

Э. А. Айрян, М. М. Гамбарян, М. Д. Малых,
Л. А. Севастьянов

ОБРАТИМЫЕ РАЗНОСТНЫЕ СХЕМЫ ДЛЯ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ ОСЦИЛЛЯТОРОВ

§1. ВВЕДЕНИЕ

Нелинейные задачи классической механики весьма редко интегрируются в конечном виде, а если интегрируются, то в эллиптических функциях. В XIX веке было предпринято несколько попыток объяснить особую роль эллиптических функций в задачах механики.

Исторически первым появилось предложение выделить такие динамические системы, решения которых являются однозначными функциями комплексного времени t . Этим путем для уравнений движения гироскопа к двум классическим случаям, интегрируемым в эллиптических функциях, был добавлен третий – случай Ковалевской, интегрируемый в абелевых функциях [1]. К сожалению, комплексное время не имеет ясного физического смысла и поэтому не позволяет объяснить причины, по которым эллиптические функции играют столь важную роль в динамических системах.

Пенлеве привел множество примеров обыкновенных дифференциальных уравнений, решения которых являются однозначными мероморфными функциями, отличными от классических трансцендентных функций и названных теперь в его честь трансцендентными Пенлеве [2–4].

Желая объяснить, чем эти функции отличаются от классических, он указал одно свойство динамических систем, интегрируемых в классических трансцендентных функциях [5]. Эти системы задают между начальным и конечным положениями системы бирациональное соответствие, строгую формулировку мы приведем ниже в §2.

Это свойство тесно связано с обратимостью механических задач, которые, из общих соображений, все должны задавать взаимно-однозначное соответствие между начальными и конечными положениями

Ключевые слова: метод конечных разностей, динамические системы, преобразования Кремоны.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФ (проект No. 20-11-20257).

системы. В действительности же сказанное верно для линейных систем и эллиптических осцилляторов, в общем же случае доказывается лишь в малой окрестности начальных данных.

Работы Пенлеве остались в тени исследований по трансцендентным Пенлеве, в 1990-х годах внимание к ним привлек Умемура [6], поскольку они позволяли объяснить неэлементарный характер трансцендентных Пенлеве. Наше внимание этот подход привлек тем, что позволяет построить теорию интегрирования в конечном виде, которая, в отличие от теорий лиувилевского типа, охватывает эллиптические функции и в то же время является чисто алгебраической [7].

Попытки проиллюстрировать эту теорию ведут к необходимости строить графики решений. Хорошо известно, что степенные ряды для этого не слишком пригодны, даже трансцендентные Пенлеве вычисляются методом Рунге–Кутты [8, §32.17]. Однако разностные схемы – это не что иное, как алгебраическое соответствие между начальным положением системы и положением, сдвинутым по времени на шаг Δt . Это соответствие будет однозначным в том и только в том случае, когда разностная схема задает бирациональное соответствие между двумя положениями системы.

Несмотря на то, что в классической механике между начальными и конечными положениями должно быть взаимно однозначное соответствие, стандартные разностные схемы, напр., схемы Рунге–Кутты, описывают соответствие многозначное. Однако для всех динамических систем с квадратичной правой частью нетрудно составить разностную схему, задающую бирациональное соответствие. Такие схемы мы предложили назвать обратимыми [9]. Дискретные динамические системы, в которых шаг описывается преобразованием Кремоны, рассматривались А. П. Веселовым [10], частные примеры – Хеноном и Мозером [11].

Легкость перенесения основной конструкции из теории Пенлеве на разностный случай заставляет предположить, что и сами теории должны быть схожи. Однако это не так. Динамические системы задают бирациональное соответствие между начальным и конечным положением системы только в особых случаях, когда система интегрируется в классических трансцендентных функциях, и с существенной оговоркой: бирациональным является сужение соответствия на интегральные многообразия [5]. В то же время любые динамические системы с квадратичной правой частью могут быть аппроксимированы разностными

схемами, задающими бирациональное соответствие между начальными и конечными значениями как точками проективного пространства, что было отмечено в [9].

С точки зрения теории обратимых разностных схем особые случаи, когда динамическая система интегрируется в эллиптических функциях, приметны тем, что точки приближенных траекторий ложатся на эллиптические кривые, что было отмечено в [12]. Это позволяет думать, что приближенные решения таких систем весьма схожи с точными, только в теории разностных схем место бирациональных преобразований на кривой заменяет преобразование Кремоны. В настоящей статье мы хотим сравнить дискретную и непрерывную теории эллиптических функций.

§2. ТЕОРИЯ КЛАССИЧЕСКИХ ТРАНСЦЕНДЕНТНЫХ ФУНКЦИЙ

Рассмотрим динамическую систему

$$\frac{dx_i}{dt} = f_i(x_1, \dots, x_n), \quad i = 1, \dots, n,$$

или, для краткости,

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{f}(\mathbf{x}). \quad (1)$$

Будем считать f_i – рациональными функциями своих аргументов. Исключим из рассмотрения тривиальный случай, когда одна или несколько из этих функций тождественно равны нулю.

Решение задачи Коши

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{f}(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0 \quad (2)$$

на фиксированном отрезке $0 < t < T$ традиционно рассматривают как функцию t . Однако можно рассмотреть решение как соответствие между начальным положением \mathbf{x}_0 и конечным положением $\mathbf{x}_1 = \mathbf{x}(T)$. Это соответствие хорошо определено при тех начальных значениях \mathbf{x}_0 , которые не приводят к появлению точек ветвления на отрезке $0 < t < T$. Поскольку у автономной системы все особые точки зависят от начальных данных, особые начальные значения могут формировать весьма причудливые множества [5, 13]. Будем для краткости считать, что рассматриваемый отрезок указывается в задаче Коши и называть это соответствие – соответствием или преобразованием, заданным задачей Коши (2).

Пусть система (1) имеет несколько независимых алгебраических интегралов движения, скажем,

$$h_1(\mathbf{x}) = C_1, \dots, h_r(\mathbf{x}) = C_r.$$

Они задают интегральные многообразия размерности $n - r$, инвариантные относительно преобразования, заданного начальной задачей.

Определение 1. *Если сужение преобразования, заданного задачей Коши (2) при любом выборе $T > 0$, на интегральные многообразия является бирациональным преобразованием этих многообразий, то будем говорить, что динамическая система (1) интегрируется в классических трансцендентных функциях.*

Определение 1 подразумевает, что интегральное многообразие допускает бесконечную группу бирациональных автоморфизмов. Вообще говоря, многообразия обычно имеют лишь конечную группу автоморфизмов. Например, группа бирациональных автоморфизмов кривых, род которых больше 1, конечна, имеется возможность вычислять такие группы для гиперэллиптических кривых [14, 15]. Классификация многообразий, допускающих непрерывную группу бирациональных автоморфизмов, дает естественную классификацию классических трансцендентных функций [16, 17].

