Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 528, 2023 г.

М. Германсков

КЛАССИФИКАЦИЯ ГРУПП, ПОРОЖДЕННЫХ ИНВОЛЮЦИЯМИ ДВУСТРОЧЕЧНЫХ ТАБЛИЦ ЮНГА

§1. Введение

А. М. Вершик предложил программу систематического изучения класса групп, обобщающего класс классических групп Коксетера, а именно групп, порождённых естественными инволюциями стандартных таблиц Юнга и, более общо, инволюциями пространств путей графов со свойством ромбовидности. К этому же классу относятся группы автоморфизмов нумераций частично упорядоченных множеств см. [9]. Первые результаты в рамках этого проекта были изложены в работе [8]. Цель настоящей работы – выяснить класс изоморфности некоторых групп, графами для которых выступают интервалы в графе Юнга.

Стоит упомянуть работы, для контекста которых случай графа Юнга тоже может представлять интерес. В работе [1], посвященной изучению плоских разбиений и симметрических функций, вводятся инволюции, действующие на множестве полустандартных таблиц Юнга фиксированной формы. В работе Беренштейна и Кириллова [2] получены некоторые расширения инволюций Бендера–Кнута, их действие на паттернах Гельфанда–Цетлина, и соотношения, которым они удовлетворяют, для изучения кусочно-линейных представлений. Среди этих соотношений особенно интересна связь инволюций Бендера–Кнута с разными комбинаторными конструкциями на множестве таблиц Юнга, например, с инволюцией Шютценберже. В работе [3] рассматриваются аналоги инволюций Бендера–Кнута, соответствующие линейным продолжениям посетов, изучаются их соотношения, свойства группы, порожденной этими инволюциями, и размер полученной группы относительно группы всех перестановок на линейных продолжениях.

Ключевые слова: группы перестановок, градуированные графы, диаграммы Юнга и таблицы Юнга, инволюции.

Работа выполнена при финансовой поддержке Минобрнауки РФ (грант на создание и развитие МЦМУ им. Леонарда Эйлера, соглашение No. 075-15-2022-289).

В своей предыдущей работе [5] я получил, что для всех двустрочечных диаграмм группа является либо знакопеременной, либо симметрической. В этой работе я даю критерий изоморфности знакопеременной группе, зависящий от длин двух строк.

§2. Определения и формулировка основных результатов

Здесь я привожу основные определения, следуя работе [8].

Определение 1. $\mathbb{Z}_+$-градуированным графом *будем называть бесконечный ориентированный граф* (V, E)*, в котором вершины* V *суть объединение множеств, проиндексированных* $\mathbb{Z}_+$*, т.е.* $V = \cup_{n\in\mathbb{Z}_+} V_n$ *а также любое ребро соединяет вершины соседних этажей, то есть для каждого* $e \in E$ *существует такое* i*, что* $e \in V_i \times V_{i+1}$.

Определение 2. *Градуированный граф называется* ромбовидным*, если любой его непустой* 2*-интервал содержит либо одну, либо две вершины промежуточного уровня, т.е. является либо отрезком, либо ромбом.*

Ромбовидные графы возникают в следующей ситуации. Рассмотрим конечное частично упорядоченное множество P с минимальным элементом $\varnothing$ и частично упорядоченное множество $J(P)$ его порядковых идеалов (подмножеств, содержащих вместе с каждым элементом все меньшие его). Это частично упорядоченное множество идеалов будет дистрибутивной решеткой, а его диаграмма Хассе – ромбовидным графом.

Рассмотрим произвольный $\mathbb{Z}_+$-градуированный конечный ромбовидный граф Γ; обозначим через Γ_n множество его вершин уровня n. Пусть $T(\Gamma)$ – множество максимальных путей графа Γ, т.е. путей, соединяющих минимальную вершину (уровня 0) и максимальную вершину (уровня n). Обозначим через S_Γ группу всех перестановок множества $T(\Gamma)$ (очевидно, она изоморфна симметрической группе S_N, где N есть общее число максимальных путей в графе).

