Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 528, 2023 г.

А. М. Вершик

КОММЕНТАРИЙ К РАБОТЕ Э. ТОМА “ХАРАКТЕРЫ СЧЕТНОЙ БЕСКОНЕЧНОЙ СИММЕТРИЧЕСКОЙ ГРУППЫ” И АЛЬТЕРНАТИВНАЯ ФОРМУЛИРОВКА ПРОБЛЕМЫ

§1. Введние

Речь пойдет о замечательной работе Эльмара Тома, немецкого математика (1926-2002), русский перевод которой, выполненный В. Ивановым и Е. Нечаевым, публикуется в этом же выпуске “Записок Научных Семинаров ПОМИ”. Написанная более 60 лет назад, эта работа по-прежнему заслуживает внимания современных математиков из-за фундаментальности самого результата и, главное, многосторонности его истолкования. Здесь мы опишем проблему описания характеров бесконечной симметрической группы. которая впервые была решена Тома, а также о других подходах к ее доказательству и её обобщениях.

Впервые я услышал об этом результате Тома от И. М. Гельфанда в начале 70-х гг. Я рассказывал И.М. о своих результатах об асимптотических свойствах подстановок и о планах изучения представлений симметрической группы, Мнение И.М. состояло в том, что теория представлений конечных симметрических групп вполне закончена, а бесконечную симметрическую группу надо изучать и что известная, работа Э. Тома пока совершенно не понята. Я был не согласен с первым утверждением, поскольку у меня были претензии к утвердившемуся вполне классическому способу изложения теории представлений симметрческих групп, а ко второму совету я отнёсся с большим вниманием, поскольку я планировал заняться асимптотикой свойств не только самих симметрическх групп, но и их представлений. Что касается изложения теории представлений конечных симметрических групп, то много позже, в 90-х гг. после публикации нашей работы с А. Окуньковым [3], в

Ключевые слова: характеры, симметрическая группа, диаграммы, таблицы, граф Юнга.

Поддержано грантом РНФ 21-11-00152.

которой реализовывалась идея индуктивного подхода к симметрическим группам (кстати, очень близкая к подходу Гельфанда–Цетлина к теории ортогональных и унитарных групп), – И.М. согласился с моим прежним "недовольством" старой теории и сказал: "теперь все понятно". Индуктивный (динамический) подход к представлениям симметрических групп не рассматривался ранее для конечных групп, и в дальнейшем сыграл существенную роль в новой теории представлений бесконечной симметрической группы– f "Асимптотической теории представлений", отличающейся от подхода Э. Тома. В начале 70-х гг. я занимался асимптотикой функционалов на симметрических (с моим студентом А. Шмидтом – [1]), а в 1974 году я привлек своего аспиранта С. В. Керова, только что закончишего аспирантуру, к занятиям асимптотической теорией представлений симметрических групп, и мы начали нашу работу с разбора статьи Э. Тома о характерах бесконечной симметрческой группы.

Я уже знал о другой теореме Э. Тома, пожалуй, более известной в среде специалистов по функциональному анализ и теории представлений, чем статья о характерах, и опубликованной почти одновременно. В ней доказывался не очень сложный, но принципиальный результат о том, что любая счетная группа, не являющаяся конечным расширением абелевой группы, обязательно имеет примарные унитарные представления типа II или III в смысле фон Неймана, или, что она не есть группа типа I и поэтому пространство классов эквивалентных унитарных неприводимых представлений не имеет стандартной борелевской структуры. О роли этого результата и о его неочевидной связи с теоремой о характерах, стоит сказать несколько слов. На связь этих двух работ Тома сам указывает в самом начале статьи о характерах, говоря, что "теория характеров перенесена на счетные группы", но это утверждение нужно понимать лишь в том смысле что все счетные группы разделены в первой работе на два класса по отношению к типу характеров. Сама же теория характеров типа II далека от завершения и сейчас. Никаких намеков на то, как строить теорию характеров для бесконечных групп, в статье не содержится.

В действительности теорема Тома о группах типа I как бы опускала шлагбаум перед теорией унитарных представлений счетных групп по следующей причине: в отличие от многих непрерывных групп, в частности, от классических групп Ли, теория представлений которых, расцветала в те годы, перспектива изучать необозримое (т.е. не допускающее естественной борелевской параметризации) множество всех неприводимых унитарных представлений счетных групп (не типа I) никак не выглядела продуктивной. Но в первой работе Тома показал, что таковы почти все интересные счетные группы. И среди них – самая привлекательная – счетная группа финитных подстановок! Она не типа I и пространство классов её неприводимых представлений не имеет борелевской структуры.