Линии допускают непрерывную группу бирациональных автоморфизмов только в том случае, когда их род равен 1 или 0 [16]. Пенлеве [5] доказал, что в первом случае мы получаем динамическую систему, которая интегрируется в эллиптических функциях, во втором – в трансцендентах, которые являются решениями уравнения Риккати. Он предположил, что и в случае многообразия произвольной размерности имеются два случая: основной, когда многообразие является абелевым, а система интегрируется в абелевых функциях, и различные его вырождения. В [5] дано обоснование этого утверждения для размерности 2, см. также [6, 7]. Для теории динамических систем, интегрируемых в эллиптических функциях, важен следующий результат.

Теорема 1 (Painlevé, 1897). *Пусть алгебраические интегральные многообразия динамической системы (1) являются линиями рода $p=1$. Динамическая система интегрируется в классических трансцендентных функциях в смысле определения 1 в том и только в*

том случае, когда

$$\frac{dx_1}{f_1}$$

является абелевым дифференциалом первого типа на интегральных кривых. При этом квадратура

$$\int \frac{dx_1}{f_1} = t + c$$

обращается в эллиптические функции, а x_i являются мероморфными двоякопериодическими функциями t .

Доказательство в существенном повторяет размышления, приведшие Пикара к доказательству конечности группы автоморфизмов кривых, род которых больше 1. Мы приведем доказательство теоремы 1 для удобства сравнения с доказательством разностного аналога этой теоремы, следуя в общих чертах [5].

Доказательство. (i) Пусть V – интегральная кривая рода $p = 1$ (т.е. эллиптическая кривая), на котором решение задачи Коши задает бирациональное преобразование \mathfrak{R} , зависящее от параметра T . Пусть u – абелев интеграл первого типа этой кривой [18, 19], тогда

$$\int_0^{\mathfrak{R}(\mathfrak{r}, T)} du$$

как функция \mathfrak{r} тоже является интегралом первого типа. Поэтому

$$\int_0^{\mathfrak{R}(\mathfrak{r}, T)} du = f(T) \int_0^{\mathfrak{r}} du + g(T).$$

Когда точка \mathfrak{r} описывает фундаментальный контур, ее образ тоже описывает некоторый замкнутый контур. Поэтому найдутся такие целые числа n, m , что

$$f(T)\omega = n\omega + m\omega',$$

где ω, ω' – фундаментальные периоды кривой V , которые зависят от V , но не от T [18]. Коэффициенты рациональной функции \mathfrak{R} зависят от T аналитически, поэтому f и g – аналитические функции T . Поэтому

функция f не может меняться скачками и $f(T) = f(0)$. При $T \rightarrow 0$ образ \mathfrak{r} стремится к \mathfrak{r} , поэтому $f(T) = 1$. Отсюда следует, что

$$\int_{\mathfrak{r}}^{\mathfrak{R}(\mathfrak{r}, T)} du = g(T).$$

Но тогда из системы (1) должно следовать уравнение

$$\frac{du}{dt} = g'(t).$$

На кривой V левую часть всегда можно преобразовать к виду

$$h(\mathfrak{r}) \frac{dx_1}{dt},$$

где h – некоторая рациональная функция \mathfrak{r} , не зависящая от t явно. Но тогда

$$g'(t) = h(\mathfrak{r})f_1(\mathfrak{r})$$

на решении системы (1), лежащем на интегральной кривой V . Рассматриваемая система – автономная, поэтому имеется однопараметрическое семейство таких решений, а именно, $\mathfrak{r}(t - c)$. Равенство

$$g'(t) = h(\mathfrak{r}(t - c))f_1(\mathfrak{r}(t - c))$$

возможно лишь в том случае, когда $g'(t)$ – константа. Поскольку интегралы 1-го типа определены с точностью до мультипликативной константы, не ограничивая общности можно считать, что интегралом первого типа является

$$\frac{dx_1}{f_1}$$

а решение дается квадратурой

$$\int \frac{dx_1}{f_1} = t + c.$$

Обрастая этот эллиптический интеграл, мы видим, что x_1 является эллиптической функцией t [18]. Меняя нумерацию переменных, видим, что x_i тоже являются эллиптическими функциями t .

(ii) Обратное, пусть

$$\frac{dx_1}{f_1}$$

является абелевым дифференциалом первого типа на интегральной кривой V , тогда

$$\frac{dx_i}{f_i}$$

тоже являются дифференциалом первого типа. Квадратура

$$\int \frac{dx_i}{f_i} = t + c$$

определяет x_i как эллиптическую функцию t . Обозначим частное решение системы (1) на V как

$$\mathfrak{x} = \wp(t).$$

Эллиптические функции обладают теоремой сложения [18], то есть

$$\mathfrak{x} = \wp(t + c) = F(\wp(t), \wp(c)) = F(\wp(t), \mathfrak{x}_0),$$

где F – рациональная функция своих аргументов. Поэтому конечные данные выражают рационально через начальные. Аналогично, можно выразить \mathfrak{x}_0 через \mathfrak{x} . Поэтому задача Коши задает бирациональное соответствие на интегральной кривой V , а это, в силу определения 1 означает, что система (1) интегрируется в классических трансцендентных функциях. \square

Замечание 1. Здесь и далее символ \wp используется для обозначения любой двояко периодической мероморфной функции, эллиптические функции Вейерштрасса ниже нигде не используются.

Рассмотрим теперь базовый пример.

