Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 528, 2023 г.

Е. Тома

НЕРАЗЛОЖИМЫЕ ПОЛОЖИТЕЛЬНО ОПРЕДЕЛЕННЫЕ ЦЕНТРАЛЬНЫЕ ФУНКЦИИ НА СЧЕТНОЙ, БЕСКОНЕЧНОЙ СИММЕТРИЧЕСКОЙ ГРУППЕ

В теории конечных групп наиболее изучены представления и характеры симметрических групп. В работе [4] теория характеров перенесена на счетные группы. Характеры неприводимых представлений конечных групп соответствуют (с точностью до нормировки) неразложимым положительно определенным центральным функциям. Аналогом конечных симметрических групп в классе счетных групп является группа биективных отображений счетного множества на себя, переставляющая только конечное число точек. Назовем эту группу бесконечной симметрической группой и будем обозначать ее через $\mathfrak{S}_\infty$. В данной работе в Теореме 3 на стр. 28 мы явно опишем неразложимые положительно определенные центральные функции на группе $\mathfrak{S}_\infty$.

Произвольный элемент $\varphi \in \mathfrak{S}_\infty$ является произведением конечного числа попарно непересекающихся циклов. Класс сопряженности φ можно описать последовательностью чисел $\gamma_2, \gamma_3, \ldots$, каждое из которых равно количеству циклов соответствующей длины $2, 3, \ldots$. Верно и обратное: каждой последовательности $\gamma = (\gamma_2, \gamma_3, \ldots)$ неотрицательных целых чисел, только конечное число которых отлично от нуля, соответствует некоторый класс сопряженности K_γ. Тогда центральную функцию α на группе $\mathfrak{S}_\infty$ можно интерпретировать как функцию на множестве Γ всех таких последовательностей. В §1 с помощью методов общей теории, разработанных в [4] и [5], будет показано, что положительно определенная функция α неразложима тогда и только тогда, когда α имеет вид $\alpha(\gamma) = p_2^{\gamma_2} p_3^{\gamma_3} \cdots$ (см. теорема 1).

В §2 мы определим все последовательности $p_2, p_3, \ldots$, которые задают положительно определенную центральную функцию. Если задана

Перевод статьи E. Thoma “Die unzerlegbaren, positiv-definiten Klassenfunktionen der abzählbar unendlichen, symmetrischen Gruppe”, опубликованной в *Mathematische Zeitschrift* **85** (1964), 40–61.

Перевод выполнен В. Н. Ивановым и Е. Т. Нечаевым.

такая последовательность, назовем ряд

$$p(z) = z + \frac{p_2}{2}z^2 + \frac{p_3}{3}z^3 + \cdots$$

p-рядом и ряд $H(z) = e^{p(z)}$ H-рядом (на самом деле мы будем использовать несколько более общие определения). H-ряды могут быть описаны с помощью так называемых полных симметрических функций, которые играют важную роль в описании характеров конечных симметрических групп (через положительность некоторых определителей, см. [3] и в особенности [2]). Из этого будет следовать, что H-ряды – это довольно простые мероморфные функции (см. теорема 2). В лемме 8 будут описаны нули и полюса H-рядов. С помощью результатов о целых функциях в Лемме 9 будет показано, что H-ряд без нулей, являющийся целой функцией – это ряд вида $e^{\alpha z}$, где $\alpha \geqslant 0$.

В §3 в теореме 3 получен главный результат работы, который сразу же следует из теорем 1 и 2. В теореме 4 мы опишем топологию на множестве $E(\mathfrak{S}_\infty)$, по определению, это множество *всех неразложимых положительно определенных центральные функций с нормировкой* $\alpha(e) = 1$. Из [4] следует, что каждой функции $\alpha \in E(\mathfrak{S}_\infty)$ соответствует факторпредставление конечного типа в смысле фон Неймана $U^\alpha \colon x \to U_x^\alpha$ группы $\mathfrak{S}_\infty$. В теореме 5 мы покажем, что все такие представления, кроме тривиального и знакового, относятся к типу II. В этой связи возникает вопрос: можно ли описать все эти представления U_α каким-либо простым способом по параметрам $\alpha_1, \alpha_2, \dots; \beta_1, \beta_2, \dots$, которые определяются по α в теореме 3? В теореме 6 мы решаем, ставшую теперь простой, задачу описания неразложимых положительно определенных центральных функций на знакопеременной группе $\mathfrak{A}_\infty$.

§1. Восстановление неразложимой положительно определенной центральной функции по ее значениям на циклах

Пусть, как и раньше, $\mathfrak{S}_\infty$ – группа биективных отображений множества $\mathbb{N}$ натуральных чисел, таких что $\varphi(\nu) = \nu$ для всех кроме конечного числа ν. Нейтральный элемент группы $\mathfrak{S}_\infty$ – это тождественное отображение $\varepsilon(\nu) = \nu$. Как и в случае конечных симметрических групп, элемент $\varphi \neq \varepsilon$ может быть разложен в произведение попарно непересекающихся циклов. Для $\varphi \neq \varepsilon$ обозначим через $\gamma_n(\varphi)$ количество циклов длины n в этом разложении φ для $n = 2, 3, \ldots$. Также положим $\gamma_n(\varepsilon) = 0$ для $n = 2, 3, \ldots$. Обозначим через $\gamma(\varphi)$ последовательность чисел $\gamma_2(\varphi), \gamma_3(\varphi), \ldots$. Также обозначим через Γ множество всех таких последовательностей $\gamma = (\gamma_2, \gamma_3, \ldots)$ целых чисел, что $\gamma_n \geqslant 0$ для $n = 2, 3, \ldots$, и $\gamma_n \neq 0$ только для конечного набора чисел n. Таким образом, каждому элементу $\varphi \in \mathfrak{S}_\infty$ соответствует некоторая последовательность $\gamma(\varphi) \in \Gamma$, и для каждой последовательности $\gamma \in \Gamma$ найдется хотя бы один элемент $\varphi \in \mathfrak{S}_\infty$ такой, что $\gamma(\varphi) = \gamma$. Как и в случае конечных групп можно показать, что $\varphi_1, \varphi_2 \in \mathfrak{S}_\infty$ лежат в одном классе сопряженности тогда и только тогда, когда $\gamma(\varphi_1) = \gamma(\varphi_2)$. Положим $K_\gamma = \{\varphi \colon \gamma(\varphi) = \gamma\}$, $\gamma \in \Gamma$. Ясно, что все классы сопряженности, кроме тривиального $K_0 = \{\varepsilon\}$, бесконечны. Кроме того, для любого элемента $\varphi \in \mathfrak{S}_\infty$ обратный элемент φ^{-1} лежит в том же классе сопряженности, так как циклу $(\nu_1, \ldots, \nu_m)$ в разложении φ соответствует цикл $(\nu_1, \ldots, \nu_m)^{-1} = (\nu_m, \nu_{m-1}, \ldots, \nu_1)$ в разложении элемента φ^{-1}.

Пусть теперь α – центральная функция на $\mathfrak{S}_\infty$, обозначим через $\alpha(\gamma)$ значение α на классе сопряженности, отвечающем последовательности γ, то есть, $\alpha(\gamma) = \alpha(\varphi)$ для $\gamma(\varphi) = \gamma$. Предположим, что α – положительно определенная центральная функция, в этом случае мы будем писать $\alpha \in L^+(\mathfrak{S}_\infty)$. Тогда

$$\alpha(\varepsilon) \geqslant |\alpha(\varphi)| \quad \text{и} \quad \overline{\alpha(\varphi)} = \alpha(\varphi^{-1}).$$

Следовательно, выполнено неравенство $\alpha(0) \geqslant |\alpha(\gamma)|$, и число $\alpha(\gamma)$ является вещественным для всех $\gamma \in \Gamma$. В частности, если $\alpha(0) = 1$, то мы будем писать $\alpha \in K(\mathfrak{S}_\infty)$. В этом случае $1 \geqslant \alpha(\gamma) \geqslant -1$ для всех $\gamma \in \Gamma$. Обозначим также через $\gamma^{(\mu)}$ для $\mu = 2, 3, \ldots$ последовательность $(\delta_{2,\mu}, \delta_{3,\mu}, \ldots)$, где $\delta_{\mu,\nu} = 0$ если $\mu \neq \nu$ и $\delta_{\nu,\nu} = 1$.

Сформулируем главный результат §1:

Теорема 1. *Рассмотрим $\alpha \in K(\mathfrak{S}_\infty)$, то есть α – положительно определенная центральная функция и $\alpha(\varepsilon) = 1$. Мы утверждаем, что функция α неразложима тогда и только тогда, когда α имеет вид*

$$\alpha(\gamma) = \prod_{\nu=2}^{\infty} p_\nu^{\gamma_\nu} \quad \textit{для всех} \quad \gamma \in \Gamma, \tag{1}$$

где $p_2, p_3, \ldots$ – последовательность вещественных чисел, причем $|p_\nu| \leqslant 1$, и мы условились, что $p_\nu^0 = 1$.