Определение 3. *Комбинаторная инволюция* σ_i*,* $i = 1, 2, \ldots, n-1$*, – это инволюция* $\sigma_i \in S_\Gamma$*, которая действует следующим образом. Пусть* $t = (t_0, t_1, \ldots, t_n) \in T(\Gamma)$*, где* $t_k \in \Gamma_k$*. Инволюция* σ_i *оставляет неизменными все вершины пути* t *кроме* t_i*. Рассмотрим* 2*-интервал*

$[t_{i-1}, t_{i+1}]$ *в* Γ. *Если это отрезок, то* $\sigma_i(t) = t$. *Если же это ромб с промежуточными вершинами* t_i, t'_i, *то*

$$\sigma_i(t) = (t_0, \ldots, t_{i-1}, t'_i, t_{i+1}, \ldots, t_n).$$

В силу наших предположений о графе действие инволюции σ_i *корректно определено на всех путях графа.*

Определение 4. *Определим группу перестановок путей графа* Γ *как группу* $G_\Gamma = \langle \sigma_1, \ldots, \sigma_{n-1} \rangle$, *порожденную* $n-1$ *комбинаторными инволюциями* $\sigma_1, \ldots, \sigma_{n-1}$ *графа* $T(\Gamma)$.

Определение 5. *Диаграммой Юнга* λ *будем называть конечный идеал в решетке* $\mathbb{Z}_+ \times \mathbb{Z}_+$.

Диаграммы Юнга образуют градуированный граф (который называют графом Юнга $\mathbb{Y}$): вершина λ лежит в $\mathbb{Y}_n$, если

$$\sum_i \lambda_i = n,$$

где λ_i – строка диаграммы с номером i (количество элементов идеала вида $(\ , i)$). Ребро от диаграммы Юнга λ к диаграмме μ проводится, если $\lambda \subset \mu$ и $|\lambda| + 1 = |\mu|$.

Определение 6. *Стандартной таблицей Юнга формы* λ *называется заполнение её клеток числами* $1, \ldots, |\lambda|$, *строго возрастающее по строкам и столбцам.*

Известно, что стандартные таблицы Юнга формы λ соответствуют путям от вершины $\varnothing$ до вершины λ в графе Юнга.

Пусть λ – диаграмма Юнга, и пусть Γ – участок пути в графе Юнга (то есть подграф на вершинах, участвующих в путях) от пустого множества до λ. Множество максимальных путей $T(\Gamma)$ в этом случае будет являться множеством таблиц Юнга формы λ. Мощность этого множества $T(\Gamma)$ будем обозначать $\dim \lambda$. Также будем писать G_λ, подразумевая G_Γ.

Для полноты я привожу результаты о классе изоморфности групп G_λ, полученные ранее.

[8] Если $\lambda = (n-k, 1^k)$ – крюковая диаграмма, то группа G_λ изоморфна симметрической группе S_{n-1}, а если $\lambda = (n-2, 2)$, то группа G_λ изоморфна симметрической группе $S_{\dim \lambda}$.

[6] Для диаграммы вида $\lambda = (n, 2, 1^{n-2})$ имеет место G_λ изоморфна группе Кокстера $D_{\dim\lambda/2}$. Для диаграммы вида
$$\lambda = (n+k, 2, 1^{n-2}),$$
где $k > 0$, имеет место $G_\lambda = S_{\dim\lambda}$.

[5] Если $\lambda = (n-3, 3)$, то группа G_λ изоморфна знакопеременной группе $A_{\dim\lambda}$, при $4 \mid n-1$, или симметрической группе $S_{\dim\lambda}$, иначе. Если $\lambda = (n-k, k)$, то группа G_λ изоморфна либо знакопеременной группе $A_{\dim\lambda}$, либо симметрической $S_{\dim\lambda}$.