Пример 1. Классический нелинейный осциллятор – осциллятор Якоби – описывается системой

$$\dot{p} = qr, \quad \dot{q} = -pr, \quad \dot{r} = -k^2 pq \quad (3)$$

и имеет два квадратичных интеграла

$$p^2 + q^2 = c_1 \quad \text{и} \quad k^2 p^2 + r^2 = c_2. \quad (4)$$

Эти интегралы вырезают в трехмерном пространстве pqr интегральные кривые системы (3), которые являются эллиптическими, если c_1 и c_2 отличны от нуля. Дифференциал

$$\frac{dp}{qr}$$

на интегральной кривой равен

$$\frac{dp}{\sqrt{(c_1 - p^2)(c_2 - k^2 p^2)}}.$$

Поскольку под корнем стоит многочлен 4-ой степени с простыми корнями, этот дифференциал – дифференциал первого типа. Поэтому квадратура

$$\int \frac{dp}{\sqrt{(c_1 - p^2)(c_2 - k^2 p^2)}} = t + c_3. \quad (5)$$

дает решение в эллиптических функциях t . Традиционно для его представления используют частное решение (3), соответствующее начальным условиям

$$p(0) = 0, \quad q(0) = r(0) = 1.$$

Это решение обозначают как

$$p = \operatorname{sn}(t, k), \quad q = \operatorname{cn}(t, k), \quad r = \operatorname{dn}(t, k).$$

Чтобы обратить эллиптический интеграл (5), приведем его к стандартному виду

$$\frac{1}{\sqrt{c_1 c_2}} \int \frac{dp}{\sqrt{\left(1 - \frac{p^2}{c_1}\right) \left(1 - k^2 \frac{c_1 p^2}{c_2 c_1}\right)}} = t + c_3.$$

Поэтому

$$p = \sqrt{c_1} \operatorname{sn} \left(\sqrt{c_2}(t + c_3), k \sqrt{\frac{c_1}{c_2}} \right).$$

Отсюда далее

$$q = \sqrt{c_1 - p^2} = \sqrt{c_1} \operatorname{cn} \left(\sqrt{c_2}(t + c_3), k \sqrt{\frac{c_1}{c_2}} \right)$$

и

$$r = \sqrt{c_2 - k^2 p^2} = \sqrt{c_2} \operatorname{dn} \left(\sqrt{c_2}(t + c_3), k \sqrt{\frac{c_1}{c_2}} \right).$$

Используя теоремы сложения для эллиптических функций Якоби [19], мы можем выразить p, q, r рационально через их значения при $t = 0$, то есть через

$$p_0 = \sqrt{c_1} \operatorname{sn} \left(\sqrt{c_2} c_3, k \sqrt{\frac{c_1}{c_2}} \right),$$

$$q_0 = \sqrt{c_1} \operatorname{cn} \left(\sqrt{c_2} c_3, k \sqrt{\frac{c_1}{c_2}} \right)$$

и

$$r_0 = \sqrt{c_2} \operatorname{dn} \left(\sqrt{c_2} c_3, k \sqrt{\frac{c_1}{c_2}} \right).$$

и наоборот. Поэтому сужение соответствия, которое задает задача Коши для системы (3), на интегральную кривую является бирациональным.

Коэффициенты формул, по которым p, q, r выражаются через начальные значения, являются эллиптическими функциями t , параметры которых зависят от c_1, c_2 . Поэтому эти коэффициенты не зависят от выбора начальной точки на интегральной кривой, но зависят от выбора самой интегральной кривой. Таким образом задача Коши задает бирациональное соответствие на интегральной кривой, но не на пространстве pqr .

Замечание 2. Последнее обстоятельство было предметом дискуссии. Эрмит высказал предположение, что в будущем теория эллиптических функций может быть построена на основе преобразований Кремоны. К сожалению, он был понят буквально, Клейн [20] уделил внимание разъяснению того, что не всякое бирациональное преобразование на кривой продолжается до бирационального преобразования объемлющего ее пространства.

Чтобы не рассматривать отдельно различные осцилляторы, условимся называть динамическую систему, алгебраические интегральные многообразия которой являются эллиптическими кривыми, на которых дифференциал

$$\frac{dx_1}{f_1}$$

является абелевым дифференциалом первого типа, эллиптическими осцилляторами. Тогда к ним относятся осцилляторы Якоби и Вейерштрасса, случаи Эйлера и Пуассона движения гироскопа, то есть классические динамические системы, интегрируемые в эллиптических функциях.

§3. ОБРАТИМЫЕ СХЕМЫ ДЛЯ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ ОСЦИЛЛЯТОРОВ

Метод конечных разностей предлагает заменить динамическую систему (1) системой алгебраических уравнений

$$g_i(\mathbf{x}, \hat{\mathbf{x}}, \Delta t) = 0, \quad i = 1, \dots, n, \quad (6)$$

связывающих значение решения в некоторый момент времени t со значением решения в момент времени $t + \Delta t$. Условимся первое значение обозначать просто как \mathfrak{r} , а второе – как $\hat{\mathfrak{r}}$. Конечную величину Δt будем называть шагом по времени. Саму систему алгебраических уравнений (6) будем называть разностной схемой для системы дифференциальных уравнений (1).

Будем интерпретировать \mathfrak{r} и $\hat{\mathfrak{r}}$ как точки проективного пространства \mathbb{P}^n , тогда система (6) описывает алгебраическое соответствие на пространстве \mathbb{P}^n . Разностную схему будем называть обратимой, если это соответствие является бирациональным.

Как было отмечено в [9], для всякой динамической системы с квадратичной правой частью можно составить обратимую разностную схему

$$\hat{\mathfrak{r}} - \mathfrak{r} = \mathfrak{F}\Delta t,$$

где правая часть \mathfrak{F} получается из правой части \mathfrak{f} исходной динамической системы путем замены квадратов x_i^2 на $x_i\hat{x}_i$, а смешанных членов x_ix_j – на $\frac{1}{2}(\hat{x}_ix_j + x_i\hat{x}_j)$. Условимся обозначать это преобразование так:

$$\hat{\mathfrak{r}} = \mathfrak{R}(\mathfrak{r}, \Delta t).$$

Исходная динамическая система и ее аппроксимация обладают t -симметрией, поэтому обратное преобразование получается обращением времени:

$$\mathfrak{r} = \mathfrak{R}(\hat{\mathfrak{r}}, -\Delta t).$$

Классические нелинейные осцилляторы описываются динамическими системами с квадратичной правой частью, поэтому эти системы можно аппроксимировать обратимыми разностными схемами.

Пример 2. Уравнения (3) осциллятора Якоби можно аппроксимировать разностной схемой

$$\hat{p} - p = \frac{\Delta t}{2}(\hat{q}r + q\hat{r}), \quad \hat{q} - q = -\frac{\Delta t}{2}(\hat{p}r + p\hat{r}), \quad \hat{r} - r = -\frac{k^2\Delta t}{2}(\hat{p}q + p\hat{q}), \quad (7)$$

которая в пространстве pqr задает квадратичное преобразование Крэмона [16].

