0\right\rangle$ и $\left|\psi_t\right\rangle$ – начальное и текущее состояния системы. Если предположить, что время непрерывно, $t \in \mathbb{R}$, то дифференцирование уравнения (4) по времени приводит к уравнению Шредингера

$$\mathbf{i}\hbar\frac{\partial}{\partial t}\left|\psi_t\right\rangle = H\left|\psi_t\right\rangle.$$

[1]Если не рассматривается Вселенная в целом, понятие замкнутой квантовой системы является идеализацией, дающей хорошие приближения во многих случаях.

В конструктивном подходе время предполагается дискретным $t \in \mathbb{Z}$. В этом случае уравнение Шредингера можно получить как приближение в предположении, что минимальный доступный наблюдению интервал времени значительно превосходит единицу.

§3. Квантовая механика, основанная на группах перестановок

Мы будем рассматривать свойства конечномерных квантовых систем в рамках конструктивной модификации квантовой механики [1–4], в которой для описания эволюции вместо общей унитарной группы используются представления конечных групп. Такая замена, в частности, гарантирует унитарность – любое линейное представление конечной группы является унитарным. Кроме того, любое линейное представление конечной группы является подпредставлением некоторого перестановочного представления. Таким образом, описание квантовой эволюции можно в принципе свести к перестановкам некоторого множества.

Понятие группы – одно из центральных в точных науках – возникло при изучении взаимно однозначных преобразований конечных множеств. Если отвлечься от преобразуемого множества, множество преобразований само по себе образует алгебраическую структуру, называемую *абстрактной группой*. Согласно теореме Кэли, любая абстрактная конечная группа может быть представлена как группа перестановок некоторого множества (любое такое множество изоморфно множеству смежных классов группы по некоторой подгруппе). Таким образом, в конечном случае любую группу можно реализовать как множество взаимно однозначных преобразований конечного множества.

В бесконечном случае возникают проблемы с подобной интерпретацией из-за того, что для любого бесконечного множества существуют взаимно однозначные отображения между множеством и его собственными подмножествами. Для того, чтобы придать смысл бесконечным группам преобразований вводятся дополнительные ограничения, внешние относительно исходной идеи группы. Например, для групп Ли такими ограничениями являются требования, чтобы группа была непрерывным многообразием, описываемым набором вещественных параметров, таких что групповые операции являются непрерывными функциями этих параметров. Подобные ограничения существенно снижают описательные возможности в прикладных задачах, в частности, могут привести к потере тонких деталей описания.

Любую группу Ли можно заменить в эмпирических приложениях подходящей конечной группой, но не наоборот. Рассмотрим, например, группу Ли $\mathsf{U}(1)$. Эту группу в приложениях можно заменить циклической группой $\mathbb{Z}_N$, выбрав достаточно большое число N. Однако существенные структурные свойства группы $\mathbb{Z}_N$ невозможно воспроизвести никакими приближениями с помощью группы $\mathsf{U}(1)$. Топологически группа $\mathbb{Z}_N$ представляет собой тороидальную решетку[2], структура которой определяется разложением числа N на простые множители. Причем эта тороидальная структура может радикально изменяться при небольших относительных изменениях числа N. Очевидно, что свойства $\mathbb{Z}_N$ гораздо богаче и информативнее свойств непрерывной окружности.

Все группы Ли имеют конечные аналоги, называемые *конечными группами лиевского типа*. С другой стороны, большинство конечных групп, в частности такие важные, как *симметрическая* и *знакопеременная*, вообще не имеют никаких непрерывных аналогов.

3.1. Гильбертово пространство перестановочного представления. В [1–4] утверждается, что формализм квантовой механики, основанный на концепции гильбертова пространства, может быть воспроизведен с произвольной точностью в пределе больших чисел, основываясь только на конечных множествах.

Мы предполагаем, что на некотором глубоком уровне описания имеется конечное множество первичных элементов

$$\Omega = \{e_0, e_1, \ldots, e_{N-1}\} \cong \{0, 1, \ldots, N-1\},$$

которые мы, следуя 'т Хоофту [5], будем называть *онтическими*.

Предположим также, что существует конечная группа G, действующая на множестве Ω перестановками, т.е., $G \leqslant \mathrm{Sym}(\Omega) \cong \mathsf{S}_N$.