Следующая теорема определяет критерий различения знакопеременной группы от симметрической в терминах подсчета чётностей размерностей меньших диаграмм.

Теорема 2.1. *Пусть $\lambda = (n-k, k)$. Тогда $G_\lambda = A_{\dim\lambda}$ в том и только том случае, когда все числа*
$$\dim(n-k-2^l, k-2^l),\ 0 \leqslant l \leqslant \lfloor \log k \rfloor$$
чётны.

А эта теорема отличает знакопеременную группу от симметрической в терминах слов, представляющих числа в двоичной записи.

Теорема 2.2. *Пусть $\lambda = (n-k, k)$. Тогда группа G_λ является симметрической группой $S_{\dim\lambda}$ в том и только в том случае, когда либо $\binom{n+1}{k}$ – нечётное число, либо когда $n+1$ в двоичной записи – это*
$$u_1 10^s 1 u_2,$$
а k представляется как
$$v_1 0 v_3 v_2,$$
где u_1, u_2, v_1, v_2, v_3 – строки (возможно, пустые) из нулей и единиц, и $s \geqslant 1$, $|1u_2| = |v_2|$, $|v_3| = s$, $|u_1| > |v_1|$, и во всех остальных разрядах, то есть в носителе подслов $u_1, 1u_2, v_1, v_2$, слово $n+1$ мажорирует слово k.

§3. Доказательство основных результатов

Доказательство следующей теоремы будет опираться на утверждение, полученное в предыдущей работе [5].

Утверждение 3.1. *В действии G_λ на таблицы формы $\lambda = (n-k, k)$ выполнены соотношения $(\sigma_i\sigma_{i+1})^3 = 1$ при $i \geqslant 2k$. А при $2 \leqslant i \leqslant 2k-1$ выполнено соотношение $(\sigma_i\sigma_{i+1})^6 = 1$.*

Пусть $n, k \geqslant 2$ – натуральные числа, i – целое. Пусть выполнено условие

$$1 \leqslant \frac{i}{2} \leqslant k \leqslant n-k.$$

Тогда введем обозначение

$$C(n,k,i) = \begin{cases} \frac{1}{i/2+1}\binom{i}{i/2} \cdot \frac{n-2k+1}{n-k-i/2-1}\binom{n-i-2}{k-i/2-1} & \text{при чётном } i, \\ \frac{2}{i+1}\binom{i-1}{(i-1)/2} \cdot \frac{n-2k+1}{n-k-(i-1)/2}\binom{n-i-1}{k-(i+1)/2} & \text{при нечётном } i. \end{cases}$$

Исследуем вопрос чётности образующих группы G_λ для $\lambda = (n-k, k)$, где $n \geqslant 2k$. Для этого посчитаем чётности элементов вида $(\sigma_i\sigma_{i+1})^3$. Эти элементы являются инволюциями, поскольку в любом ромбовидном графе выполнено соотношение $(\sigma_i\sigma_{i+1})^6 = \mathrm{id}$. Если элемент $(\sigma_i\sigma_{i+1})^3$ является чётной перестановкой, то элементы σ_i и σ_{i+1} имеют одинаковую чётность и имеют разную чётность, если этот элемент нечётен. Таким образом, определение того, изморфна ли группа знакопеременной, сводится к следующему числовому вопросу.

Теорема 3.2. *Пусть $\lambda = (n-k, k)$. Тогда $G_\lambda = A_{\dim\lambda}$ в том и только том случае, когда все числа $C(n,k,i)$ чётны при $1 \leqslant i \leqslant 2k-1$.*

Доказательство. По утверждению 3.1 в двустрочечном случае выполнено соотношение $(\sigma_i\sigma_{i+1})^3 = \mathrm{id}$ при $i \geqslant 2k$. Поэтому необходимо вычислить чётности этих элементов при $i \leqslant 2k-1$. Кроме того, $(\sigma_1\sigma_2)^3 = \sigma_2$, поскольку $\sigma_1 = \mathrm{id}$. Так что группа является знакопеременной в том и только том случае, когда все $(\sigma_i\sigma_{i+1})^3$ являются четными перестановками.