Прежде чем перейти к доказательству этой теоремы, сделаем несколько замечаний:

1. Произведение (1) конечно, потому что только конечное число множителей не равно 1.

2. Из теоремы 1 следует, что если известны все последовательности $p_2, p_3, \ldots$ вещественных чисел с $|p_\nu| \leqslant 1$, то известно и множество $E(\mathfrak{S}_\infty)$. В §2 это следствие будет сформулировано явно.

Докажем сначала импликацию "только тогда" теоремы 1. Пусть $\alpha \in E(\mathfrak{S}_\infty)$. Понятно, что $\alpha(0) = 1$, так как элементы $E(\mathfrak{S}_\infty)$ уже нормированы. Положим $\alpha(\gamma^{(\nu)}) = p_\nu$. Тогда из замечания перед теоремой 1 получаем, что p_ν - это вещественное число, и $|p_\nu| \leqslant 1$. Остается доказать, что для p_ν выполняется равенство (1).

Пусть $n \geqslant 2$ – натуральное число и φ_0 – это цикл $(1, 2, \ldots, n)$. Рассмотрим циклическую подгруппу Z_n порядка n, порожденную φ_0. Обозначим через $\mathfrak{S}_{n,\infty}$ подгруппу, состоящую из таких элементов $\varphi \in \mathfrak{S}_\infty$, что $\varphi(\nu) = \nu$ для $\nu = 1, 2, \ldots, n$. Разумеется, она изоморфна группе $\mathfrak{S}_\infty$, и ее классы сопряженности – это пересечения классов сопряженности $\mathfrak{S}_\infty$ с подгруппой $\mathfrak{S}_{n,\infty}$. Кроме того, все элементы подгруппы Z_n коммутируют с элементами подгруппы $\mathfrak{S}_{n,\infty}$. Рассмотрим подгруппу $G_n = Z_n \mathfrak{S}_{n,\infty}$ группы $\mathfrak{S}_\infty$. Группа G_n изоморфна прямому произведению $\mathbb{Z}_n \times \mathfrak{S}_{n,\infty}$. Совпадение множеств $E(Z_n) = F(Z_n)$ следует из конечности числа неприводимых характеров $\chi_0, \chi_1, \ldots, \chi_{n-1}$ циклической группы Z_n. Множество $E(\mathfrak{S}_{n,\infty})$ (соответственно, множество $F(\mathfrak{S}_{n,\infty})$) гомеоморфно множеству $E(\mathfrak{S}_\infty)$ (соответственно, множеству $F(\mathfrak{S}_\infty)$). Из теоремы 4 в работе [5] следует, что $F(Z_n \times \mathfrak{S}_{n,\infty}) = F(Z_n) \times F(\mathfrak{S}_{n,\infty})$. Сужение $\widehat{\alpha}$ функции α на G_n лежит в $K(G_n)$. Рассмотрим равенство

$$\widehat{\alpha} = \int\limits_{F(Z_n) \times F(\mathfrak{S}_{n,\infty})} \chi \otimes \beta d\mu,$$

которое мы называем полным разложением $\widehat{\alpha}$. Из него следует, что

$$\alpha(\varphi_0^m \varphi) = \sum_{\nu=0}^{n-1} \chi_\nu(\varphi_0^m) \int\limits_{F(\mathfrak{S}_{n,\infty})} \beta(\varphi) d\mu_\nu(\beta)$$

для $m = 0, 1, \ldots, n-1$ и $\varphi \in \mathfrak{S}_{n,\infty}$, где меры μ_ν на $F(\mathfrak{S}_{n,\infty})$, таковы, что

$$\sum_{\nu=0}^{n-1} \mu_\nu(F(\mathfrak{S}_{n,\infty})) = 1, \text{ и } \mu_\nu(F(\mathfrak{S}_{n,\infty}) \setminus E(\mathfrak{S}_{n,\infty})) = 0$$

для $\nu = 0, 1, 2, \ldots, n-1$. Положим

$$\mu = \sum_{\nu=0}^{n-1} \mu_\nu, \text{ тогда } \alpha(\varphi) = \int\limits_{F(\mathfrak{S}_{n,\infty})} \beta(\varphi) d\mu(\beta)$$

для всех $\varphi \in \mathfrak{S}_{n,\infty}$ и $\mu(F(\mathfrak{S}_{n,\infty}) \setminus E(\mathfrak{S}_{n,\infty})) = 0$. Сужение α' функции α на подгруппу $\mathfrak{S}_{n,\infty}$ неразложимо, потому что это сужение имеет одно и то же значение на классе K_γ в $\mathfrak{S}_\infty$ и $\mathfrak{S}_{n,\infty}$, а функция α неразложима на группе $\mathfrak{S}_\infty$. Кроме того, мера μ должна быть сконцентрирована в точке α'. Поэтому

$$\alpha(\varphi_0^m \varphi) = \left(\sum_{\nu=0}^{n-1} \rho_\nu \chi_\nu(\varphi_0^m) \right) \cdot \alpha(\varphi)$$

для всех $\varphi \in \mathfrak{S}_{n,\infty}$ и $m = 0, 1, \ldots, n-1$. Рассмотрим случай $m = 1$ и $\varphi = \varepsilon$. Тогда

$$\alpha(\varphi_0) = \alpha(\gamma^{(n)}) = p_n = \sum_{\nu=0}^{n-1} \rho_\nu \chi_\nu(\varphi_0),$$

так как $\alpha(\varepsilon) = 1$. Теперь пусть $\varphi \in \mathfrak{S}_{n,\infty}$, тогда

$$\gamma_\nu(\varphi_0\varphi) = \gamma_\nu(\varphi) + \delta_{\nu,n}.$$

Поэтому

$$\alpha(\varphi_0\varphi) = \alpha(\gamma(\varphi_0\varphi)) = \alpha(\gamma^{(n)})\alpha(\gamma(\varphi)) = p_n \alpha(\gamma(\varphi)).$$

Также для всех $\gamma \in \Gamma$ и $n = 2, 3, \ldots$ выполняется равенство $\alpha(\gamma) = p_n \alpha(\gamma')$ при $\gamma > 0$, где $\gamma' = (\gamma_2, \ldots, \gamma_n - 1, \gamma_{n+1}, \ldots)$. Отсюда следует равенство (1).

Теперь докажем импликацию “тогда” теоремы 1. Временно обозначим через M множество таких функций $\alpha \in K(\mathfrak{S}_\infty)$, для каждой из которых существует своя последовательность вещественных чисел p_ν, удовлетворяющая условию $|p_\nu| \leqslant 1$ и равенству (1). Покажем, что множество M замкнуто в $K(\mathfrak{S}_\infty)$. Функция α_0 лежит в замыкании M, если существует такая последовательность $\alpha_1, \alpha_2, \ldots$ из M, что для всех $\gamma \in \Gamma$ выполнены равенства

$$\alpha_0(\gamma) = \lim_{\nu\to\infty} \alpha_\nu(\gamma) \quad \text{и} \quad \alpha_0(\gamma^{(n)}) = \lim_{\nu\to\infty} \alpha_\nu(\gamma^{(n)}) = \lim_{\nu\to\infty} p_{\nu,n}$$

для всех n таких, что $\gamma_n \neq 0$, где $\gamma = (\gamma_2, \gamma_3, \ldots)$ и $p_{\nu,n} = \alpha_\nu(\gamma^{(n)})$. Положим $\alpha_0(\gamma^{(n)}) = p_n$, тогда

$$\alpha_0(\gamma) = \lim_{\nu\to\infty} \alpha_\nu(\gamma) = \lim_{\nu\to\infty} \prod_{i=2}^{\infty} p_{\nu,n}^{\gamma_i} = \prod_{i=2}^{\infty} p_n^{\gamma_i}.$$

Таким образом, функция α_0 удовлетворяет равенству (1), то есть $\alpha \in M$. Мы знаем, что множество $K(\mathfrak{S}_\infty)$ компактно (см. [4], стр. 117), поэтому и множество M тоже компактно. Из импликации "только тогда" сразу получаем, что $E(\mathfrak{S}_\infty) \subset M$ и $F(\mathfrak{S}_\infty) \subset M$.