Далее при необходимости подчеркнуть, что группа G действует перестановками на некотором множестве X мы будем использовать обозначение $G(X)$.

---

[2]Эта решетка играет важную роль в задачах квантовой информатики.

Мы можем построить N-мерное гильбертово пространство $\mathcal{H}_N$, интерпретируя элементы множества Ω, как базисные элементы пространства $\mathcal{H}_N$.

Любую перестановку $g \in \mathrm{Sym}(\Omega)$ можно представить в онтическом базисе пространства $\mathcal{H}_N$ унитарной матрицей вида

$$\left[\mathcal{P}(g)\right]_{i,j} = \delta_{ig,j}. \qquad (5)$$

Представление группы G матрицами вида (5) называется *перестановочным.*

Можно показать, что любое линейное представление конечной группы является подпредставлением некоторого перестановочного. В частности, любое *неприводимое* линейное представление *абстрактной* группы G является подпредставлением *регулярного представления*, т.е., перестановочного представления группы перестановок $G(G)$, где перестановочное действие задается групповым умножением.

Матрицы перестановок содержат только нули и единицы, поэтому перестановочное представление можно определить над любым полем. Базовым полем гильбертова пространства по определению является комплексное поле $\mathbb{C}$, позволяющее ввести необходимое для квантового формализма эрмитово скалярное произведение. Однако неконструктивное поле $\mathbb{C}$ можно без всякого ущерба для квантовой механики заменить конструктивными круговыми полями, которые в невырожденных случаях являются плотными подполями поля $\mathbb{C}$. Более того, следуя принципу Оккама, среди круговых полей можно выбирать минимально достаточные для данной конкретной задачи с целью избежать излишних элементов поля $\mathbb{C}$, являющихся потенциальным источником теоретических артефактов.

Круговым полем называется расширение поля рациональных чисел вида

$$K_n = \mathbb{Q}(\omega_n)\,,$$

где $\omega_n = \mathrm{e}^{2\pi\mathbf{i}/n}$ – примитивный корень из единицы n-й степени. Это расширение является алгебраическим, поскольку ω_n – алгебраическое целое.

В дальнейшем нам также потребуется мультипликативная группа корней из единицы n-й степени

$$\mathcal{K}_n = \left\{1, \omega_n, \ldots, \omega_n^{n-1}\right\}.$$

Поле называется расщепляющим для группы G, если над этим полем можно полностью расщепить любое представление на неприводимые компоненты. Круговое поле K_n является расщепляющим для любой подгруппы группы G, если n равно *экспоненте группы* G, определяемой как наименьшее общее кратное периодов элементов группы.

Круговое поле K_n является плотным подполем поля комплексных чисел, если $n > 2$. Таким образом, мы всегда можем заменить неконструктивное поле $\mathbb{C}$ подходящей конструктивной комбинацией рациональных чисел и корней из единицы, степень которых определяется структурой конкретной группы.

3.2. Перестановочная эволюция и комплементарные наблюдаемые. Помимо унитарной эволюции в формализме квантовой механики фундаментальную роль играет понятие комплементарных наблюдаемых, которые определяются как пары операторов, связанных посредством двойственности Понтрягина.

Комплементарные наблюдаемые выражают потенциальную возможность наблюдать эволюцию квантовой системы с различных точек зрения, обеспечивая получение максимума информации о системе в соответствии с принципом дополнительности.

Комплементарные наблюдаемые имеют непосредственную связь с такими конструкциями и понятиями как каноническое коммутационное соотношение, принцип неопределенности, принцип наименьшего действия, формулировка квантовой механики через интегралы по траекториям и т.п.

Двойственность Понтрягина. Для абелевой группы A двойственной по Понтрягину называется группа гомоморфизмов из A в единичную окружность на комплексной плоскости [6]

$$\widetilde{A} = \mathrm{Hom}(A, \mathsf{U}(1))\,.$$

Эти гомоморфизмы называются *характерами* и их можно представить в виде

$$\chi(a) = \exp(2\pi\mathbf{i}\varphi(a))\,,$$

где φ – вещественная функция на A, такая что $\varphi(a) + \varphi(b) = \varphi(ab)$ для $a, b \in A$.

Теорема Понтрягина утверждает, что для локально компактной абелевой группы A существует канонический изоморфизм $\widetilde{\widetilde{A}} \cong A$.