Нетрудно посчитать количество путей, которые инволюция $(\sigma_i\sigma_{i+1})^3$ затрагивает. Разберем два случая.

Если i чётно, то пути, которые затрагивает рассматриваемый элемент устроены так: сначала произвольный путь до диаграммы $(i/2, i/2-1)$, потом интервал первого типа, заканчивающийся в вершине $(\frac{i}{2}+1, \frac{i}{2}+1)$, а потом следует путь от $(\frac{i}{2}+1, \frac{i}{2}+1)$ до конечной вершины, соответствующей диаграмме $(n-k, k)$. Таким образом, чётность элемента получится равна чётности

$$\dim\left(\frac{i}{2}, \frac{i}{2}-1\right) \cdot \dim\left(n-k-\frac{i}{2}-1, k-\frac{i}{2}-1\right).$$

Это число можно посчитать по известной формуле крюков:

$$\dim\left(\frac{i}{2},\frac{i}{2}-1\right)\cdot\dim\left(n-k-\frac{i}{2}-1,k-\frac{i}{2}-1\right)$$
$$=\frac{1}{i/2+1}\binom{i}{i/2}\cdot\frac{n-2k+1}{n-k-i/2}\binom{n-i-2}{k-i/2-1}.$$

Если i нечётно, то пути, которые затрагивает рассматриваемый элемент, устроены похожим образом. Сначала произвольный путь до $(\frac{i-1}{2},\frac{i-1}{2})$, потом интервал второго типа, а после произвольный путь от $(\frac{i+3}{2},\frac{i+1}{2})$ до конечной вершины. Поэтому чётность элемента совпадает с чётностью числа

$$\dim\left(\frac{i-1}{2},\frac{i-1}{2}\right)\cdot\dim\left(n-k-\frac{i+1}{2},k-\frac{i+1}{2}\right).$$

Аналогично, его можно посчитать по формуле крюков:

$$\dim\left(\frac{i-1}{2},\frac{i-1}{2}\right)\cdot\dim\left(n-k-\frac{i+1}{2},k-\frac{i+1}{2}\right)$$
$$=\frac{2}{i+1}\binom{i-1}{(i-1)/2}\cdot\frac{n-2k+1}{n-k-(i-1)/2}\binom{n-i-2}{k-(i+1)/2}. \quad \square$$

Заметим, что многие из чисел $C(n,k,i)$ чётны, поскольку делятся на число $\dim(\lfloor i/2\rfloor,\lfloor i/2\rfloor)$, равное числу Каталана $C_{\lfloor i/2\rfloor}$. Числа Каталана $C_{\lfloor i/2\rfloor}$ чётны при всех $i\neq 2^{l+1}-1$ и $i\neq 2^{l+1}-2$ для неотрицательного целого l. Поэтому для того, чтобы группа была знакопеременной, необходимо, чтобы все числа

$$C(n,k,2^{l+1}-1),\quad 0\leqslant l\leqslant\lfloor\log k\rfloor,$$
$$C(n,k,2^{l+1}-2),\quad 1\leqslant l\leqslant\lfloor\log k\rfloor,$$

были чётными, то есть необходимо, чтобы все размерности

$$\dim(n-k-2^l,k-2^l),\ 0\leqslant l\leqslant\lfloor\log k\rfloor,$$

были чётными. Поэтому из леммы можно заключить следующую теорему.

Теорема. *Пусть $\lambda=(n-k,k)$. Тогда $G_\lambda=A_{\dim\lambda}$ в том и только том случае, когда все числа*

$$\dim(n-k-2^l,k-2^l),\ 0\leqslant l\leqslant\lfloor\log k\rfloor$$

чётны.