Пусть I_ν – это замкнутые отрезки $[-1, +1]$, обозначим через S произведение $I_2 \times I_3 \times \cdots$. Элемент $p \in S$ – это последовательность $p_2, p_3, \ldots$ вещественных чисел, таких, что $|p_\nu| \leqslant 1$. Рассмотрим отображение $\alpha \mapsto p = (p_2, p_3, \ldots)$, определенное с помощью равенства $p_\nu = \alpha(\gamma^{(\nu)})$, $\nu = 2, 3, \ldots$. Это биективное и непрерывное отображение множеств $M \to S$. Поскольку M компактно, то образ $\widetilde{M}$ при отображении $\alpha \mapsto p$ также компактен, и это отображение является гомеоморфизмом. Обозначим через $\widetilde{E}$ (соответственно, через $\widetilde{F}$) образ множества $E(\mathfrak{S}_\infty)$ (соответственно, множества $F(\mathfrak{S}_\infty)$). Пусть $\alpha_0 \in M$ и

$$\alpha_0 = \int\limits_{F(\mathfrak{S}_\infty)} \beta d\mu'(\beta)$$

– полное разложение α_0. Перенося это соотношение через описанное выше отображение на множество $\widetilde{M}$, получаем:

1. μ – мера на $\widetilde{F}$, $\mu(\widetilde{F}) = 1$ и $\mu(\widetilde{F} \setminus \widetilde{E}) = 0$.
2. $$\prod_{\nu=2}^{\infty} p_{\nu,0}^{\gamma_\nu} = \int\limits_S \prod_{\nu=2}^{\infty} p_\nu^{\gamma_\nu} d\mu(p)$$

для всех $\gamma \in \Gamma$, где $\alpha_0 \mapsto p_0 = (p_{2,0}, p_{3,0}, \ldots)$.

Можно заметить, что множество $\widetilde{F}$ компактно в S, потому что $F(\mathfrak{S}_\infty)$ компактно. Продолжим меру из $\widetilde{F}$ на S, положив $\mu(S \setminus \widetilde{F}) = 0$. Равенство $\mu(S \setminus \widetilde{E}) = 0$ следует из того, что $\mu'(F(\mathfrak{S}_\infty) \setminus E(\mathfrak{S}_\infty)) = 0$. Множество полиномов $P(p)$ конечной степени по $p_\nu, \nu = 2, 3, \ldots$ является вещественной алгеброй над S, разделяющей точки из S. По теореме Стоуна–Вейерштрасса эта алгебра плотна в множестве непрерывных функций на S. Из пункта 2 следует, что равенство

$$P(p_0) = \int\limits_S P(p)d\mu(p)$$

выполнено для всех полиномов. Таким образом, получаем равенство $f(p_0) = \int f(p)d\mu(p)$ для всех непрерывных функций. То есть мера μ сосредоточена в точке p_0, поэтому из равенства $\mu(S \setminus \widetilde{E}) = 0$ следует, что $p_0 \in \widetilde{E}$. Таким образом, $\alpha_0 \in E(\mathfrak{S}_\infty)$. Поэтому выполнено равенство $M = E(\mathfrak{S}_\infty)$.

Следствие 1. *$E(\mathfrak{S}_\infty)$ замкнуто, и $E(\mathfrak{S}_\infty) = F(\mathfrak{S}_\infty)$.*

Следствие 2. *Отображение $\alpha \mapsto s = (\alpha(\gamma^{(2)}), \alpha(\gamma^{(3)}), \dots)$ – это гомеоморфизм на компактное подмножество $M = \widetilde{E}$ множества S.*

Эти утверждения доказаны в доказательстве импликации “тогда” теоремы 1.

Следствие 3. *Если $\alpha_1, \alpha_2 \in E(\mathfrak{S}_\infty)$, то $\alpha_1\alpha_2 \in E(\mathfrak{S}_\infty)$.*

Доказательство. Равенство $\alpha = \alpha_1\alpha_2 \in K(\mathfrak{S}_\infty)$ следует из замечаний в конце работы [5]. Пусть $\alpha_i(\gamma^{(\nu)}) = p_{\nu,i}, \nu = 2, 3, \dots$, тогда

$$\alpha(\gamma) = \alpha_1(\gamma)\alpha_2(\gamma) = \prod_{\nu=2}^{\infty} (p_{\nu,1}p_{\nu,2})^{\gamma_\nu}$$

для всех $\gamma \in \Gamma$. Поэтому для $\alpha_1\alpha_2$ также выполнено равенство (1). $\square$

Замечания. 1. Следствие 3 можно переформулировать следующим образом: если последовательность $p^i = (p_{1,i}, p_{2,i}, \dots)$ лежит в $\widetilde{E}$ для $i = 1, 2$, то последовательность $p = (p_{1,1}p_{1,2}, p_{2,1}p_{2,2}, \dots)$ также лежит в $\widetilde{E}$.

2. Как и для двойственной группы к абелевой группе, для группы $E(\mathfrak{S}_\infty)$ можно определить операцию $\alpha_1\alpha_2$, которая будет коммутативной и ассоциативной. Это особенность именно бесконечной симметрической группы. В случае конечной симметрической группы $\mathfrak{S}_n$, для произвольных $\alpha_1, \alpha_2 \in E(\mathfrak{S}_n)$ мы получаем, что $\alpha_1\alpha_2 \in K(\mathfrak{S}_n)$, но не обязательно будет выполнено условие $\alpha_1\alpha_2 \in E(\mathfrak{S}_n)$. Отметим, что $E(\mathfrak{S}_\infty)$ является моноидом, но не группой, как мы увидим из следующих примеров.

Примеры. 1. Функция α_e, заданная как $\alpha_e(\gamma) = 1$ для всех $\gamma \in \Gamma$, удовлетворяет равенству (1) для $p_\nu = 1, \nu = 2, 3, \ldots$. Поэтому $\alpha_e \in K(\mathfrak{S}_\infty)$, а также $\alpha_e \in E(\mathfrak{S}_\infty)$.

2. Определим функцию α_a с помощью равенства (1), где $p_\nu = (-1)^{\nu+1}$, $\nu = 2, 3, \ldots$. Тогда $\alpha_a \in K(\mathfrak{S}_\infty)$, потому что $\varphi \mapsto \alpha_a(\gamma(\varphi))$ – это знакопеременное представление $\mathfrak{S}_\infty$.

3. Определим функцию $\alpha_{\mathrm{reg}} \in K(\mathfrak{S}_\infty)$ следующим образом:

$$\alpha_{\mathrm{reg}}(\varepsilon) = 1 \quad \text{и} \quad \alpha_{\mathrm{reg}}(\varphi) = 0,$$

если $\varphi \neq \varepsilon$. Тогда $\alpha_{\mathrm{reg}} \in E(\mathfrak{S}_\infty)$, потому что α_{reg} удовлетворяет равенству (1) с $p_\nu = 0, \nu = 2, 3, \ldots$. Для всех $\alpha \in E(\mathfrak{S}_\infty)$ выполняется равенство $\alpha\alpha_{\mathrm{reg}} = \alpha_{\mathrm{reg}}$. Поэтому $E(\mathfrak{S}_\infty)$ не является группой, так как из предыдущих примеров следует, что в $E(\mathfrak{S}_\infty)$ больше одного элемента. Также получаем, что α_e – это нейтральный элемент в моноиде $E(\mathfrak{S}_\infty)$.

§2. p- и H-ряды

Из теоремы 1 следует, что нашу задачу можно переформулировать так: найти множество S последовательностей $p = (p_2, p_3, \ldots)$, для которых равенство (1) определяет положительно определенные центральные функции. Для $p \in S$ обозначим через α_p центральную функцию из теоремы 1. Обозначим также через $\mathfrak{S}_n$ подгруппу, состоящую из таких элементов $\varphi \in \mathfrak{S}_\infty$, что $\varphi(\nu) = \nu$ для всех $\nu > n$. Понятно, что ее можно отождествить с группой перестановок множества $1, 2, \ldots, n$. Классы сопряженности $\mathfrak{S}_n$ – это пересечения классов сопряженности группы $\mathfrak{S}_\infty$ с подгруппой $\mathfrak{S}_n$. Пересечение $K_\gamma \cap \mathfrak{S}_n \neq \varnothing$ для $\gamma \in \Gamma$ тогда и только тогда, когда $|\gamma| = 2\gamma_2 + 3\gamma_3 + \cdots \leqslant n$. Пусть $|\gamma| \leqslant n$, обозначим через K_γ^n класс $K_\gamma \cap \mathfrak{S}_n$ группы $\mathfrak{S}_n$. Если β – это центральная функция на $\mathfrak{S}_n$, то обозначим через $\beta(\gamma)$ значение функции β на классе сопряженности K_γ^n для $|\gamma| \leqslant n$. Ясно, что α_p для $p \in S$ положительно определена тогда и только тогда, когда ее сужение α_p^n на подгруппу $\mathfrak{S}_n$ является положительно определенной центральной функцией для всех $n = 1, 2, \ldots$. Это равносильно равенству

$$\alpha_p^n(\gamma) = p_1^{\gamma_1^n} \cdots p_n^{\gamma_n} \text{ для } |\gamma| \leqslant n, \tag{2}$$