Я слышал и тогда, и позже от многих математиков пессимистические мнения о будущем теории представлений. Выходов было два: первый, наиболее распространенный тезис – изучать следует только фактор-представления счетных групп с точностью до квазиэквивалентности, а не эквивалентности, т.е. игнорировать рассмотрение неприводимых представений; и второй, – отказаться от унитарности представлений в интересах приложений, на этом настаивал А. Паршин. Оба варианта имеют смысл, однако, ни тот, ни другой до сих пор не привели к построению сколько-нибудь стройной теории.

Я думаю, что обсуждаемая работа Тома о характерах бесконечной симметрической группы отчасти служит (хотя и без претензии на общность), конструктивным аргументом в этой дискуссии. С одной стороны Тома следовал первому, вполне классическому пути – изучать неразложимые нормированные характеры счетных групп, а с другой, показывал, насколько содержательна теория характеров групп, не являющихся группами типа I. Хотя в статье речь идет только о характерах бесконечной симметрической группы, стало ясно, что такой же вопрос реально ставить и исследовать для многих групп, и в первую очередь для счётных локально конечных групп. До сих пор подобных работ мало. Доказательство теоремы Тома мы комментируем ниже. Вопрос о представлениях, соответствующих характерам этой группы в работе Тома лишь ставится, а приведенные в статье методы не дают его решения. Он был решен позже с помощью динамических моделей, см. [16].

Ниже кратко описаны альтернативные подходы к задаче о характерах бесконечной симметрической группы и новые проблемы возникающие при этом.

§2. О доказательстве

Опишем кратко план работы Тома. Характеры бесконечной симметрической группы это положительно определенные, нормированные центральные функции на симметрической группе. Неразложимым называется характер, не представимый в виде нетривиальной выпуклой комбинации других характеров, – только такие характеры рассматриваются далее. Ставится вопрос об описании всех неразожимых характеров. Их множество позже я назвал абсолютом группы. Классическая теория Фробениуса–Шура–Юнга дает описание характеров конечных симметрических групп, параметризуемых диаграмами Юнга. Эта теория одно из самых значительных достижений математики начала XX века, но она применима только для конечных групп. Работа Тома, возможно первая работа о характерах счетных бесконечных групп не типа I.

Доказательство теоремы, данное Тома, состоит из двух следующих главных шагов:

а) Всякий характер (напомним, неразложимый и нормированный) $\chi(\,.\,)$ бесконечной симметрической группы $\mathfrak{S}_{\mathbb{N}}$ мультипликативен, т.е. значения характера на классе сопряженности есть произведение его значений на циклах, входящих в этот класс. Этим свойством не обладают характеры конечных симметрических групп. В работе Тома теорема мультипликативности доказывается прямой проверкой, и природа этого важного свойства остается таинственной. На самом деле оно связано с асимптотическими свойствами группы, напоминающими вероятностные эффекты асимптотической независимости.

Здесь по поводу этого пункта доказательства, мы заметим лишь следующее. Мультипликативность следов и характеров обобщалась в книге [18] и работе [15]. Наиболее общая формулировка дана во второй работе. Приведем без подробностей сответствующую общую теорему. Предположим, что некоторое коммутативное кольцо или алгебра (например, групповая) обладает частичным порядком (т.е. является пространством с конусом "хорошего" типа, например, с конусом Рисса), тогда всякий неразложимый положительный функционал, заданный на кольце (алгебре), является гомоморфизмом в поле констант. В данном конкретном примере это кольцо есть K-функтор симметрической группы, который есть фактор-кольцо кольца симметрических функций по линейным функциям, конус положительных элементов состоит из симметрических функций, коэффициенты разложения которых в виде линейных комбинаций функций Шура, неотрицательны. Упомянутая мультипликативность в теореме Тома вытекает из приведенной общей теоремы, примененной к K-функтору. Умножение в кольце в точности есть умножение представлений, обозначаемое “кружочком”, определяемое с помощью операции индуцирования.

б) Наиболее важный шаг доказательства Тома – вывод формулы характеров с помощью некоторой операции, которая сводит задачу к описанию важного класса мероморфных функций (вполне положительных). Рассмотрим экспоненту производящей функции значений характера на классах.

$$H_\chi(z) = \exp\left\{\Sigma_{n=1}^{\infty}\frac{\chi(c_n)z^n}{n}\right\},$$

Соответствие $\chi(\,.\,) \leftrightarrow H_\chi(.)$ является взаимно-однозначным между рядами значений характеров χ группы $\mathfrak{S}_\mathbb{N}$ на длинах циклов и вполне положительными функциями степенных рядов. Иначе говоря, положительная определенность функции на бесконечной симметрической группе истолкована в терминах полной положительной определенности функции H_μ (см. определение ниже).