Рассмотрим более подробно двойственность Понтрягина для конечных групп. Любая циклическая группа порядка n изоморфна группе $\mathbb{Z}_n$, элементы которой можно отождествить с числами $k = 0, \dots, n-1$. Таким образом, характер $\mathbb{Z}_n$ можно представить отображением

$$\chi(k) = \exp\left(2\pi\mathbf{i}\frac{k}{n}\right) \in \mathcal{K}_n. \tag{6}$$

Любая конечная абелева группа разлагается в прямое произведение циклических групп

$$A \cong \mathbb{Z}_{n_1} \times \cdots \times \mathbb{Z}_{n_s}. \tag{7}$$

Характер произведения (7) представляет собой произведение характеров сомножителей

$$\chi(\{k_1, \dots, k_s\}) = \exp\left(2\pi\mathbf{i}\left\{\frac{k_1}{n_1} + \cdots + \frac{k_s}{n_s}\right\}\right),\ 0 \leqslant k_i < n_i, \tag{8}$$

где $\{k_1, \dots, k_s\} \in \mathbb{Z}_{n_1} \times \cdots \times \mathbb{Z}_{n_s}$.

Из взаимной однозначности отображений (6) и (8) явно видно, что для конечных групп двойственность Понтрягина является изоморфизмом $\widetilde{A} \cong A$. Этот изоморфизм не является каноническим, поскольку зависит от выбора порождающих элементов группы A.

Фазовое пространство. Фундаментальным элементом квантового формализма является “фазовое пространство”

$$\Phi = A \times \widetilde{A}, \tag{9}$$

где множители A и $\widetilde{A}$ интерпретируются как пространства “обобщенных координат” и “обобщенных импульсов”, соответственно.

Поскольку мы рассматриваем только конечные группы, мы можем, воспользовавшись изоморфизмом $\widetilde{A} \cong A$, заменить в (9) выражение $A \times \widetilde{A}$ на менее строгое, но более простое обозначение $A \times A$.

Перестановочная эволюция. Унитарная эволюция в пространстве $\mathcal{H}_N$ описывается элементами вида U^t. Мы будем предполагать, что временной параметр является дискретным, $t \in \mathbb{Z}$, а унитарный оператор U, порождающий эволюцию, принадлежит перестановочному представлению группы $G(\Omega)$, т.е., $U = \mathcal{P}(g)$, из чего следует $U^t = \mathcal{P}(g)^t = \mathcal{P}(g^t)$, где g перестановка из группы $G(\Omega)$.

Любую перестановку $g \in G(\Omega)$ можно разложить в произведение непересекающихся циклов $g = (c_1)(c_2)\cdots(c_n)$. Если перестановка g состоит из более чем одного цикла, то группа, порождаемая g действует на онтическом множестве Ω нетранзитивно, разбивая Ω на непересекающиеся подмножества. Поэтому имеет смысл рассматривать только перестановки, представляющие собой циклы длины N.

Пусть $X = \mathcal{P}(g)$ для $g = (0, 1, \ldots, N-1)$. Действие оператора X на элементы онтического базиса $\{|k\rangle\}_{k=0}^{N-1}$ имеет вид

$$X\,|k\rangle = |k+1 \mod N\rangle\,.$$

Матрица циклической перестановки

$$X = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 & 0 \end{bmatrix},$$

называемая *матрицей сдвига Сильвестра*, порождает унитарную эволюцию в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}_N$. Традиция обозначать эту матрицу символом X связана с тем, что при $N = 2$ она совпадает со спиновой матрицей Паули σ_X.

Рассматривая матрицу X как элемент, порождающий унитарное представление циклической группы $\mathbb{Z}_N$, можно построить двойственную к ней матрицу, порождающую унитарное представление группы $\widetilde{\mathbb{Z}}_N \cong \mathbb{Z}_N$

$$\widetilde{X} = FXF^{-1} = Z = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \omega & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \omega^{N-1} \end{bmatrix},$$

где $\omega = \mathrm{e}^{2\pi\mathbf{i}/N}$ – примитивный корень из единицы N-й степени, а F – матрица преобразования Фурье

$$F = \frac{1}{\sqrt{N}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & \omega & \cdots & \omega^{N-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \omega^{N-1} & \cdots & \omega^{(N-1)(N-1)} \end{bmatrix}.$$

Матрица Z, которую можно интерпретировать как N-мерное обобщение матрицы Паули σ_Z, называется *матрицей часов Сильвестра*.