где мы положили $p_1 = 1$ и $\gamma_1^n = n - |\gamma|$. Пусть Λ – множество всех последовательностей $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots)$ неотрицательных целых чисел, среди которых только конечное число отлично от нуля, и выполнены неравенства $\lambda_1 \geqslant \lambda_2 \geqslant \cdots$, $\lambda_1 \geqslant 1$. Положим $|\lambda| = \lambda_1 + \lambda_2 + \cdots$. Пусть $\lambda \in \Lambda$ и $|\lambda| = n$, обозначим через $\mathfrak{D}_\lambda$ неприводимое представление группы $\mathfrak{S}_n$, соответствующее разбиению λ, а через χ^λ характер этого представления. Тогда $E(\mathfrak{S}_n)$ – это множество

$$\left\{ \frac{1}{\dim \mathfrak{D}_\lambda} \cdot \chi^\lambda : |\lambda| = n \right\}.$$

(Из результата в [4], §1 следует, что для конечной группы G множество $E(G)$ – это множество характеров неприводимых представлений, нормированных так, что значение в нейтральном элементе равно 1.) Отсюда получаем, что определенные с помощью произведения (2) центральные функции положительно определены тогда и только тогда, когда выполняется равенство

$$\alpha_p^n = \sum s_\lambda(p) \chi^\lambda, \text{ где } s_\lambda(p) \geqslant 0, \tag{3}$$

где суммирование идет по всем $\lambda \in \Lambda$ таким, что $|\lambda| = n$. Из соотношений ортогональности для χ^λ следует равенство

$$s_\lambda(p) = \sum \frac{\chi^\lambda(\rho)}{\rho_1! \cdots \rho_n!} \left(\frac{p_1}{1}\right)^{\rho_1} \cdots \left(\frac{p_n}{n}\right)^{\rho_n}. \tag{4}$$

Суммирование идет по всем таким наборам целых чисел $\rho = (\rho_1, \ldots, \rho_n)$, что $\rho_\nu \geqslant 0$ и

$$\sum_{\nu=1}^{n} \nu \rho_\nu = n.$$

Таким образом, мы получаем следующее утверждение.

Лемма 1. *Пусть $p_1, p_2, \ldots$ – последовательность комплексных чисел, произведение* (2) *(в том числе и в случае $p_1 \neq 1$) задает положительно определенную центральную функцию на $\mathfrak{S}_n$ тогда и только тогда, когда $s_\lambda(p) \geqslant 0$ для всех $\lambda \in \Lambda$. В частности, если $p_1 = 1$ и $p = (p_2, p_3, \ldots)$, то $\alpha_p \in E(\mathfrak{S}_\infty)$, если $s_\lambda(p) \geqslant 0$ для всех $\lambda \in \Lambda$.*

Замечание. Если α_p^n положительно определена, то выполнено неравенство $|p_n| \leqslant p_1^n$, где $\alpha_p^n(e) = p_1^n$. Кроме того, p_n должны быть вещественными для $n = 1, 2, \ldots$, так как в группе $\mathfrak{S}_n$ элементы φ и φ^{-1} принадлежат одному классу сопряженности.

Теперь мы ищем все последовательности комплексных чисел $p_1, p_2, \ldots$, для которых выполнены неравенства $s_\lambda(p) \geqslant 0$. Тогда элементами множества $E(\mathfrak{S}_\infty)$ будут функции α_p для этих последовательностей $p = (p_2, p_3, \ldots)$ (в этом случае $p_1 = 1$).

Ряд

$$p(z) = \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{p_\nu}{\nu} z^\nu$$

мы будем называть p-рядом, когда $s_\lambda(p) \geqslant 0$ для всех $\lambda \in \Lambda$. Из Замечания после Леммы 1 следует, что у p-ряда все коэффициенты вещественные, и его радиус сходимости положителен. Далее положим $h_0(p) = 1$, $h_n(p) = s_\lambda(p)$ для $\lambda = (n, 0, 0, \ldots)$ и всех натуральных чисел n. Также условимся, что $h_n(p) = 0$ для $n = -1, -2, \ldots$. Простое вычисление показывает, что

$$e^{p(z)} = 1 + h_1(p)z + h_2(p)z^2 + \cdots .$$

Более того, для всех $\lambda \in \Lambda$ выполняется равенство (смотри, например, [2], стр. 88, или [3], стр. 119)

$$s_\lambda(p) = \begin{vmatrix} h_{\lambda_1}(p) & h_{\lambda_1+1}(p) & \cdots & h_{\lambda_1+r-1}(p) \\ h_{\lambda_2-1}(p) & h_{\lambda_2}(p) & \cdots & h_{\lambda_2+r-2}(p) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ h_{\lambda_r-r+1}(p) & h_{\lambda_r-r+2}(p) & \cdots & h_{\lambda_r}(p) \end{vmatrix}, \tag{5}$$

где $\lambda_r = 0$ для $\nu > r$.

Замечания. Поскольку $h_0 = 1$ и $h_n = 0$ для $n < 0$, добавление конечного числа $\lambda_\nu = 0$ не изменяет значения определителя, то есть можно выбрать любое r с условием $\lambda_\nu = 0$ для $\nu > r$.

Ряд $H(z) = 1 + h_1 z + h_2 z^2 + \cdots$ будем называть H-рядом, если

$$\begin{vmatrix} h_{\lambda_1} & h_{\lambda_1+1} & \cdots & h_{\lambda_1+r-1} \\ h_{\lambda_2-1} & h_{\lambda_2} & \cdots & h_{\lambda_2+r-2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ h_{\lambda_r-r+1} & h_{\lambda_r-r+2} & \cdots & h_{\lambda_r} \end{vmatrix} \geqslant 0 \tag{5'}$$

для всех $\lambda \in \Lambda$, где $\lambda_\nu = 0$ для $\nu > r$. Далее будем считать, что $h_0 = 1$ и $h_\nu = 0$ для $\nu < 0$. Перечислим несколько свойств H-рядов. Из $(5')$ следует, что $h_n \geqslant 0$ для $n = 1, 2, 3, \ldots$, когда мы рассматриваем

$\lambda = (n, 0, 0, \ldots)$. А также $h_n h_1 \geqslant h_{n+1}$, потому что

$$\begin{vmatrix} h_n & h_{n+1} \\ h_0 & h_1 \end{vmatrix} \geqslant 0.$$

Кроме того, если $h_n = 0$ для некоторого n, то $H(z)$ является многочленом. Также из $(5')$ следует, что

$$\frac{h_n}{h_{n+1}} \geqslant \frac{h_{n-1}}{h_n},$$

при условии $h_{n+1}h_n \neq 0$, потому что

$$\begin{vmatrix} h_n & h_{n+1} \\ h_{n-1} & h_n \end{vmatrix} = h_n^2 - h_{n+1}h_{n-1} \geqslant 0.$$

В частности, если все $h_n \neq 0$, то радиус сходимости H-ряда $H(z)$

$$r_H = \lim_{n\to\infty} \frac{h_n}{h_{n+1}} \geqslant \frac{h_0}{h_1} > 0$$

Мы получили следующее утверждение:

Лемма 2. *У H-ряда $H(z) = 1 + h_1 z + \cdots$ положительный радиус сходимости r_H. Точнее: если $h_n = 0$, то $H(z)$ – это полином и $r_H = +\infty$. Если все $h_n \neq 0$, то*

$$r_H = \lim_{n\to\infty} \frac{h_n}{h_{n+1}} \geqslant \frac{1}{h_1}.$$

Лемма 3. *Ряд $H(z) = 1 + h_1 z + h_2 z^2 + \cdots$ является H-рядом тогда и только тогда, когда для некоторого p-ряда*

$$p(z) = \frac{p_1}{1} z + \frac{p_2}{2} z^2 + \cdots$$

верно равенство $e^{p(z)} = H(z)$.

Доказательство. Пусть $e^{p(z)} = H(z) = 1 + h_1 z + h_2 z^2 + \cdots$, тогда $h_n = h_n(p)$ для $n = 1, 2, \ldots$. Из (3), (4), и (5) следует, что $H(z)$ является H-рядом тогда и только тогда, когда $p(z)$ является p-рядом. $H(z)$ всегда определяет некоторый ряд $p(z)$, удовлетворяющий $e^{p(z)} = H(z)$ с помощью равенств

$$p'(z) = \frac{H'(z)}{H(z)} \text{ и } p(0) = 0 \qquad \square$$

Примеры. 1. Равенства $p_\nu = \alpha^\nu$ для $\nu = 1, 2, \dots$ и $\alpha \geqslant 0$ задают p-ряд, который соответствует постоянной функции α^n, положительно определенной на группе $\mathfrak{S}_n$. Тогда

$$p'(z) = \frac{\alpha}{1-\alpha z} \quad \text{и} \quad p(z) = -\log\frac{1}{1-\alpha z}, \quad \text{поэтому} \quad e^{p(z)} = \frac{1}{1-\alpha z},$$

что является H-рядом для $\alpha \geqslant 0$.

2. Равенства $p_\nu = (-1)^{\nu+1}\alpha^\nu$ для $\nu = 1, 2, \dots$ и $\alpha \geqslant 0$ определяют p-ряд, потому что знакопеременная функция $\pm\alpha^n$ на $\mathfrak{S}_n$ положительно определена. Получаем, что

$$p'(z) = \frac{\alpha}{1+\alpha z},$$

поэтому $p(z) = \log(1+\alpha z)$ и $e^{p(z)} = 1+\alpha z$ является H-рядом для $\alpha \geqslant 0$.