Отсюда можно получить, что для бесконечного числа таблиц группа будет являться знакопеременной.

Следствие 3.3. *Для диаграммы $\lambda = (k,k)$ группа G_λ изоморфна $A_{\dim\lambda}$ в том и только том случае, когда натуральное число k не представимо в виде $2^m + 2^l - 1$ для неотрицательных целых m и l.*

Доказательство. Посчитаем размерности выше:

$$\dim(k-2^l, k-2^l) = C_{k-2^l}, \qquad 0 \leqslant l < \lfloor \log k \rfloor.$$

Хотя бы одно из чисел $k - 2^l$ равно $2^m - 1$ в том и только том случае, когда найдутся такие m и l, что $k = 2^m + 2^l - 1$. $\square$

Утверждение 3.4. *Для диаграммы Юнга $\lambda = (n-k, k)$ чётность размерности $\dim\lambda$ совпадает с чётностью числа $\binom{n+1}{k}$.*

Доказательство. Достаточно проверить утверждение для форм $\lambda = (k,k)$ и для форм $\lambda = (k,0)$, поскольку эти значения задают значения всех диаграмм по правилу ветвления.

$$\dim(k,k) = \frac{1}{k+1}\binom{2k}{k} = \frac{1}{k+1}\cdot\frac{(2k)!}{k!\cdot k!}$$

$$\binom{2k+1}{k} = \frac{2k+1}{k+1}\cdot\frac{2k+1!}{k!\cdot k!} = \dim(k,k)\cdot(2k+1).$$

Ясно, что умножение числа на $2k+1$ не меняет чётность числа.

А в случае $\lambda = (k,0)$ оба числа тождественно равны единице. $\square$

Для доказательства теоремы 2.2, будем пользоваться широко известной теоремой Люка для случая $p = 2$.

Теорема (Lucas). *Остаток от деления биномиального коэффициента $\binom{m}{n}$ на простое число p:*

$$\binom{m}{n} \equiv \prod_{i=0}^{k-1}\binom{m_i}{n_i} \pmod{p},$$

где $m = (m_{k-1},\ldots,m_0)_p$ и $n = (n_{k-1},\ldots,n_0)_p$ – представления чисел m и n в p-ичной системе счисления.

Теорема. *Пусть $\lambda = (n-k, k)$. Тогда группа G_λ является симметрической группой $S_{\dim\lambda}$ в том и только в том случае, когда либо $\binom{n+1}{k}$ – нечётное число, либо когда $n+1$ в двоичной записи – это*

$$u_1 10^s 1 u_2,$$

а k представляется как

$$v_1 0 v_3 v_2,$$

где u_1, u_2, v_1, v_2, v_3 – строки (возможно, пустые) из нулей и единиц, и $s \geqslant 1$, $|1u_2| = |v_2|$, $|v_3| = s$, $|u_1| > |v_1|$, и во всех остальных разрядах, то есть в носителе подслов $u_1, 1u_2, v_1, v_2$, слово $n+1$ мажорирует слово k.

Доказательство. Необходимо выяснить, при каких n, k все числа

$$\binom{n+1-2^{l+1}}{k-2^l} \tag{†}$$

чётны.

Пусть $K = \{k_1, k_2, \ldots, k_m\}$ – множество разрядов числа k, где стоит цифра 1, то есть

$$k = 2^{k_1} + 2^{k_2} + \ldots 2^{k_m}.$$

Также считаем, что $k_1 \geqslant \ldots \geqslant k_m$. Пусть $A \subset K$ – разряды, в которых у числа $n+1$ написана цифра 0.

(1) Пусть $A = \varnothing$. Это значит, что цифра каждого разряда $n+1$ не меньше цифры того же разряда числа k. Тогда число $\binom{n+1-2^{k_1+1}}{k-2^{k_1}}$ по теореме Люка является нечётным. В этом случае группа получается симметрической.