Под приближенным решением задачи Коши (2) будем понимать последовательность точек $\{\mathfrak{r}_m\}$ проективного пространства \mathbb{P}^n , найденных рекуррентно для $m = 1, 2, \dots$ по формулам

$$\mathfrak{r}_m = \mathfrak{R}(\mathfrak{r}_{m-1}, \Delta t)$$

и для $m = -1, -2, \dots$ по формулам

$$\mathfrak{x}_m = \mathfrak{R}(\mathfrak{x}_{m+1}, -\Delta t).$$

Величину \mathfrak{x}_m мы будем интерпретировать как приближенное значение решения задачи Коши при $t = m\Delta t$. Если в процессе вычисления на m -том шаге получается неопределенность, будем считать точку $m\Delta t$ – особой.

Под интегралом обратимой схемы будем понимать рациональную функцию $h(\mathfrak{x}, \Delta t)$, постоянную на любом приближенном решении:

$$h(\mathfrak{x}_n, \Delta t) = h(\mathfrak{x}_0, \Delta t).$$

Будем говорить, что разностная схема наследует интеграл h_0 динамической системы, если разностная схема имеет интеграл $h(\mathfrak{x}, \Delta t)$, который при $\Delta t \rightarrow 0$ переходит в $h_0(\mathfrak{x})$.

Пример 3. В [12] по методу Лагутинского было доказано, что обратимая схема (7) для осциллятора Якоби имеет два интеграла. Первый, равный

$$\frac{p^2 + q^2}{1 + \frac{k^2 \Delta t^2}{4} q^2},$$

при $\Delta t \rightarrow 0$ переходит в интеграл $p^2 + q^2$ динамической системы, второй, равный

$$\frac{k^2 p^2 + r^2}{1 + \frac{\Delta t^2}{4} r^2},$$

переходит в интеграл $k^2 p^2 + r^2$ динамической системы. Это означает, что обратимая схема (7) наследует оба интеграла движения осциллятора Якоби. Более того, и в непрерывном, и в дискретном случаях точки всякого решения ложатся на кривую, которая представляет собой пересечение двух цилиндров, сечениями которых являются эллипсы.

Пусть обратимая схема для эллиптического осциллятора наследует все $n - 1$ ее интеграла движения, тогда всякое приближенное решение лежит на кривой линии, принадлежащей линейной системе

$$h_1(\mathfrak{x}, \Delta t) = c_1, \dots, h_{n-1}(\mathfrak{x}, \Delta t) = c_{n-1}. \quad (8)$$

Будем называть эти кривые интегральными кривыми обратимой схемы. При $\Delta t \rightarrow 0$ эти кривые переходят в эллиптические кривые. Вообще говоря, при предельном переходе могут завязываться новые особенности на кривой, поэтому род кривой при $\Delta t > 0$ может быть больше

1, но не может быть меньше 1. Сам абелев интеграл первого типа для этой кривой зависит от Δt , равно как и матрица фундаментальных периодов.

Пример 4. Точки приближенного решения для осциллятора Якоби (пример 3) ложатся на кривую V , заданную системой уравнений

$$p^2 + q^2 = c_1 \left(1 + \frac{k^2 \Delta t^2}{4} q^2 \right), \quad k^2 p^2 + r^2 = c_2 \left(1 + \frac{\Delta t^2}{4} r^2 \right). \quad (9)$$

Линейным преобразованием эта линия приводится к линии вида (4), поэтому ее род равен 1. На этой кривой

$$\frac{dp}{qr} = \frac{\alpha dp}{\sqrt{(c_1 - p^2)(c_2 - k^2 p^2)}}, \quad (10)$$

где множитель α не меняется на кривой и равен

$$\alpha = \sqrt{\left(1 - \frac{c_1 k^2 \Delta t^2}{4} \right) \left(1 - \frac{c_2 \Delta t^2}{4} \right)}. \quad (11)$$

Таким образом, dp/qr – или абелев дифференциал первого типа, или 0. Последнее происходит при тех значениях Δt , при которых $\alpha = 0$.

§4. ПРЕДСТАВЛЕНИЕ РАЗНОСТНОЙ СХЕМЫ В ВИДЕ КВАДРАТУРЫ

Докажем теперь разностный аналог теоремы 1.

Теорема 2. Если интегральная кривая (8) обратимой разностной схемы является эллиптической при малых $\Delta t \geq 0$, то саму разностную схему можно описать следующим образом

$$\int_{\mathfrak{r}}^{\hat{\mathfrak{r}}} v(\mathfrak{r}, \Delta t, C_1, \dots, C_{n-1}) dx_1 = \Delta t, \quad (12)$$

где $v dx_1$ – абелев интеграл первого типа для этой кривой, который при $\Delta t \rightarrow 0$ переходит в $dx_1/f_1(\mathfrak{r})$.

Доказательство. Как и в доказательстве теоремы 1, выражение

$$\int_O^{\mathfrak{R}(\mathfrak{r}, \Delta t)} v(\mathfrak{r}, \Delta t) dx_1$$

как функция \mathfrak{r} тоже является интегралом первого типа и поэтому найдутся такие f и g , что

$$\int_0^{\mathfrak{R}(\mathfrak{r}, \Delta t)} v(\mathfrak{r}, \Delta t) dx_1 = f(\Delta t) \int_0^{\mathfrak{r}} v(\mathfrak{r}, \Delta t) dx_1 + g(\Delta t).$$

При этом найдутся такие целые числа n, m , что

$$f(\Delta t)\omega = n\omega + m\omega',$$

где ω, ω' – фундаментальные периоды кривой (8), которые на этот раз зависят от Δt . При $\Delta t \rightarrow 0$ образ \mathfrak{r} стремится к \mathfrak{r} , поэтому $f(0) = 1$, $n = 1$ и $m = 0$. Однако, как и в доказательстве теоремы 1, функция f не может меняться скачками, а m и n , напротив, принимают только целые значения. Поэтому не только при всех $\Delta t = 0$ $n = 1$ и $m = 0$, но при других значениях Δt . Это означает, что

$$f(\Delta t) = 1.$$

Таким образом, нашу разностную схему можно записать в виде эллиптической квадратуры:

$$\int_{\mathfrak{r}}^{\hat{\mathfrak{r}}} v(\mathfrak{r}, \Delta t) dx_1 = g(\Delta t).$$

Абелев дифференциал определен с точностью до множителя, зависящего от Δt , поэтому это равенство можно переписать в виде

$$\int_{\mathfrak{r}}^{\hat{\mathfrak{r}}} v(\mathfrak{r}, \Delta t) dx_1 = \Delta t.$$

Это уравнение при $\Delta t \rightarrow 0$ должно переходить в

$$\frac{dx_1}{dt} = f_1(\mathfrak{r}),$$

поэтому

$$v(\mathfrak{r}, \Delta t) \rightarrow \frac{1}{f_1(\mathfrak{r})}$$

Это прекрасно согласуется с теоремой 1, согласно которой для эллиптического осциллятора dx_1/f_1 является дифференциалом первого типа. \square

Переход от \mathfrak{r} к $\hat{\mathfrak{r}}$ можно описать системой алгебраических уравнений, именуемой разностной схемой, и выражением (12). Это новое представление для разностной схемы мы будем называть квадратурой. Численные методы интегрирования дифференциальных уравнений развивались как обобщение сеточных методов интегрирования [21]. С этой точки зрения появление квадратур, которые, заметим, вычисляются точно, кажется весьма неожиданным. Однако в алгебраической геометрии хорошо известно, что подобного рода трансцендентные конструкции весьма удобны в теории бирациональных преобразований [16].