Операторы X и Z совместно порождают проективное унитарное представление группы $\mathbb{Z}_N \times \widetilde{\mathbb{Z}}_N \cong \mathbb{Z}_N \times \mathbb{Z}_N$ в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}_N$. Получаемое прямым вычислением коммутационное соотношение для этих операторов имеет вид

$$ZX = \omega XZ. \tag{10}$$

Операторы X и Z и коммутационное соотношение (10) в рамках стандартной непрерывной квантовой механики получил Герман Вейль [7]. Он обратил внимание на то, что каноническое коммутационное соотношение для операторов координаты и импульса

$$[\hat{x}, \hat{p}] = \mathbf{i}\hbar\,\mathbb{1}, \tag{11}$$

а следовательно, согласно теореме Стоуна–фон Неймана, и стандартную квантовую теорию в целом, можно реализовать только в бесконечномерном гильбертовом пространстве. Вейль показал, что из требования конечной размерности гильбертова пространства с необходимостью следуют операторы X и Z с коммутационным соотношением (10), а также доказал их единственность (с точностью до унитарной эквивалентности).

Идеи Вейля получили дальнейшее развитие в работах Швингера [8, 9]. В настоящее время, в связи с потребностями квантовой информатики, где арифметические свойства размерностей конечномерных гильбертовых пространств играют центральную роль, подход Вейля–Швингера интенсивно развивается. Исследования приводят к богатому разнообразию математических структур и задач [10–13], зачастую включающих открытые (нерешенные) математические проблемы[3].

Существует два взгляда на взаимосвязи между версиями квантовой механики, соответствующими разными типам коммутационных соотношений. Согласно более распространенному мнению, непрерывная квантовая механика в бесконечномерном гильбертовом пространстве с каноническим коммутационным соотношением (11) является более фундаментальной теорией, а конечные структуры, наличие которых хотя и выводится математически из квантового формализма, представляют собой исключения, возникающие в специфических условиях внутри унитарного континуума. Подобные убеждения часто встречаются в литературе, например ([13, с. 313]):

[3]Например, задача построения SIC-POVMs в гильбертовых пространствах произвольной размерности связана с открытой 12-й проблемой Гильберта [14].

> Quantum state spaces are continuous, but they have some intriguing realisations of discrete structures hidden inside.
> ...
> The structures we are aiming at are known under strange acronyms such as 'MUB' and 'SIC'.

Противоположная точка зрения предполагает, что физические теории, основанные на континууме, являются гладкими аппроксимациями более фундаментальных дискретных структур. Например, в нашем случае легко показать, что из соотношения (10) соотношение (11) выводится как дифференциальное приближение при $N \to \infty$.

Вейль предполагал (сделав при этом оговорку о недостаточности современных ему эмпирических данных, и которые, возможно, появятся в процессе развития ядерной физики), что в основе квантовой механики могут лежать конечные группы ([7, с. 276]):

> Our general principle allows for the possibility that the Abelian rotation group is entirely discontinuous, or that it may even be a finite group. ... Because of these results I feel certain that the general scheme of quantum kinematics formulated above is correct. But the field of discrete groups offers many possibilities which we have not as yet been able to realize in Nature; perhaps these holes will be filled by applications to nuclear physics.

Мы придерживаемся того мнения, что нет никакой необходимости предполагать наличие непрерывных унитарностей при изучении структур, возникающих в подходе Вейля–Швингера. Вполне достаточно перестановочных представлений конечных групп.

Операторы X и Z как комплементарные наблюдаемые. Унитарные операторы X и Z можно интерпретировать как наблюдаемые по причинам, изложенным в разделе 2.2. В этом разделе предлагалось с любым невырожденным нормальным оператором ассоциировать ортонормированный базис, состоящий из собственных векторов этого оператора. Мы будем применять это правило ко всем операторам, за исключением оператора X с которым будем ассоциировать онтический базис. С точки зрения перестановочной квантовой механики онтический базис занимает выделенное положение среди прочих базисов в том смысле, что эволюция в этом базисе сводится к перестановкам. Г. 'т Хоофт в похожем контексте писал следующее ([5, с. 66]):

> We postulate the existence of an ontological basis. It is an orthonormal basis of Hilbert space that is truly superior to the basis choices that we are familiar with. In terms of an ontological basis, the evolution operator for a sufficiently fine mesh of time variables, does nothing more than permute the states.