(2) Пусть $|A| > 0$. Тогда пусть $a = \min A$. Если мы будем брать $l > a$ из (†), то в разряде с номером a цифра числа k будет больше, чем цифра числа $n+1$. То есть при $l > a$ число из (†) чётно. Предположим, что нашлось такое $l \leqslant a$, что получившийся биномиальный коэффициент нечётен. Это значит, по теореме Люка, что после вычитания из $n+1$ числа 2^{l+1} во всех разрядах из $A \setminus \{a\}$ написаны единицы, поскольку вычитание 2^l при $l \leqslant a$ не влияет ни на какую цифру A, кроме, быть может, a. Поэтому во всех разрядах числа $n+1$ в интервале $[\min A, \max A]$ записаны нули. То есть, если группа симмметрическая, то слово $n+1$ в двоичной записи – это $u_1 + 1 + 0^s + 1 + u_2$, а число k записывается словом $v_1 + 0 + v_3 + v_2$, где $+$ – конкатенация строк, $|1 + u_2| = |v_2|$, $|v_3| = s$. А также все разряды из A лежат в v_3. По определению множества A, во всех остальных разрядах, то есть в носителе подслов $u_1, 1u_2, v_1, v_2$, слово $n+1$ мажорирует слово k. Нетрудно проверить, что выполнено и обратное, то есть, что пары таких слов соответствуют

парам, для которых среди выражений (†) найдется нечётное число (достаточно взять $l = a$ в обозначениях доказательства теоремы). □

Благодарности. Я благодарю А. М. Вершика и Ф. Петрова за внимание к работе и ценные обсуждения.

Список литературы

1. A. Bender, D. Knuth, *Enumeration of plane partitions.* — J. Comb. Th. A **13** (1972), 40–54.
2. A. N. Kirillov, A. D. Berenstein, *Groups generated by involutions, Gelfand–Tsetlin patterns, and combinatorics of Young tableaux.* — Algebra i Analiz **7**, No. 1 (1995), 92–152.
3. Judy Hsin-Hui Chiang, Anh Trong Nam Hoang, Matthew Kendall, Ryan Lynch, Son Nguyen, Benjamin Przybocki, Janabel Xia, *Bender–Knuth involutions on linear extensions of posets.* `https://doi.org/10.48550/arXiv.2302.12425`https://doi.org/10.48550/arXiv.2302.12425
4. У. Фултон, *Таблицы Юнга и их приложения к теории представлений и геометрии.* МЦНМО, 2006.
5. М. В. Германсков, *Описание групп, порожденных инволюциями двухстрочечных таблиц Юнга.* Зап. научн. семин. ПОМИ **517** (2022), 70–81.
6. П. А. Поздеев, *Простейшие диаграммы Юнга и группы, порожденные их таблицами.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **517** (2022), 151–161.
7. Р. Стенли, *Перечислительная комбинаторика.* Издательство “Мир”, 1990.
8. А. М. Вершик, Н. В. Цилевич, *Группы, порожденные инволюциями ромбовидных графов, и деформации ортогональной формы Юнга.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **481** (2019).
9. А. М. Вершик *Группы порожденные инволюциями, перечисления посетов и центральные меры.* — Успехи матем наук **76**, No. 4 (2021), 143–144.

Germanskov M. Classification of groups generated by involutions of two-row Young tableaux.

If an arbitrary Young diagram is given, then we can associate with it a group acting on the set of all Young tableaux of this form. It turns out that if the diagram consists of two rows, this group is always isomorphic to either a symmetric or an alternating group. In the paper this alternative is resolved in terms of the lengths of the two rows.

С.-Петербургский
Государственный Университет
E-mail: `mgermanskov@gmail.com`

Поступило 15 ноября 2023 г.