3. Равенства $p_1 = \alpha \geqslant 0$ и $p_\gamma = 0$ для $\gamma = 2, 3, \dots$ определяют p-ряд, потому что функция, заданная, как $\alpha_n(\varepsilon) = \alpha$ и $\alpha_n(\varphi) = 0$, положительно определена на $\mathfrak{S}_n$. Функция $e^{\alpha z}$ является H-рядом для $\alpha \geqslant 0$.

Рассмотрим три метода, которыми можно получать новые p- и H-ряды из известных.

Лемма 4. *Предположим, что*

$$p(z) = \frac{p_1}{1}z + \frac{p_2}{2}z^2 + \cdots, \text{ и } t(z) = \frac{t_1}{1}z + \frac{t_2}{2}z^2 + \cdots$$

являются p-рядами, тогда

$$\frac{p_1 t_1}{1}z + \frac{p_2 t_2}{2}z^2 + \cdots$$

– это тоже p-ряд.

Доказательство. Из равенств $\alpha_n(\gamma) = p_1^{\gamma_1}\cdots p_n^{\gamma_n}$ и $\beta_n(\gamma) = t_1^{\gamma_1}\cdots t_n^{\gamma_n}$ получаем, что $\alpha_n(\gamma)\beta_n(\gamma) = (p_1 t_1)^{\gamma_1}\cdots(p_n t_n)^{\gamma_n}$. Поскольку функции α_n, β_n положительно определены на $\mathfrak{S}_n$, то и функция $\alpha_n\beta_n$ тоже положительно определена. $\square$

Следствие 4. *Если $H(z)$ является H-рядом, то $H(\alpha z)$ тоже является H-рядом.*

Доказательство. Пусть

$$H(z) = e^{p(z)} \text{ и } t(z) = \frac{\alpha}{1}z + \frac{\alpha^2}{2}z^2 + \cdots,$$

тогда

$$p(\alpha z) = \frac{p_1\alpha}{1}z + \frac{p_2\alpha^2}{2}z^2 + \cdots.$$

Получаем, что $H(\alpha z) = e^{p(\alpha z)}$ является H-рядом при $\alpha \geqslant 0$. □

Следствие 5. *Если $H(z)$ является H-рядом, то $\widetilde{H}(z) = \frac{1}{H(-z)}$ также будет H-рядом.*

Доказательство. Положим $H(z) = e^{p(z)}$ и $t(z) = \sum_{\gamma=1}^{\infty}(-1)^{\gamma+1}\frac{z^\gamma}{\gamma}$. Тогда

$$\widetilde{p}(z) = \sum(-1)^{\gamma+1}\frac{p_\gamma}{\gamma}z^\gamma$$

является p-рядом. Из равенства $\widetilde{p}(z) = -p(-z)$ следует, что

$$\widetilde{H}(z) = e^{\widetilde{p}(z)} = e^{-p(-z)} = \frac{1}{H(-z)}$$

является H-рядом. □

Лемма 5. *Пусть $H(z)$ – H-ряд и*

$$w_\rho = e^{\frac{2\pi i}{\rho}}, \text{ тогда } H_\rho(z) = \frac{1}{\rho}\sum_{\gamma=0}^{\rho-1} P(w_\rho^\gamma \sqrt[\rho]{z})$$

также является H-рядом для $\rho = 1, 2, 3, \ldots$.

Доказательство. Рассмотрим $H(z) = 1 + h_1 z + h_2 h^2 + \cdots$. Под изобарическим определителем коэффициентов ряда $H(z)$ мы будем понимать определитель вида

$$\begin{vmatrix} h_{\mu_1} & h_{\mu_1+\sigma_1} & \cdots & h_{\mu_1+\sigma_{n-1}} \\ h_{\mu_2} & h_{\mu_2+\sigma_1} & \cdots & h_{\mu_2+\sigma_{n-1}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ h_{\mu_n} & h_{\mu_n+\sigma_1} & \cdots & h_{\mu_n+\sigma_{n-1}} \end{vmatrix},$$

где μ_γ – целые числа, $\mu_1 \geqslant \mu_2 \geqslant \cdots \geqslant \mu_n$, σ_γ – целые числа, и $\sigma_{n-1} > \sigma_{n-2} > \cdots > \sigma_1 \geqslant 1$. Как и ранее, $h_0 = 1$, и $h_\gamma = 0$ для $\gamma < 0$. Для H-ряда все изобарические определители неотрицательные. Это следует из [2], стр. 110. В этой работе показано, что все изобарические определители являются линейными комбинациями определителей $(5')$, с коэффициентами, которые, согласно [2], стр. 91, являются неотрицательными целыми числами. Выберем целое $\rho \geqslant 1$ и положим $q_\gamma = h_{\gamma\rho}$ для $\gamma = \cdots, -1, 0, 1, \cdots$. Для всех $\lambda \in \Lambda$ получаем, что

$$\begin{vmatrix} q_{\lambda_1} & q_{\lambda_1+1} & \cdots & q_{\lambda_1+n-1} \\ q_{\lambda_2-1} & q_{\lambda_2} & \cdots & q_{\lambda_2+n-2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ q_{\lambda_n-n+1} & q_{\mu_n-n+2} & \cdots & q_{\lambda_n} \end{vmatrix}$$
$$= \begin{vmatrix} h_{\rho\lambda_1} & h_{\rho\lambda_1+\rho} & \cdots & h_{\rho\lambda_1+(n-1)\rho} \\ h_{\rho\lambda_2-\rho} & h_{\rho\lambda_2} & \cdots & h_{\rho\lambda_2+(n-2)\rho} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ h_{\rho\lambda_n-(n-1)\rho} & h_{\rho\lambda_n-(n-2)\rho} & \cdots & h_{\rho\lambda_n} \end{vmatrix} \geqslant 0,$$

так как эти определители изобарические. Кроме того, $Q(z) = 1 + h_\rho z + h_{2\rho} z^2 + \cdots$ – H-ряд. Тогда

$$\frac{1}{\rho}\sum_{\nu=1}^{\rho-1} H(w_\rho^\nu z) = 1 + h_\rho z^\rho + h_{2\rho} z^{2\rho} + \cdots$$

Отсюда следует утверждение леммы. □

Далее нам понадобится только случай $\rho = 2$, т.е. $H_2(z) = \frac{1}{2}(H(\sqrt{z}) + H(-\sqrt{z})$.

Лемма 6. *Произведение двух H-рядов также является H-рядом.*

Доказательство. Пусть $H(z) = 1 + h_1 z + h_2 z^2 + \cdots$ и $Q(z) = 1 + q_1 z + q_2 z^2 + \cdots$ – H-ряды. Положим

$$R(z) = H(z)Q(z) = 1 + r_1 z + r_2 z^2 + \cdots$$

Тогда

$$r_n = \sum_{\gamma=-\infty}^{\infty} q_\gamma h_{n-\gamma},$$

где мы условились, что $q_0 = p_0 = r_0 = 1$, $p_\gamma = q_\gamma = r_\gamma = 0$ для $\gamma < 0$. Поэтому для произвольного $\lambda \in \Lambda$ получаем матричное равенство

$$\begin{pmatrix} r_{\lambda_1} & r_{\lambda_1+1} & \cdots & r_{\lambda_1+n-1} \\ r_{\lambda_2-1} & r_{\lambda_2} & \cdots & r_{\lambda_2+n-2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ r_{\lambda_n-n+1} & r_{\lambda_n-n+2} & \cdots & r_{\lambda_n} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} q_0 & q_1 & \cdots & q_{\lambda_1+n-1} \\ q_{\lambda_2-\lambda_1-1} & q_{\lambda_2-\lambda_1} & \cdots & q_{\lambda_2+n-2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ q_{\lambda_n-\lambda_1-n+1} & q_{\lambda_n-\lambda_1-n+2} & \cdots & q_{\lambda_n} \end{pmatrix}$$

$$\times \begin{pmatrix} h_{\lambda_1} & h_{\lambda_1+1} & \cdots & h_{\lambda_1+n-1} \\ h_{\lambda_1-1} & h_{\lambda_1} & \cdots & h_{\lambda_1+n-2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \cdot & \cdot & \cdots & h_1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \cdot & \cdot & \cdots & h_0 \end{pmatrix}.$$