Обозначим онтический базис следующим образом

$$\mathrm{B}_O = \{|0\rangle, \ldots, |k\rangle, \ldots, |N-1\rangle\}.$$

Для базиса, ассоциированного с оператором Z будем использовать обозначения

$$\mathrm{B}_Z = \{|Z;0\rangle, \ldots, |Z;\ell\rangle, \ldots, |Z;N-1\rangle\}.$$

Заметим, что символ Z в обозначениях базисных векторов просто метка, указывающая на принадлежность к базису B_Z. Ввиду особой роли онтического базиса для обозначения его элементов подобная метка не используется.

Представив элементы базиса B_Z в онтическом базисе с помощью преобразования Фурье

$$|Z;\ell\rangle = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{k=0}^{N-1} |k\rangle\, \omega^{k\ell},$$

можно легко вычислить вероятности переходов между элементами из разных базисов

$$|\langle Z;\ell \mid k\rangle|^2 = \left|\frac{1}{\sqrt{N}}\omega^{-k\ell}\right|^2 = \frac{1}{N}.$$

Это равенство, симметричное относительно базисов, означает, что если наблюдаемое состояние совпадает с одним из базисных элементов одного из базисов, скажем B_O, то оно точно измеряется в этом базисе, т.е., измерение даст максимум информации, с другой стороны, результаты измерения этого же состояния в другом базисе, B_Z, будут равномерно распределены по его элементам, т.е., мы не получим никакой информации.

Это свойство базисов, ассоциированных с операторами X и Z, впервые обнаружил и отчетливо сформулировал Ю. Швингер [8]. Впоследствии для подобных пар базисов был введен ставший общепринятым термин “взаимно несмещенные базисы” (mutually unbiased bases, MUBs) [15]. Взаимно несмещенные базисы и соответствующие им комплементарные наблюдаемые по сути являются математическим выражением квантового принципа дополнительности Бора.

К наблюдаемым X и Z можно добавить их произведение XZ. Все элементы из этой тройки являются попарно комплементарными. Их прототипами в классической механике являются координаты, импульсы и угловые моменты. Три базиса, соответствующие этим операторам, образуют множество взаимно несмещенных базисов в гильбертовом пространстве любой размерности N.

Максимально возможное теоретически количество попарно комплементарных наблюдаемых в N-мерном гильбертовом пространстве ограничено сверху числом[4] $N+1$. Этот максимум достигается в пространствах, размерности которых являются степенями простых чисел, т.е., имеют вид $N = p^n$. Максимальное количество взаимно несмещенных базисов в составных размерностях неизвестно даже в минимальном случае размерности $N = 6$, многочисленные компьютерные вычисления указывают на то, что это количество равно трем.

Приложение §A. Формализм Вейля–Швингера

Рассмотрим основные конструкции, связанные с операторами X и Z, в подходе Вейля–Швингера.

- *Группа Гейзенберга–Вейля* $\mathrm{H}(N)$ состоит из всевозможных произведений операторов X и Z. Структура группы $\mathrm{H}(N)$ существенно зависит от четности размерности: в нечетном случае все элементы группы имеют период N, а в четной размерности у четверти элементов период равен $2N$. Поэтому для удобства введем обозначение

$$\bar{N} = \begin{cases} N, & \text{если } N \text{ нечетное,} \\ 2N, & \text{если } N \text{ четное.} \end{cases}$$

После упорядочения произведений с учетом периодичностей и коммутационного соотношения (10) множество элементов группы можно привести к виду

$$\mathrm{H}(N) = \left\{\tau^k X^\ell Z^m\right\},$$

[4]Большее количество взаимно несмещенных базисов позволило бы с помощью измерений получить число независимых параметров, превышающее $N^2 - 1$, т.е., число параметров, достаточных для описания любой матрицы плотности в $\mathcal{H}_N$.

где $\tau = -\omega^{1/2} = -\,\mathrm{e}^{\pi \mathbf{i}/N}$, $k = 0, \ldots, \bar{N} - 1$, $\ell, m = 0, \ldots, N - 1$.

Элемент τ выбран в указанном виде потому, что он является примитивным корнем из единицы степени N, если N нечетное, и примитивным корнем из единицы степени $2N$, если N четное.