После этого Тома ссылается на некоторую теорему Бибербаха, обобщающую теорему Пикара, что такая мероморфная функция H имеет первый порядок, и потому представима в виде произведения экспоненты $\exp\gamma x$ на дробно-линейную функцию. Нули α_n и полюса $\beta_{n n}$ этой функции вещественны ($\{\alpha_n, \beta_n\}$-неотрицательны) и сходятся при $n \to \infty$ нулю, а их сумма равна $1-\gamma, \gamma \geqslant 0$. Это дает общую формулу для характеров (см. текст). Параметры характеров пробегают “симплекс Тома”:

$$T = \Big\{\{\alpha_n, \beta_n, \gamma\}\alpha_1 \geqslant \alpha_2 \geqslant \ldots \geqslant 0,\ \beta_1 \geqslant \beta_2 \geqslant \ldots \geqslant 0,\ 0 \leqslant \gamma \leqslant 1: \\ \Sigma_n\{\alpha_n + \beta_n\} + \gamma = 1\Big\}.$$

$$\chi_{\alpha,\beta}(c_n) = \Sigma_n\{\alpha^n + (-1)^{n-1}\beta^n\}, \quad n > 0, \quad \chi(id) = 1,$$

а c_k цикл длины k.

Красота этой формулы Тома для характеров несомненна, но сразу возникает вопрос: в чем представленческий смысл параметров α_n, β_n, γ? Ответа на этот вопрос работа Тома не дает. Ответ получен в нашей работе [9], с помощью определения естественной динамической системы, сопоставляемой представлению и характеру. Одновременно получено объяснение самой формулы, как формулы для меры множества неподвижных точек для соответствующего действия группы. В дальнейшем выяснилось (см. [12]), что класс этих динамических систем совпадает с классом систем с вполне несвободным действием (в данном случае симметрической группы), и именно последнее свойство обеспечивает тот факт, что представление, соответствующее этому действию, есть представление типа II_1.

Наиболее трудная часть теоремы относится ко второму шагу доказательства, точнее к установлению единственности характера, который отвечает функции без нулей и полюсов. Это – характер регулярного представления (характеристическая функция единичного элемента группы). Именно для доказательства того, что единственная -функции без нулей и полюсов, равная единице в нуле, есть $\exp z$ и нужна ссылка на книгу Бибербаха, заметим, сделанная Тома несколько неопределенным образом. К сожалению, Тома, видимо, не знал, уже опубликованных к тому времени работ Shoenberg, Edrei, Aissen ([4, 5]) в которых давался общий вид вполне положительно определенных (односторонних, что нужно для характеров, или двусторонних) комплексных рядов), – это была бы исчерпывающая ссылка.

Напомним, что функция, представленная степенным рядом (или рядом Лорана) называется вполне положительной, если все (а не только главные) миноры теплицевой матрицы, составленные из коэффициентов ряда, неотрицательны. (см. выше). Эта теорема считается в теории мероморфных функций трудной и важной. Удивительно, что она эквивалентна теореме о единственности регулярного характера (=без нулей и полюсов, или на языке диаграмм Юнга – характеров с нулевыми частотами строк и столбцов). Обсуждение вопроса см. ниже и в [19]. Но прямого перевода уже имеющихся альтернативных доказательств единственности характера на язык теории мероморфных функций, как будто до сих пор не существует. Тем интереснее попытки найти чисто комбинаторное доказательство этого факта

§3. Альтернативный подход

Как уже говорилось развитие излагаемой теории продолжилось начиная с 70-х годов, хотя непосредственных откликов на работу Тома, как ни странно, видимо не было вплоть до наших работ. Тогда автором была выдвинута идея о “динамическом подходе” к теории представлений локально конечных групп. Например, скрытая стационарность бесконечной симметрической группы подсказывает, что надо искать свойства группы в духе законов больших чисел, но не для случайных величин, а для характеристик групп и алгебр, обладающих некоторыми скрытыми симметриями на "бесконечности". Так характеры бесконечной группы надо искать как те или иные пределы конечных подгрупп. Теория диаграмм Юнга и диаграмм Браттели дает удобный язык для этого. Эти идеи отличны от традиционных методов теории представлений и функционального анализа, и именно они были объединены названием "Асимптотическая теория представлений".