Но тогда имеем

$$\begin{vmatrix} r_{\lambda_1} & r_{\lambda_1+1} & \cdots & r_{\lambda_1+n-1} \\ r_{\lambda_2-1} & r_{\lambda_2} & \cdots & r_{\lambda_2+n-2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ r_{\lambda_n-n+1} & r_{\lambda_n-n+2} & \cdots & r_{\lambda_n} \end{vmatrix}$$

$$= \sum_{\lambda_1+n-1 \geqslant \mu_1 > \cdots > \mu_n \geqslant 0} \begin{vmatrix} q_{\lambda_1+n-1-\mu_1} & q_{\lambda_1+n-1-\mu_2} & \cdots & q_{\lambda_1+n-1-\mu_n} \\ q_{\lambda_2+n-2-\mu_1} & q_{\lambda_2+n-2-\mu_2} & \cdots & q_{\lambda_2+n-2-\mu_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ q_{\lambda_n-\mu_1} & q_{\lambda_n-\mu_2} & \cdots & q_{\lambda_n-\mu_n} \end{vmatrix}$$

$$\times \begin{vmatrix} h_{\mu_1-n+1} & h_{\mu_1-n+2} & \cdots & h_{\mu_1} \\ h_{\mu_2-n+1} & h_{\mu_2-n+2} & \cdots & h_{\mu_2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ h_{\mu_n-n+1} & h_{\mu_n-n+2} & \cdots & h_{\mu_n} \end{vmatrix} \geqslant 0,$$

где все эти определители являются изобарическими определителями рядов $H(z)$ или $Q(z)$. $\square$

Лемма 7. *Пусть* $\alpha \geqslant 0, \alpha_i \geqslant 0, \beta_i \geqslant 0$ *для* $i = 1, 2, \ldots$ *и*

$$\sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i < +\infty, \sum_{i=1}^{\infty} \beta_i < +\infty, \text{ тогда } H(z) = \left(\prod_{i=1}^{\infty} \frac{1 + \beta_i z}{1 - \alpha_i z} \right) e^{\alpha z}$$

является H*-рядом.*

Доказательство. Ряд

$$Q_n(z) = \prod_{i=1}^{n} \frac{1 + \beta_i z}{1 - \alpha_i z}$$

является H-рядом в силу Леммы 6 и примеров. В некоторой окрестности нуля $Q_n(z)$ равномерно сходится к

$$Q(z) = \prod_{i=1}^{\infty} \frac{1 + \beta_i z}{1 - \alpha_i z}.$$

Коэффициенты $Q_n(z)$ почленно сходятся к коэффициентам $Q(z)$. Поэтому если для коэффициентов $Q_n(z)$ выполнены неравенства $(5')$, то и для коэффициентов $Q(z)$ это условие тоже выполнено. Поэтому $Q(z)$ является H-рядом. Так как $e^{\alpha z}$ – это тоже H-ряд, то $H(z) = Q(z)e^{\alpha z}$ также является H-рядом. □

Покажем теперь, что любой H-ряд имеет вид, как в Лемме 7. Сначала докажем следующее утверждение.

Лемма 8. *Любой* H*-ряд* $H(z) = 1 + h_1 z + h_2 z^2 + \cdots$ *имеет вид*

$$H(z) = \prod_{i=1}^{\infty} \frac{1 + \beta_i z}{1 - \alpha_i z} R(z)$$

где $\alpha_i \geqslant 0, \beta_i \geqslant 0$ *для* $i = 1, 2, \ldots, \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i < +\infty, \sum_{i=1}^{\infty} \beta_i < +\infty$*, и* $R(z)$ *является* H*-рядом, который представляет собой целую функцию, не принимающую нулевых значений.*

Доказательство. Часть 1 доказательства. Покажем, что существуют $\alpha_i \geqslant 0, i = 1, 2, \ldots$ такие, что

$$\sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i \leqslant h_1, \text{ и } H(z) = \prod_{i=1}^{\infty} \frac{1}{1 - \alpha_i z} \cdot R(z),$$

где $R(z)$ – целый H-ряд.

Если радиус сходимости r_H ряда $H(z)$ равен бесконечности, то $H(z) = R(z)$ и $\alpha_i = 0$. Иначе будем считать, что $h_\nu \neq 0$ для $\nu = 1, 2, \dots$ и

$$r_H = \lim_{n\to\infty} \frac{h_n}{h_{n+1}} < +\infty.$$

Положим $\alpha_1 = 1/r_H$. Рассмотрим ряд $H_1(z) = (1 - \alpha_1 z)H(z) = 1 + h_{1,1}z + h_{2,1}z^2 + \cdots$. Тогда получаем, что

$$\begin{cases} 1. \quad H_1(z) \text{ имеет радиус сходимости не меньше } r_H \\ 2. \quad H_1(z) \text{ – это } H\text{-ряд} \\ 3. \quad h_{\nu,1} = h_\nu - \alpha_1 p_{\nu-1} \text{ для } \ \nu = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \\ \quad\ \ \text{где } h_{1,0} = h_0 = 1 \ \text{ и } \ h_{\nu,1} = h_\nu = 0 \ \text{ для } \ \nu < 0. \end{cases} \tag{6}$$

Первый и третий пункты следуют из определения $H_1(z)$. Пусть $\lambda_1 \geqslant \lambda_2 \geqslant \cdots \geqslant \lambda_n$, тогда для $k \geqslant \lambda_1$ выполняется

$$0 \leqslant \frac{1}{h_k} \begin{vmatrix} h_k & h_{k+1} & \cdots & h_{k+n} \\ h_{\lambda_1-1} & h_{\lambda_1} & \cdots & h_{\lambda_1+n-1} \\ \vdots & & & \\ h_{\lambda_n-n} & h_{\lambda_n-n+1} & \cdots & h_{\lambda_n} \end{vmatrix}$$
$$= \begin{vmatrix} 1 & \frac{h_{k+1}}{h_k} & \frac{h_{k+2}}{h_k} & \cdots & \frac{h_{k+n}}{h_k} \\ h_{\lambda_1-1} & h_{\lambda_1} & h_{\lambda_1+1} & \cdots & h_{\lambda_1+n-1} \\ \vdots & & & & \\ h_{\lambda_n-n} & h_{\lambda_n-n+1} & h_{\lambda_n-n+2} & \cdots & h_{\lambda_n} \end{vmatrix}.$$

Из равенства

$$\frac{h_{k+\nu}}{h_k} = \frac{h_{k+\nu}}{h_{k+\nu-1}} \frac{h_{k+\nu-1}}{h_{k+\nu-2}} \cdots \frac{h_{k+1}}{h_k}$$

следует, что

$$\lim_{k\to\infty} \frac{h_{k+\nu}}{h_k} = \alpha_1^\nu.$$

Применяя этот результат, получаем

$$0 \leqslant \begin{vmatrix} 1 & \alpha_1 & \cdots & \alpha_1^n \\ h_{\lambda_1-1} & h_{\lambda_1} & \cdots & h_{\lambda_1+n-1} \\ \vdots & \vdots & & \\ h_{\lambda_n-n} & h_{\lambda_n-n+1} & \cdots & h_{\lambda_n} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ h_{\lambda_1-1} & h_{\lambda_1} - \alpha_1 h_{\lambda_1-1} & \cdots & h_{\lambda_1+n-1} - \alpha_1 h_{\lambda_1+n-2} \\ \vdots & \vdots & & \\ h_{\lambda_n-n} & h_{\lambda_n-n+1} - \alpha_1 h_{\lambda_n-n} & \cdots & h_{\lambda_n} - \alpha_1 h_{\lambda_n-1} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} h_{\lambda_1,1} & \cdots & h_{\lambda_1+n-1,1} \\ \vdots & & \\ h_{\lambda_n-n+1,1} & \cdots & h_{\lambda_n,1} \end{vmatrix}.$$

Таким образом, $H_1(z)$ является H-рядом. Если радиус сходимости $r_{H_1} = +\infty$, то положим $\alpha_i = 0$ для $i \geqslant 2$, и $R(z) = H_1(z)$. Иначе положим

$$\alpha_2 = 1/r_{H_1}, \text{ и } H_2(z) = (1 - \alpha_2 z)H_1(z) = 1 + h_{1,2}z + h_{2,2}z^2 + \cdots .$$

Повторим предыдущее рассуждение. Если в какой-то момент процесс остановится, то есть для некоторого $k+1$ выполнено условие $r_{H_{k+1}} = +\infty$, тогда положим $\alpha_{k+\nu} = 0$ для $\nu = 1, 2, \ldots$, и $R(z) = H_{k+1}(z)$. Поскольку

$$H_{k+1}(z) = (1 - \alpha_1 z) \cdots (1 - \alpha_k z)H(z),$$

то мы доказали наше утверждение в этом случае.

Иначе мы получаем бесконечную последовательность $\alpha_1 = 1/r_H$, $\alpha_2 = 1/r_{H_1}, \ldots$. Из свойства 1 в (6) следует, что $\alpha_1 \geqslant \alpha_2 \geqslant \cdots$. Из свойства 3 в (6) получаем, что $h_{1,k} = h_{1,k-1} - \alpha_k$ для $k = 1, 2, \ldots$ (и $h_{1,0} = h_1$), потому что $h_{0,k-1} = 1$. Также $\sum_{i=1}^{k} \alpha_i + h_{1,k} = h_1$. И поскольку $h_{1,k} \geqslant 0$, мы получаем, что $\sum_{i=1}^{k} \alpha_i \leqslant h_1$. Отсюда следует, что $r_{H_k} \to \infty$. Из свойства 3 в (6) следует, что $h_{\nu,k} \leqslant h_{\nu,k-1}$, так как $\alpha_k h_{\nu-1,k-1} \geqslant 0$.