Заметим, что циклические подгруппы группы Гейзенберга–Вейля описывают унитарные эволюции в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}_N$. В частности, эволюция вида X^t описывает "эволюцию Шредингера в координатном представлении", а эволюция Z^t это "эволюция Шредингера в импульсном представлении".

С точки зрения нашего перестановочного подхода все квантовые эволюции исчерпываются циклическими подгруппами группы Гейзенберга–Вейля. Разумеется, для воспроизведения результатов стандартной теории могут потребоваться гильбертовы пространства достаточно большой размерности N.

В отличие от перестановочной точки зрения, в общепринятой интерпретации подхода Вейля–Швингера предполагается, что квантовые эволюции порождаются произвольными элементами непрерывной унитарной группы в N-мерном гильбертовом пространстве, а эволюции из группы Гейзенберга–Вейля представляют собой частный случай, статус которого не до конца ясен.

- Множество

$$\mathrm{BS}(N) = \left\{ X^\ell Z^m \mid \ell, m = 0, \ldots, N - 1 \right\},$$

состоящее из N^2 унитарных матриц, образует базис линейного пространства матриц размера $N \times N$, называемый *операторным базисом Швингера* [8].

- *Группа Клиффорда* $\mathrm{C}\ell(N)$ определяется как нормализатор группы $\mathrm{H}(N)$ в унитарной группе $\mathrm{U}(N)$

$$\mathrm{C}\ell(N) \cong \mathrm{H}(N) \rtimes \mathrm{Sp}(2, \mathbb{Z}_{\bar{N}}),$$

где $\mathrm{Sp}(2, \mathbb{Z}_{\bar{N}})$ – группа симплектических преобразований конечного фазового пространства $\varPhi = \mathbb{Z}_{\bar{N}} \times \widetilde{\mathbb{Z}}_{\bar{N}}$.

Группа $\mathrm{Sp}(2, \mathbb{Z}_{\bar{N}})$ является квантовым аналогом группы канонических преобразований в гамильтоновой механике.

Фазовое пространство $\varPhi$ представляет собой дискретный двумерный тор, состоящий из $\bar{N} \times \bar{N}$ точек.

> Заметим, что с точки зрения перестановочной квантовой механики нет необходимости в представлении об унитарной группе $\mathrm{U}(N)$, охватывающей группу $\mathrm{H}(N)$, поэтому группу Клиффорда можно интерпретировать просто как групповое расширение, а не как нормализатор.

Проиллюстрируем описанные конструкции примерами в минимальной размерности $N = 2$.

Матрицы X и Z являются матрицами Паули

$$X = \sigma_X = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad Z = \sigma_Z = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Они имеют период 2 и являются одновременно унитарными и эрмитовыми.

Матрица $XZ = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ является унитарной и антиэрмитовой. Период XZ равен 4, что приводит к появлению примитивного корня из единицы 4-й степени $\mathbf{i} = \mathrm{e}^{\pi\mathbf{i}/2}$. Умножением на $\mathbf{i}$ (что приводит к потере "фазовой" информации) можно построить недостающую матрицу Паули

$$\mathbf{i}XZ = \sigma_Y = \begin{bmatrix} 0 & -\mathbf{i} \\ \mathbf{i} & 0 \end{bmatrix},$$

которая является эрмитовой и имеет период 2.

Заметим, что уже в минимальной размерности $N = 2$ появляются структуры, описывающие содержательную физику. Матрицы Паули описывают квантовые частицы спина 1/2. Также из этих матриц конструируются матрицы Дирака

$$\gamma^0 = \sigma_Z \otimes \mathbb{1}, \gamma^1 = \mathbf{i}\sigma_Y \otimes \sigma_X, \gamma^2 = \mathbf{i}\sigma_Y \otimes \sigma_Y, \gamma^3 = \mathbf{i}\sigma_Y \otimes \sigma_Z,$$

являющиеся образующими алгебры Клиффорда $\mathrm{C}\ell_{1,3}(\mathbb{R})$, которую называют также *пространственно-временной* или *геометрической* алгеброй.

Операторный базис Швингера имеет вид

$$\mathrm{BS}(2) = \{\mathbb{1}, X, Z, XZ\}.$$

Очевидно, что любую матрицу размера 2×2 можно представить в виде линейной комбинации матриц из $\mathrm{BS}(2)$ (например, потому, что матрицы $(\mathbb{1} \pm Z)/2$ и $(X \pm XZ)/2$ образуют все четыре матрицы с единицей в одной позиции и нулями в остальных).