Квадратура описывает один шаг в отыскании приближенного решения $\{\mathfrak{r}_m\}$ задачи Коши (2):

$$\int_{\mathfrak{r}_{m-1}}^{\mathfrak{r}_m} v(\mathfrak{r}, \Delta t) dx_1 = \Delta t.$$

Поскольку интеграл – функция аддитивная, мы можем выразить \mathfrak{r}_m через \mathfrak{r}_0 при помощи квадратуры

$$\int_{\mathfrak{r}_0}^{\mathfrak{r}_m} v(\mathfrak{r}, \Delta t) dx_1 = m\Delta t. \quad (13)$$

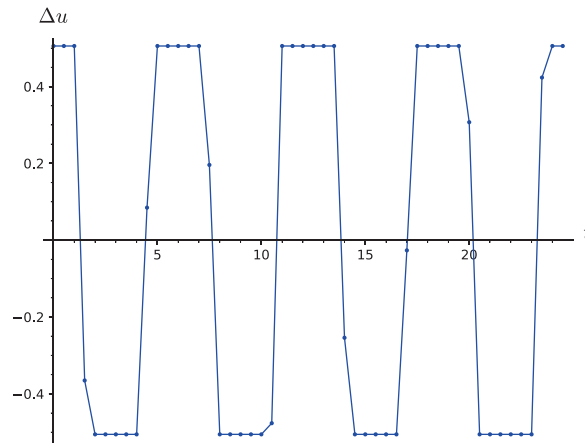


Рис. 1. Изменение приращение квадратуры в примере 5.

Пример 5. На интегральной кривой V осциллятора Якоби схему (7) можно записать в виде квадратуры

$$\int_{(p,q,r)}^{(\hat{p},\hat{q},\hat{r})} \frac{dp}{qr} = f(\Delta t, c_1, c_2) \quad (14)$$

Используя выражение для абелева интеграла, найденное выше в примере 4, мы можем записать это равенство в виде

$$\int_p^{\hat{p}} \frac{dp}{\sqrt{(c_1 - p^2)(c_2 - k^2 p^2)}} = \frac{f(\Delta t, c_1, c_2)}{\alpha(\Delta t, c_1, c_2)}, \quad (15)$$

где правая часть не зависит от p и \hat{p} . Допустим мы нашли приближенное решение по обратимой схеме с некоторым шагом Δt . Тогда начальные данные определяют значения констант c_1 и c_2 , следовательно, и величину

$$\Delta u = \frac{f(\Delta t, c_1, c_2)}{\alpha(\Delta t, c_1, c_2)}.$$

В силу теоремы 2

$$\int_{p_n}^{p_{n+1}} \frac{dp}{\sqrt{(c_1 - p^2)(c_2 - k^2 p^2)}} = \Delta u,$$

то есть квадратура, стоящая слева, остается постоянной на решении. Это нетрудно проверить прямым вычислением.

Всюду ниже в числовых примерах условимся брать

$$k = \frac{1}{5}, \quad c_1 = 1, \quad c_2 = 1.$$

Начальное значение p возьмем равным нулю, а q и r определим из уравнений (9). Возьмем нарочито большой шаг $\Delta t = 1/2$. Получающиеся при этом значения квадратуры

$$\int_{p_n}^{p_{n+1}} \frac{dp}{\sqrt{(c_1 - p^2)(c_2 - k^2 p^2)}} \quad (16)$$

представлены на рис. 1. Разумеется, при построении графика мы использовали арифметическое значение корня, из-за чего величина Δu оказалась переменной. Почти все время она принимает одно из двух значений, а именно ± 0.5055731 . Перемена знака хорошо известна и

в классической теории эллиптических функций (пример 1) и легко объясняется необходимость правильно выбирать ветвь корня. Однако между участками постоянства Δu имеются точки, в которых значения квадратуры отличаются от этих двух значений. Дело в том, что от номера шага не зависит квадратура

$$\int_{(p_n, q_n, r_n)}^{(p_{n+1}, q_{n+1}, r_{n+1})} \frac{dp}{qr} = \Delta v(c_1, c_2, \Delta t)$$

Здесь интеграл берется по дуге кривой (9), соединяющей (p_n, q_n, r_n) и $(p_{n+1}, q_{n+1}, r_{n+1})$. Обычно эту дугу можно описать так: переменная p пробегает отрезок $[p_n, p_{n+1}]$, а q и r – однозначные функции p , описывающиеся при помощи главных значений соответствующих радикалов. Однако, если q_n и q_{n+1} или r_n и r_{n+1} имеют разные знаки, то при интегрировании по отрезку $[p_n, p_{n+1}]$ нужно своевременно изменить знак у радикала. При вычислении (16) мы этого не делаем, поэтому и получаем значение, отличное от начального. Аналога для этого эффекта в теории динамических систем нет: переход от одной ветви к другой там происходит “мгновенно”.

Поскольку абелев дифференциал 1-го типа определен с точностью до мультипликативной “константы”, в качестве которой у нас выступает функция Δt и c_1, \dots, c_{n-1} , то выражение $vd x_1$ нам известно с точностью до такой функции. Примеры учат, что эта функция является трансцендентной.