Суть предложенных 70-х гг. идей применительно к вопросу о представлении симметрической группы, реализованной мной с С. В. Керовым, состояла в том, что характеры искались как пределы характеров конечных симметрических групп при определенных правилах перехода к пределу, точно также как инвариантные меры для бесконечных групп ищутся, как пределы инвариантных мер для ее конечных подгрупп (эргодический метод [17]). Эта аналогия с теорией динамических систем была исходной и совершенно новой. Ее применение позволило получить не только описание характеров, но и реализацию представлений, классификацию фактор-представлений и др. Наиболее наглядным фактом, вытекающим из нашего подхода служит ставшая неожиданной интерпретация параметров Тома α_n и β_n (координат полюсов и нулей H-функции) как частот столбцов и строк конечных диаграмм Юнга, соответствующих предсталвениям при аппроксимации бесконечного характера конечными. С. В. Керов сделал много в развитие этих идей – см. его книгу [13]. Конкретно о мере Планшереля, рассматриваемой с близкой точки зрения см. важную работу [7].

Наиболее важная переформулировка проблемы описания характеров связана с пониманием следов на локально-полупростых алгебрах или более общо – с теорией диаграмм Браттели. Речь идет об индуктивных пределах конечномерных полупростых алгебр и их представлениях. Ясно, что групповые алгебры локально-конечных групп (в частности счетная симметрическая группа) являются локально-полупростыми алгебрами и по утверждению, независимо высказанным Войкулеску–Стратила и Вершик–Керов, эти алгебры являются полупрямыми произведениями некоторой коммутативной алгебры (алгебры Гельфанда–Цетлина (ГЦ)) и действующей на этой алгебре группы автоморфизмов [5, 17]. Связь с динамикой подкреплена этой алгебраической конструкцией. Одно из основных следствий этой конструкции состоит в том, что следы этой алгебры (и, если алгебра групповая, характеры группы) находятся в однозначном соответствии с так называемыми центральными мерами на коммутативной алгебре (Гельфанда–Цетлина), т.е. мерами на пространстве путей диаграммы Браттели, инвариантными относительно группы автоморфизмов алгебры ГЦ. Удивительным образом понятие центральной меры объединилось с идеей *адической реализации автоморфизмов пространств с мерой* – новой реализацией динамических систем ([2]) предложенной несколько ранее.

Таким образом, задача описания характеров становится специальной задачей описания инвариантных (центральных) мер на пространстве путей градуированного графа. А именно, графом Юнга называется локально-конечный граф $\mathbb{Y}$, вершины которого есть диаграммы Юнга т.е конечные идеалы решетки $\mathbb{Z}_2^+$, а путь из начальной вершины (минимальный элемент) в данную есть таблица Юнга этой диаграммы, или монотонная нумерация элементов диаграммы (идеала). Пространство таблиц Графа Юнга есть компакт в проконечной топологии и неразложимые характеры симметрической группы есть эргодические центральные меры на простанстве таблиц. Совокупность всех эргодических центральных мер на пространстве путей диаграммы Браттели названа *абсолютом графа*. Центральность (соответствующая центральности характера) есть свойство меры быть инвариантной относительно любой подстановки начала путей. таким образом задача о характерах адекватно вложилась в задачу об инвариантных мерах. Поэтому мы получили чисто комбинаторную переформулировку задачи о характерах. Та единственная мера (отвечающая характеру с H-функцией без нулей и полюсов) на этом языке соответствует мере Планшереля, которая имеет нулевые частоты строк и столбцов в терминах таблиц. Это характер регулярного представления. И в этой формулировке деликатный вопрос о единственности такой центральной меры является главным. Вопрос о комбинаторном доказательстве теоремы Тома, и в частности, о единственности ставился давно, но лишь сейчас такое доказательство стало реальностью, о чем будет написано в другой работе, включающей некоторые новые понятия теории решёток.

В свою очередь, можно существенно расширить постановку задачи, рассматривая произвольные решётки, диаграммы Хассе их конечных идеалов (диаграмм), их нумераций (таблиц) и, наконец, абсолют. Среди всех центральных мер выделяются меры с нулевыми частотами. Понятие частот можно опредлить для путей на широком классе графов (см. [14]), в частности для дистрибутивных решёток. Эти меры, названные "абсолютными мерами" графов (диаграмм Хассе) представляет исключительный математический и, возможно, физический интерес, как и мера Планшереля на путях графа Юнга, возникшая в связи с симметрической группой. Скорее всего у всякого графа абсолютная мера единственна, что и установил Тома для симметрической группы. Предельная форма типичной таблицы по абсолютной мере (если она существует), найденная для графа Юнга в [10, 11], – чрезвычайно важный объект. Заметим, что самым простым нетривиальным примером это типа проблем (решетки Хассе бесконечных посетов) является не граф Юнга, а его половина – граф верхне-треугольных таблиц. Абсолютная мера и предельная форма для нее есть половина соответственно меры Планшереля и предельной формы для неё. Задача для этого графа, видимо, является простейшей в классе таких задач и из ее решения можно вывести решение для графа Юнга и других градуированных графов.