Поскольку $\sum\limits_{i=1}^{\infty} \alpha_i < +\infty$, то $\prod_{i=1}^{k}(1-\alpha_i z)H(z)$ сходится равномерно к

$$R(z) = \prod_{i=1}^{\infty}(1-\alpha_i z)H(z)$$

в некоторой окрестности нуля. Отсюда следует, что для

$$R(z) = 1 + r_1 z + r_2 z^2 + \cdots \ \text{существует предел} \ \lim_{k\to\infty} h_{\nu,k} = r_\nu.$$

Таким образом, $R(z)$ является H-рядом, потому что $(5')$ продолжает выполняться при предельном переходе. Последовательность $h_{\nu,k}$ монотонна, поэтому $r_\nu \leqslant h_{\nu,k}$ для всех k. Также радиус сходимости $R(z)$ больше, чем все r_{H_k} для $k = 1, 2, \ldots$, то есть этот радиус бесконечен. Тогда

$$H(z) = \frac{R(z)}{\prod\limits_{i=1}^{\infty}(1-\alpha_i z)}.$$

Часть 2 доказательства. Рассмотрим теперь случай, когда $R(z)$ является целым H-рядом. Тогда

$$\frac{1}{R(-z)} = \widetilde{R}(z)$$

тоже является H-рядом. Поэтому из части 1 доказательства получаем, что он имеет форму

$$\widetilde{R}(z) = R_0(z)\frac{1}{\prod\limits_{i=1}^{\infty}(1-\beta_i z)}$$

для некоторых $\beta_i \geqslant 0$ таких, что $\sum_{i=1}^{\infty}\beta_i < +\infty$, и при этом $R_0(z)$ является целым H-рядом. У $R_0(z)$ нет нулей, потому что $1/\beta_i$ не являются нулями ряда $R_0(z)$, поскольку у H-ряда не может быть положительных нулей (все его коэффициенты неотрицательны). Также нули $R_0(z)$ являются нулями $\widetilde{R}(z)$, поэтому они являются полюсами $R(-z)$. Но $R(z)$ является целым рядом. Поэтому получаем, что

$$R(z) = \prod_{i=1}^{\infty}(1+\beta_i z)H_0(z), \ \text{где} \ H_0(z) = \frac{1}{R_0(-z)}.$$

В этом равенстве R_0 – это целый H-ряд без нулей, поэтому H_0 тоже является целым рядом без нулей. $\square$

Лемма 9. *Функции* $e^{\alpha z}, \alpha \geqslant 0$ *– это единственные целые* H*-ряды без нулей.*

Доказательство. Пусть $H(z) = 1 + h_1 z + h_2 z^2 + \cdots$ – целый H-ряд без нулей. Тогда p-ряд

$$p(z) = \frac{p_1}{1} z + \frac{p_2}{2} z^2 + \cdots, \text{ такой что } e^{p(z)} = H(z)$$

является целым, потому что

$$p'(z) = \frac{H'(z)}{H(z)}.$$

Из замечания после Леммы 1 следует, что числа p_ν для $\nu = 1, 2, \ldots$ являются вещественными.

Случай A. Сначала рассмотрим случай $p(z) = -p(-z)$, то есть $p_{2\nu} = 0$ для $\nu = 1, 2, \ldots$. Тогда из Леммы 5 следует, что

$$\begin{aligned} H_2(z) &= \frac{1}{2}(H(\sqrt{z}) + H(-\sqrt{z})) = \frac{1}{2}(e^{p(\sqrt{z})} + e^{p(-\sqrt{z})}) \\ &= \frac{1}{2}(e^{p(\sqrt{z})} + e^{p(-\sqrt{z})}) = \cos p(\sqrt{z}) \end{aligned}$$

также является H-рядом. В этом равенстве мы положили $H_2(z) = 1 + h_2 z + h_4 z^2 + \cdots$, ряд $H_2(z)$ является целым, но у него могут быть нули. Из Леммы 8 следует, что

$$H_2(z) = \prod_{i=1}^{\infty} (1 + \beta_i z) H_{2,0}(z),$$

где $\beta_i \geqslant 0$, $\sum\limits_{i=1}^{\infty} \beta_i < +\infty$. и $H_{2,0}(z)$ – это целый ряд без нулей. Нули ряда $H_2(z)$ – это числа $-\frac{1}{\beta_i}$ с условием $\beta_i > 0$.

Теперь мы докажем следующее утверждение. Обозначим через $w_1, w_2, \ldots$ (соответственно, через $v_1, v_2, \ldots$) набор прообразов точки i (соответственно, точки $-i$) при отображении $H(z)$ (прообразы берутся столько раз, каков их порядок). Тогда следующие ряды сходятся

$$\sum_\nu \frac{1}{|w_\nu|^2} = \sum_\nu \frac{1}{|v_\nu|^2} < +\infty.$$

Доказательство. 1. $H(0) = 1$, поэтому $w_\nu \neq 0$ и $v_\nu \neq 0$.

2. Из равенств $H(z) = e^{p(z)}$ и $p(z) = -p(-z)$ следует, что

$$H(z)H(-z) = 1.$$

Поэтому после соответствующей перенумерации мы можем считать, что $w_\nu = -v_\nu$. Тогда достаточно показать, что

$$\sum_\nu \frac{1}{|w_\nu|^2} < +\infty.$$

3. Пусть w_0 – прообраз точки i k-го порядка функции $H(z)$, тогда w_0 – ноль k-го порядка функции $\widehat{H}_2(z) = H_2(z^2) = \cos s(z)$. А именно, $H(w_0) = e^{p(w_0)} = i$, тогда $p(w_0) = (2k + \frac{1}{2})\pi i$, также $\widehat{H}_2(w_0) = \cos p(w_0) = 0$. Тогда условия

$$H'(w_0) = \cdots = H^{(k-1)}(w_0) = 0 \ \text{ и } \ H^{(k)}(w_0) \neq 0$$

эквивалентны условиям

$$p'(w_0) = \cdots = p^{(k-1)}(w_0) = 0 \ \text{ и } \ p^{(k)}(w_0) \neq 0.$$

Также имеем, что $\widehat{H}_2'(w_0) = \cdots = \widehat{H}_2^{(k-1)}(w_0) = 0$ и $\widehat{H}_2^{(k)}(w_0) \neq 0$, причем $\sin p(w_0) \neq 0$ так как у функций sin и cos нет общих нулей.

4. Пусть w_0 – ноль кратности k функции $\widehat{H}_2(w_0)$. Тогда w_0^2 является нулем кратности k функции $H_2(z)$. Это следует из формулы дифференцирования сложной функции, потому что $\widehat{H}_2(\sqrt{z}) = H_2(z)$ и $w_0 \neq 0$.

5. Из пунктов 3 и 4 следует, что можно найти биективное соответствие $\nu \mapsto i_\nu$ такое, что

$$w_\nu^2 = -\frac{1}{\beta_{i_\nu}}.$$

Тогда

$$\sum_\nu \frac{1}{|w_\nu|^2} = \sum_\nu \beta_{i_\nu} \leqslant \sum_i \beta_i < +\infty.$$

На этом мы завершаем проверку утверждения о прообразах точек i и $-i$ функции $H(z)$. □

По утверждению о целых функциях (см., например, [1], стр. 251), порядок функции $H(z)$ не может быть больше 2. Поскольку $H(z) = e^{p(z)}$, получаем, что $p_{2\nu+1} = 0$ для $\nu = 1, 2, \ldots$.