Пример 6. Выражение, стоящее слева в (15), не зависит от выбора p на рассматриваемой кривой. Поэтому можно взять любую точку на V , возьмем ту, у которой $p = 0$:

$$p = 0, \quad q = 2\sqrt{\frac{c_1}{4 - c_1 \Delta t^2 k^2}}, \quad r = 2\sqrt{\frac{c_2}{4 - c_2 \Delta t^2}}.$$

По формуле (7) мы можем вычислить

$$\hat{p} = \beta \Delta t,$$

где для краткости введено обозначение

$$\beta = \frac{4\sqrt{c_1 c_2 (4 - c_1 k^2 \Delta t^2) (4 + c_2 \Delta t^2)}}{16 + 8c_2 \Delta t^2 - c_1 c_2 \Delta t^4 k^2}. \quad (17)$$

Таким образом, правая часть (14) дается выражением

$$f(\Delta t, c_1, c_2) = \alpha \int_0^{\beta \Delta t} \frac{dp}{\sqrt{(c_1 - p^2)(c_2 - k^2 p^2)}},$$

в котором α и β – известные алгебраические функции $\Delta t, c_1, c_2$, см. (11) и (17). Таким образом, коэффициент f квадратуры (14) является трансцендентной функцией Δt . Абелев интеграл как функция верхнего предела является бесконечнозначной аналитической функцией.

§5. ПЕРИОД ПРИБЛИЖЕННОГО РЕШЕНИЯ

Главное качественное свойство любого осциллятора – периодичность его движения. Этот период появляется от того, что квадратура

$$\int_{\mathfrak{f}_0}^{\mathfrak{f}} \frac{dx_1}{f_1} = t$$

задает соответствие между точками интегральной кривой V и значениями переменной t , лежащими в фундаментальном параллелограмме на комплексной плоскости t .

Интеграл, стоящий слева в формуле (13), тоже является эллиптическим интегралом первого типа, поэтому

$$\int_{\mathfrak{f}_0}^{\mathfrak{f}} v dx_1 = u$$

задает соответствие между точками интегральной кривой V и значениями переменной u , лежащими в фундаментальном параллелограмме на комплексной плоскости u . Фундаментальные периоды ω, ω' , вообще говоря, зависят от Δt и могут быть комплексными. Будем предполагать, что ω – положительный, тогда при $\Delta t \rightarrow 0$ он переходит в положительный период ω_0 точного решения.

Определение 2. Будем говорить, что бесконечная последовательность $\{\mathfrak{f}_m\}$ является периодической, если существует такое число M , что

$$\mathfrak{f}_{m+M} = \mathfrak{f}_m. \quad (18)$$

Если приближенное решение задачи Коши является периодической последовательностью, то будем называть его периодическим, а число $M\Delta t$ – периодом этого приближенного решения.

В нашем случае точки последовательности вычисляются рекуррентно по значению на предыдущем шаге, поэтому вместо (18) достаточно потребовать выполнения

$$\mathfrak{r}_M = \mathfrak{r}_0.$$

Квадратура (13) позволяет записать это условие в виде

$$\int_{\mathfrak{r}_0}^{\mathfrak{r}_0} v(\mathfrak{r}, \Delta t) dx_1 = M\Delta t$$

или

$$N\omega(\Delta t) = M\Delta t. \quad (19)$$

При выполнении этого условия, всякое решение задачи Коши, лежащее на рассматриваемой интегральной кривой V , имеет период $T = M\Delta t$ в смысле определения 2.

Пример 7. Для осциллятора Якоби квадратура (13) принимает вид

$$\int_{(p_0, q_0, r_0)}^{(p_m, q_m, r_m)} \frac{dp}{qr} = m\alpha \int_0^{\beta\Delta t} \frac{dp}{\sqrt{(c_1 - p^2)(c_2 - k^2 p^2)}}$$

или

$$\int_{p_0}^{p_m} \frac{dp}{\sqrt{(c_1 - p^2)(c_2 - k^2 p^2)}} = m \int_0^{\beta\Delta t} \frac{dp}{\sqrt{(c_1 - p^2)(c_2 - k^2 p^2)}}. \quad (20)$$

Приближенное решение как последовательность точек будет иметь период M в том и только в том случае, когда

$$\int_{p_0}^{p_M} \frac{dp}{\sqrt{(c_1 - p^2)(c_2 - k^2 p^2)}} = N\omega, \quad N \in \mathbb{N}.$$

Здесь ω – наименьший положительный период интеграла

$$\int \frac{dp}{\sqrt{(c_1 - p^2)(c_2 - k^2 p^2)}},$$

который не зависит от Δt и равен

$$\omega = \frac{1}{\sqrt{c_2}} \oint_C \frac{d\xi}{\sqrt{(1-\xi^2)\left(1-\frac{k^2 c_1}{c_2} \xi^2\right)}}$$

Выразим его через полный эллиптический интеграл

$$\omega = \frac{4}{\sqrt{c_2}} K\left(\sqrt{\frac{c_1}{c_2}} k\right).$$

Этот период совпадает с периодом осциллятора Якоби с теми же значениями c_1 и c_2 и не зависит от Δt (пример 1).

В силу (20) условие периодичности приближенного решения можно записать в виде

$$\int_0^{\beta \Delta t} \frac{dp}{\sqrt{(c_1 - p^2)(c_2 - k^2 p^2)}} = \frac{N\omega}{M}.$$

Приведем этот интеграл к стандартному виду:

$$\int_0^{\beta \Delta t / \sqrt{c_1}} \frac{d\xi}{\sqrt{(1-\xi^2)\left(1-\frac{k^2 c_1}{c_2} \xi^2\right)}} = \frac{N\omega \sqrt{c_2}}{M}.$$

Отсюда получается уравнение для отыскания шага Δt :

$$\beta \Delta t = \sqrt{c_1} \operatorname{sn}\left(\frac{4N}{M} K\left(\sqrt{\frac{c_1}{c_2}} k\right), \sqrt{\frac{c_1}{c_2}} k\right). \quad (21)$$

Вообще говоря, теоремы сложения позволяют выразить $\operatorname{sn}(4NK/M)$ как алгебраическое число, поэтому это уравнение – алгебраическое относительно Δt . Однако искать таким путем его весьма затратно и мы решали его численно.

Если Δt удовлетворяет соотношению (19), то движение является периодическим в смысле определения 2. При этом число M равно периоду последовательности $\{\mathfrak{r}_m\}$, а число N характеризует число периодов точного решения, помещающихся в одном периоде решения приближенного. Грубо говоря, осциллятор возвращается в свое исходное положение точно за время, равное не одному периоду, а N периодам.