Группа Гейзенберга–Вейля состоит из 16 элементов и ее структура имеет вид

$$\mathrm{H}(2) = \mathcal{K}_4 \times \mathrm{BS}(2) \cong (\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_2) \rtimes \mathbb{Z}_2,$$

где $\mathcal{K}_4 = \{\pm 1, \pm \mathbf{i}\}$ – группа корней из единицы 4-й степени. Группа $\mathrm{H}(2)$ в физике называется группой Паули.

Группа Клиффорда $\mathrm{C}\ell(2)$ имеет структуру

$$\mathrm{C}\ell(2) \cong \mathrm{H}(2) \rtimes \mathrm{Sp}(2, \mathbb{Z}_4)\,,$$

где действующая на торической решетке $\Phi = \mathbb{Z}_4 \times \widetilde{Z}_4$ симплектическая группа порядка 48 имеет структуру

$$\mathrm{Sp}(2, \mathbb{Z}_4) \cong \mathsf{A}_4 \rtimes \mathbb{Z}_4.$$

Таким образом, порядок группы $\mathrm{C}\ell(2)$ равен 768.

Благодарности. Я благодарен Ю. А. Блинкову и Н. Н. Васильеву за обсуждение работы и ценные советы, а также Д. А. Яновичу за помощь в подготовке текста.

Список литературы

1. V. V. Kornyak, *Quantum models based on finite groups.* — J. Physics: Conference Series **965** (2018), 012023.
2. V. V. Kornyak, *Modeling quantum behavior in the framework of permutation groups.* — EPJ Web of Conferences **173** (2018), 01007.
3. V. V. Kornyak, *Mathematical modeling of finite quantum systems.* — Lect. Notes Comput. Sci. **7125** (2012), 79–93.
4. T. Banks, *Finite deformations of quantum mechanics.* — `arXiv: High Energy Physics - Theory`, (2020).
5. G. 't Hooft, *The Cellular Automaton Interpretation of Quantum Mechanics*, Springer International Publishing, (2016).
6. Morris, Sidney A., *Pontryagin Duality and the Structure of Locally Compact Abelian Groups*, Cambridge, London Mathematical Society Lecture Note Series, (1977).
7. H. Weyl, *The Theory of Groups and Quantum Mechanics*, Dover Publications, (1931).,
8. J. Schwinger, *Unitary operator bases.* — Proc. Natl. Acad. Sci. USA **46**, No. 4 (1960), 570–579.
9. J. Schwinger, *Quantum Kinematics and Dynamics*, Benjamin, New York, (1970).
10. P. Horodecki, Ł. Rudnicki, K. Zyczkowski, *Five open problems in quantum information theory.* — PRX Quantum **3**, No. 1 (2022), 010101.
11. Th. Durt, B.-G. Englert, I. Bengtsson, K. Życzkowski, *On mutually unbiased bases.* — International Journal of Quantum Information **8**, No. 4 (2010), 535–640.
12. A. Vourdas, *Finite and Profinite Quantum Systems*, Springer, Berlin, (2017).

13. I. Bengtsson, K. Zyczkowski, *Geometry of Quantum States: An Introduction to Quantum Entanglement*, Cambridge University Press, (2006).
14. D. M. Appleby, H. Yadsan-Appleby, G. Zauner, *Galois automorphisms of a symmetric measurement.* — Quantum Inf. Comput. **13** (2012), 672–720.
15. W. K. Wootters, B. D. Fields, *Optimal state-determination by mutually unbiased measurements.* — Annals of Physics **191**, No. 2 (1989), 363–381.

Kornyak V. V. Description of the evolution of finite-dimensional quantum systems by permutation groups.

We consider constructive approaches to quantum theory: quantum mechanics based on permutation representations of finite groups and the Weyl–Schwinger finite phase space quantum mechanics. We show that both approaches lead to the conclusion that, at a deep level, quantum evolution is based on permutations of finite sets.

Лаборатория информационных технологий,
Объединенный институт ядерных исследований,
ул. Жолио-Кюри 6, 141980,
Дубна, Россия
E-mail: vkornyak@gmail.com

Поступило 31 октября 2023 г.