Список литературы

1. А. Вершик, А. Шмидт, *Предельные меры, возникающие в асимптотической теории симметрических групп.* I. — Теор. вероятн. и ее прим. **22**, No. 1 (1977), 72–88; **23**, No. 1 (1978), 42–54.
2. А. Вершик, *равномерная алгебраическая аппроксимация операторов сдвига и умножения.* — ДАН СССР **259**, No. 3 (1981), 526–529.
3. А. Вершик, А. Окуньков, *Индуктивный способ изложения теории представлений симметрических групп.* — УМН **51**, No. 2 (308) (1996), 153–154.
4. M. H. Aissen, A. Edrei, I. J. Schoenberg, A. Whitney, *On the generating functions of nonally positive sequences.* — Proc. National Acad. Sci. USA **37** (1951), 303–307.
5. A. Edrei, *On the generation function of a doubly infinite, totally positive sequence.* — Trans. Amer. Math. Soc. **74** (1953), 367–383.
6. A. Edrei, *On the generating functions of totally positive sequences.* II. — J. d'Analyse Mathématique **2** (1952), 104–109.
7. A. Borodin, G. Olshanski, A. Okounkov, *Asymptotics of Plancherel measures for symmetric groups.* — J. Amer. Math. Soc. **13**, No. 3 (2000), 481–515.
8. А. Ю. Окуньков, *Теорема Тома и представления бесконечной бисимметрической группы.* — Функц. анализ и его прил. **28**, No. 2 (1994), 31–40.

9. А. Вершик, С. Керов, *Асимптотическая теория характеров симметрической группы.* — Функц. анализ и его прил. **15**, No. 4 (1981), 15–27.
10. А. Вершик, С. Керов, *Асимтотика меры Планшереля симметрической группы и предельная форма таблиц Юнга.* — ДАН СССР **233**, No. 6 (1977), 1024–1027.
11. L. Shepp, B. Logan, *A variational problem for random Young tableaux.* — Adv. Math. **26**, No. 2 (1977), 206-222.
12. A. Vershik, *Totally nonfree actions and the infinite symmetric group.* — Mosc. Math. J. **12**, No. 1 (2012), 193–212.
13. S. Kerov, *Asymptotic Representation Theory of the Symmetric Group and its Applications in Analysis.* Translations of Mathematical Monographs, vol. 219, 2003.
14. А. Вершик, *Одномерные центральные меры на нумерациях упорядоченных множеств.* — Функц. анализ и его прил. **56**, No. 4 (2022), 17–24.
15. A. Vershik, C. Kerov, *Characters, factor representations and K-functor of the infinite symmetric group.* — In: Operator algebras and group representation, vol. II (Neptun, 1980). Monogr. Stud. Math. 18, 23–32. Pitman, Boston, 1984.
16. А. Вершик, С. Керов, *Локально полупростые алгебры. Комбинаторная теория и K0-функтор.* — В сб.: Итоги науки и техники. Современные проблемы математики. Фундаментальные направления **26**, 3–56. М: ВИНИТИ, 1985.
17. А. Вершик, *Описание инвариантных мер для действия некоторых бесконечномерных групп.* — ДАН СССР **218**, No. 4 (1974), 749–752.
18. S. Stratila, D. Voiculesku, *Representation of AF-algebras and of the Group $U(\infty)$.* Springer LNM #486 1975.
19. А. Вершик, *Три теоремы о единственности меры Планшереля с разных позиций.* — Алгебраическая топология, комбинаторика и математическая физика, Тр. МИАН, 305, МИАН, М., 2019, 71–85

Vershik A. M. The comments to the article by Elmar Thoma: "Die unzerlegbaren, positiv-definiten Klassenfunktionen der abz ählbar unendlichen, symmetrischen Gruppe", опубликованной в Mathematische Zeitschrift 85 (1964), 40–61.

We comment here the classical article by Elmar Thoma abour caracters of the infinite symmetric group; consider the proof of the main result , which compare with the following papers of different authors who suggested various approves to the theory of the characters and representations of that group as well as related groups.

С.-Петербургское отделение
математического института
им. Стеклова РАН;
С.-Петербургский
Государственный Университет;
Московский институт проблем
передачи информации
E-mail: vershik@pdmi.ras.ru

Поступило 14 ноября 2023 г.