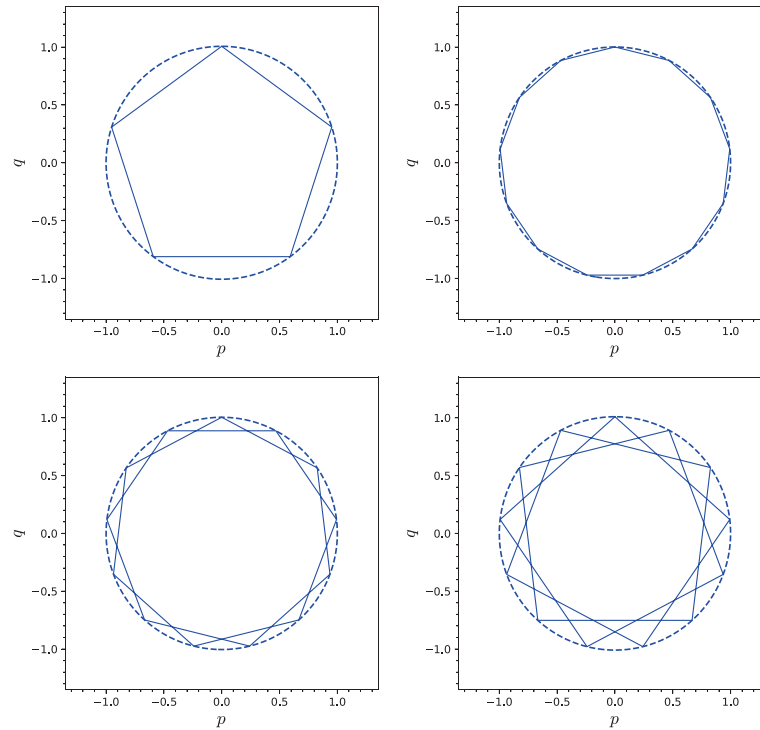


Рис. 2. Периодические решения для осциллятора Якоби при $M = 5$ и $N = 1$, $M = 13$ и $N = 1, 2, 3$.

Если соединить точки приближенных решений ломаной, то, как показали компьютерные эксперименты, при $N = 1$ и наименьшем положительном корне Δt уравнения (21) получается выпуклый M угольник, вписанный в эллипс (проекция кривой (9) на плоскость pq). На рис. 2 показаны случаи $M = 5$ и $M = 13$. При $N = 2$ и $N = 3$ тоже получается M угольник, точки которого соединены через 2 или 3 соответственно. Уравнение (21) имеет другие положительные корни, которые мы не смогли интерпретировать. Теории это не противоречит, метод, которым было получено уравнение (21), допускает появление лишних корней.

Уравнение (21) не применимо, если сразу на первом шаге происходит смена ветви в подынтегральном выражении (см. пример 5). Такая ситуация возникает, напр., при $M = 3$.

Возможность подбора шага Δt , при котором движение становится периодическим мы отметили в [9] и даже вычислили точно подходящие значения Δt при небольших M . Сложность примененного там алгоритма экспоненциально росла с ростом M . Теперь же мы можем вычислить приближенно значения Δt для больших значений M .

§6. ОПИСАНИЕ ПРИБЛИЖЕННОГО РЕШЕНИЯ ПРИ ПОМОЩИ ПЕРИОДИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

Представление разностной схемы в виде квадратуры позволяет описать наследование периодичности и еще одним способом, не требующим введение в рассмотрение специальным образом подбираемых шагов.

Теорема 3. *Если интегральная кривая (8) обратимой разностной схемы является эллиптической при малых $\Delta t \geq 0$, то всякое приближенное решение $\{\mathfrak{r}_m\}$ задачи Коши, начальная точка которой лежит на этой кривой, представимо в виде*

$$\mathfrak{r}_m = \wp(m\Delta t; \Delta t, C_1, \dots, C_{n-1}),$$

где \wp – эллиптическая функция относительно первого аргумента.

Доказательство. Интеграл

$$\int v dx_1,$$

будучи эллиптическим интегралом 1-го типа, обращается в мероморфных двоякопериодических функций. Обозначим решение уравнения

$$\int_{\mathfrak{r}_0}^{\mathfrak{r}} v dx_1 = u$$

относительно \mathfrak{r} как

$$\mathfrak{r} = \wp(u; dt, C_1, \dots, C_{n-1}),$$

подразумевая под \wp – эллиптическую функцию относительно первого аргумента. Тогда

$$\mathfrak{r}_m = \wp(m\Delta t; \Delta t, C_1, \dots, C_{n-1}). \quad \square$$

Напомним, что \mathfrak{x}_m мы интерпретируем как решение задачи Коши при $t = m\Delta t$. Точное решение этой задачи описывается при помощи тех же мероморфных функций. Таким образом, обратимая разностная схема предлагает заменить одну эллиптическую функцию другой, зависящей от шага Δt .

Пример 8. Квадратура (20) обращается обычным путем (пример 1):

$$p_m = \sqrt{c_1} \operatorname{sn} \left(m\Delta u, \sqrt{\frac{c_1}{c_2}} k \right),$$

где

$$\Delta u = \int_0^{\beta\Delta t} \frac{dp}{\sqrt{(c_1 - p^2)(c_2 - k^2 p^2)}}.$$

Доказанная теорема позволяет поставить вопрос о том, как именно следует формулировать определение периодичности приближенного решения. Определение 2, которые мы положили в основу наших исследований [9], предлагает самую простую трактовку этого понятия: периодическое приближенное решение – периодическая последовательность точек. Однако можно принять и более слабое определение

Определение 3. Будем говорить, что приближенное решение $\{\mathfrak{x}_m\}$ является периодическим класса \mathcal{C} , если существует такая периодическая функция \wp из класса \mathcal{C} , что

$$\mathfrak{x}_m = \wp(m\Delta u),$$

где Δu – величина, которая не зависит от m и $\Delta u/\Delta t \rightarrow 1$ при $\Delta t \rightarrow 0$.

Теорема 3 утверждает, что всякое решение, кроме особых (для которых интегральная кривая не является эллиптической), является мероморфным периодическим приближенным решением.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Мы начали наше исследование с загадки: почему динамические системы, интегрируемые в конечном виде, интегрируются в эллиптических функциях? В непрерывной теории ответ на этот вопрос не был найден. Но было сделано важное наблюдение: всякая динамическая система, которая задает бирациональное соответствие между начальными и конечными значениями на алгебраических интегральных многообразиях, интегрируется в классических трансцендентных функциях, обычно в эллиптических.

Однако как только мы переходим к конечным разностям, ситуация радикально меняется. Всякая динамическая система с квадратичной правой частью допускает обратимую разностную схему, то есть схему, которая задает бирациональное соответствие между начальным и конечным положениями системы. При этом нет никакой необходимости ограничивать рассмотрение интегральным многообразием – разностные схемы задают преобразования Кремены.

Эллиптическим осцилляторам соответствует тот особый случай, когда точки не только точных, но и приближенных решений ложатся на эллиптические кривые. Сами эти кривые зависят от шага дискретизации по времени Δt . Сужение преобразования Кремены на интегральные кривые (являющиеся неизбежно инвариантами этого преобразования), задает бирациональное преобразование на эллиптической кривой. Это преобразование всегда описывается при помощи эллиптических интегралов 1-го типа. Это дает нам описание приближенного решения в виде квадратуры, аналогичного тому, которое получается в непрерывной теории разделением переменных.

Появление квадратуры приводит к периодичности движения. Для приближенных решений само понятие периодичности можно вводить по-разному. Прежде всего, мы показали, как подобрать шаг Δt так, чтобы решение представляло собой периодическую последовательность точек с заданным периодом. Затем мы показали, что приближенное решение можно представить как набор значений мероморфной дwoякопериодической функции, вычисленной в точках $m\Delta u$. Таким образом, появление интегральных кривых, на которые ложатся точки приближенных решений, приводит к периодичности приближенного решения.

Дискретная и непрерывные теории эллиптических осцилляторов описываются одними и теми же формулами: квадратура описывает переход от начальных данных к конечным, движение является периодическим, описывается мероморфными функциями и т.д. Вся разница состоит в том, что в дискретной теории дискрет Δt подобран таким образом, что бирациональное преобразование, описывающее переход от старого положения системы к новому, продолжается до преобразования Кремены. Это возвращает нас к идее Эрмита о том, что теория преобразований Кремены объемлет теорию эллиптических функций (замечание 2).

Благодарности. Вычисления выполнены в системе компьютерной алгебры Sage [22], рабочий лист доступен на <https://github.com/malykhmd>.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. В. В. Голубев, *Лекции по интегрированию уравнений движения тяжелого твердого тела около неподвижной точки*, ГТТИ, Москва (1953).
2. В. В. Голубев, *Лекции по аналитической теории дифференциальных уравнений*, URSS, Москва (2021).
3. Н. А. Кудряшов, *Аналитическая теория нелинейных дифференциальных уравнений*, МИФИ, Москва (2002).
4. А. Р. Итс, А. А. Капаев, В. Ю. Новокшенов, А. С. Фокас., *Трансценденты Пенлеве. Метод задачи Римана*, ИКИ, R&C Dynamics, Москва–Ижевск (2005).
5. P. Painlevé, *Leçons sur la théorie analytique des équations différentielles*, Œuvres de Paul Painlevé, Vol. 1, (1971).
6. H. Umemura, *Birational automorphism groups and differential equations*. — Nagoya Math. J. **119** (1990), 1–80.
7. М. Д. Малых, *О трансцендентных функциях, возникающих при интегрировании дифференциальных уравнений в конечном виде*. — Зап. научн. семин. ПОМИ **432** (2015), 196–223.
8. F. W. J. Olver, *NIST Digital Library of Mathematical Functions*. — <https://dlmf.nist.gov> (online; accessed: 2023-01-30) (2022).
9. Али Баддур, М. Д. Малых, Л. А. Севастьянов, *О периодических приближенных решениях динамических систем с квадратичной правой частью*. — Зап. научн. семин. ПОМИ **507** (2021), 157–172.
10. А. П. Веселов, *Группа Кремоны и динамические системы*. — Матем. заметки **45**, No. 3 (1989) 118–120.
11. Ю. Мозер, *Лекции о гамильтоновых системах*, Мир, Москва (1973).
12. Э. А. Айрян, М. М. Гамбарян, М. Д. Малых, Л. А. Севастьянов, *О траекториях динамических систем с квадратичной правой частью, вычисленных по обратимым разностным схемам*. — Зап. научн. семин. ПОМИ **517** (2022), 17–35.
13. P. Painlevé, *Memoire sur les equations differentielles du premier ordre*, Œuvres de Paul Painlevé, Vol. 2 (1974), 237–461.
14. Tanush Shaska, *Determining the Automorphism Group of a Hyperelliptic Curve*. — In: Proceedings of the 2003 international symposium on Symbolic and algebraic computation (2003), pp. 248–254.
15. М. Д. Малых, Л. А. Севастьянов, *О вычислении группы автоморфизмов гиперэллиптических кривых*. — Зап. научн. семин. ПОМИ **485** (2019) 140–154.
16. F. Severi, *Lezioni di geometria algebrica*, Angelo Graghi, Padova (1908).
17. F. Enriques, *Le superficie algebriche*, Zanichelli (1949).
18. А. Гурвиц, Р. Курант, *Теория функций*, Наука, Москва (1968).
19. Ю. С. Сикорский, *Элементы теории эллиптических функций с приложениями к механике*, ОНТИ, М.-Л. (1936).

20. Ф. Клейн, *Лекции о развитии математики в XIX столетии*, Vol. 1, ОНТИ, М.-Л. (1937).
21. E. Hairer, G. Wanner, Ch. Lubich, *Geometric Numerical Integration. Structure-Preserving Algorithms for Ordinary Differential Equations*, Springer, Berlin-Heidelberg-New York (2000).
22. W. A. Stein and others, *Sage Mathematics Software (Version 9.6)*, <http://www.sagemath.org>, (2022).

Аурян Е. А., Gambaryan М. М., Malykh М. D., Sevastyanov L. A.
Reversible differential schemes for elliptical oscillators.

For classical nonlinear oscillators, a comparison between the classical continuous theory of integration in elliptic functions and the discrete theory based on reversible difference schemes was made. These schemes are notable for the fact that the transition from layer to layer is described by Cremona transformations, which gives a large set of algebraic properties. Several properties are shown for the example of the Jacobi oscillator: 1). points of approximate trajectories fall on elliptic curves, 2). difference scheme can be written using quadrature, 3). the approximate solution is periodic. Explicit formulas to calculate the time step for which the approximate solution is a periodic sequence were found.

Объединённый институт ядерных исследований; Поступило 16 октября 2023 г.
Государственный университет “Дубна”,
141980 г. Дубна Московской обл., Россия
E-mail: ayrjan@jinr.ru

Российский университет
дружбы народов,
ул. Миклухо-Маклая, д. 6,
Москва, Россия и
Объединённый институт
ядерных исследований,
ул. Жолио-Кюри, д. 6, Дубна,
Московская область, 141980, Россия
E-mail: malykh-md@rudn.ru

Российский университет дружбы народов;
Объединённый институт ядерных исследований,
Дубна, Московская область, 141980
E-mail: sevastianov-la@rudn.ru