Случай B. Теперь можно опустить предположение, что $p_{2\nu} = 0$. Рассмотрим функцию

$$f(z) = \frac{1 + \frac{1}{2}z}{1 - \frac{1}{2}z},$$

это H-ряд по Лемме 7. Также отметим, что

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{1}{1-(z/2)^2} = 1 + \frac{1}{4}z^2 + \cdots + \frac{1}{4^\nu}z^{2\nu} + \ldots.$$

Функция

$$t(z) = \frac{1}{1}z + \frac{1}{4}\frac{z^3}{3} + \cdots + \frac{1}{4^\nu}\frac{z^{2\nu+1}}{2\nu+1} + \cdots$$

– это p-ряд. Тогда из Леммы 4 следует, что

$$r(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{p_{2\nu+1}}{2\nu+1}\frac{1}{4^\nu}z^{2\nu+1}$$

также является p-рядом. Так как ряд

$$p(z) = \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{p_\nu}{\nu}z^\nu$$

целый, то и функция $r(z)$ тоже является целой. Получаем, что $e^{r(z)}$ – это целый H-ряд без нулей, для которого $r(z) = -r(-z)$, поэтому $p_{2\nu+1} = 0$ для $\nu = 1, 2, \ldots$. Следовательно

$$p(z) = \frac{p_1}{1}z + \frac{p_2}{2}z^2 + \frac{p_4}{4}z^4 + \cdots$$

Из леммы 4 следует, что

$$u(z) = \frac{p_1^2}{1}z + \frac{p_2^2}{2}z^2 + \frac{p_4^2}{4}z^4 + \cdots$$

является p-рядом. Поскольку $p(z)$ является целым рядом, то и ряд $u(z)$ – тоже целый. Кроме того, $p_{2\nu}^2 \geqslant 0$, потому что $p_{2\nu}$ – это вещественные числа. Заметим, что $Q(z) = e^{u(z)}$ – это целый H-ряд без нулей. Поскольку коэффициенты ряда $Q(z)$ неотрицательные, то

$$\max_{|z|\leqslant r} |Q(z)| = Q(r)$$

для всех $r \geqslant 0$. Получаем, что $\widetilde{Q}(z) = \frac{1}{Q(-z)}$ - это целый ненулевой H-ряд. Поэтому

$$\max_{|z|\leqslant r} |\widetilde{Q}(z)| = \widetilde{Q}(r).$$

Из равенства $|Q(-z)||\widetilde{Q}(z)| = 1$ следует, что

$$\min_{|z|\leqslant r} |Q(z)| = Q(-r).$$

Получаем, что $Q(x)$ – это монотонно неубывающий вещественный ряд. Так как $e^{u(x)} = Q(x)$, тоже самое свойство выполнено и для функции $u(x)$. Если $p_{2\nu} \neq 0$, то

$$\lim_{x \to -\infty} u(x) = +\infty$$

и $u(x)$ не является монотонно неубывающей. Поэтому должно быть выполнено равенство $p(z) = p_1 z$, то есть $H(z) = e^{p_1 z}$. □

Из леммы 7 и леммы 8 следует

Теорема 2. *Ряд $H(z) = 1 + h_1 z + h_2 z^2 + \cdots$ является H-рядом тогда и только тогда, когда он имеет вид*

$$H(z) = \left(\prod_{i=1}^{\infty} \frac{1 + \beta_i z}{1 - \alpha_i z} \right) \cdot e^{\alpha z},$$

где $\alpha \geqslant 0, \alpha_i \geqslant 0, \beta_i \geqslant 0$ для $i = 1, 2, \ldots,$ и выполнены неравенства

$$\sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i < +\infty, \sum_{i=1}^{\infty} \beta_i < +\infty.$$

Следствие 6. *Ряд*

$$p(z) = \frac{p_1}{1} z + \frac{p_2}{2} z^2 + \cdots$$

является p-рядом тогда и только тогда, когда существуют такие вещественные числа $\alpha \geqslant 0, \alpha_i \geqslant 0, \beta_i \geqslant 0$ для $i = 1, 2, \ldots,$

$$\sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i < +\infty, \sum_{i=1}^{\infty} \beta_i < +\infty,$$

что выполнены равенства

$$p_1 = \alpha + \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i + \sum_{i=1}^{\infty} \beta_i, \text{ и } p_\nu = \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i^\nu + (-1)^{\nu+1} \sum_{i=1}^{\infty} \beta_i^\nu \text{ для } \nu = 2, 3, \ldots. \tag{7}$$

Доказательство. Имеем равенство

$$e^{p(z)} = \prod_{i=1}^{\infty} \frac{1 + \beta_i z}{1 - \alpha_i z} e^{\alpha z}.$$

Произведение

$$\prod_{i=1}^{\infty} \frac{1 + \beta_i z}{1 - \alpha_i z}$$

сходится равномерно на всех компактных множествах, в которых не лежат точки $1/\alpha_i$ для $\alpha_i \neq 0$, и, если эти множества не содержат $-1/\beta_i$ для $\beta_i \neq 0$, это также относится и к $e^{-p(z)}$. Поэтому мы можем почленно построить логарифмическую производную. Тогда

$$p'(z) = \alpha + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\beta_i}{1+\beta_i z} + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\alpha_i}{1-\alpha_i z} = p_1 + p_2 z + \cdots .$$

Отсюда следует наше утверждение. □

Следствие 7. *Представление коэффициентов p-ряда из Следствия 6 определено однозначно с точностью до перенумераций членов последовательностей α_i и β_i.*

Доказательство. Пусть

$$p_1 = \alpha' + \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i' + \sum_{i=1}^{\infty} \beta_i' \text{ и } p_\nu = \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i'^{\nu} + (-1)^{\nu+1} \sum_{i=1}^{\infty} \beta_i'^{\nu}$$

для $\nu = 2, 3, \ldots$ – другое представление коэффициентов рассматриваемого ряда. Тогда

$$e^{p(z)} = e^{\alpha' z} \prod_{i=1}^{\infty} \frac{1+\beta_i' z}{1-\alpha_i' z} = e^{\alpha z} \prod_{i=1}^{\infty} \frac{1+\beta_i z}{1-\alpha_i z}.$$

Поскольку эти функции равны, то у них совпадают нули и полюса. Тогда после подходящей перенумерации будут выполнены равенства $\alpha_i = \alpha_i'$ и $\beta_i = \beta_i'$. Отсюда получаем равенство $\alpha = \alpha'$. □

Замечания. Можно добиться единственности коэффициентов α_i, β_i, если дополнительно предположить, что $\alpha_1 \geqslant \alpha_2 \geqslant \cdots$ и $\beta_1 \geqslant \beta_2 \geqslant \cdots$. Это всегда возможно из-за того, что

$$\sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i < +\infty, \sum_{i=1}^{\infty} \beta_i < +\infty,$$

и так как мы можем произвольно добавлять и удалять нули.

§3. Описание множества $E(\mathfrak{S}_\infty)$ и дальнейшие замечания

Теорема 3. *Центральная функция α на группе $\mathfrak{S}_\infty$ принадлежит $E(\mathfrak{S}_\infty)$ тогда и только тогда, когда существуют две последовательности $\alpha_1, \alpha_2, \ldots$ и $\beta_1, \beta_2, \ldots$ вещественных чисел, удовлетворяющих* *следующим свойствам:*

$$\begin{cases} 1.\ \alpha_i \geqslant 0 \ \textit{и}\ \beta_i \geqslant 0 \ \textit{для}\ \ i = 1, 2, \dots \\ 2.\ \alpha_i \geqslant \alpha_{i+1} \ \textit{и}\ \beta_i \geqslant \beta_{i+1} \ \textit{для}\ i = 1, 2, \dots \\ 3.\ \sum\limits_{i=1}^{\infty} \alpha_i + \sum\limits_{i=1}^{\infty} \beta_i \leqslant 1 \\ 4.\ \alpha(\gamma) = \prod\limits_{\nu=2}^{\infty} p_\nu^{\gamma_\nu} \\ \quad \textit{где}\ p_\nu = \sum\limits_{i=1}^{\infty} \alpha_i^\nu + (-1)^{\nu+1} \sum\limits_{i=1}^{\infty} \beta_i^\nu \ \textit{для}\ \nu = 2, 3, \dots . \end{cases} \tag{8}$$

Две пары последовательностей $\alpha_1, \alpha_2, \dots; \beta_1, \beta_2, \dots$ *и* $\alpha'_1, \alpha'_2, \dots;$ $\beta'_1, \beta'_2, \dots$, *которые удовлетворяют условиям* 1–3 *из набора условий* (8), *определяют согласно условию* 4 *одну и ту же функцию* $\alpha \in E(\mathfrak{S}_\infty)$ *тогда и только тогда, когда* $\alpha_i = \alpha'_i$ *и* $\beta_i = \beta'_i$ *для* $i = 1, 2, \dots$.

Доказательство. Из теоремы 1 и рассуждений в начале §2 мы знаем, что α лежит в $E(\mathfrak{S}_\infty)$ тогда и только тогда, когда существует такая последовательность $p_2, p_3, \dots$ вещественных чисел, что выполняется условие 4 из (8), и

$$p(z) = \frac{1}{1} z + \frac{p_2}{2} z^2 + \cdots$$

является p-рядом. Тогда наше утверждение следует из теоремы 2 и следствий из неё. □

Получаем биекцию между множеством R всех пар последовательностей, удовлетворяющих первым трем условиям в (8) и множеством $E(\mathfrak{S}_\infty)$, задаваемым условием 4. Какая топология должна быть на R, чтобы это отображение стало гомеоморфизмом? Чтобы ответить на этот вопрос, рассмотрим множество T пар последовательностей $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots; \beta_1, \beta_2, \dots$ вещественных чисел таких, что $0 \leqslant \alpha_\nu \leqslant 1$ и $0 \leqslant \beta_\nu \leqslant 1$. Можно интерпретировать T как произведение интервалов $I = \{x \mid 0 \leqslant x \leqslant 1\}$ с топологией произведения. Ясно, что R – замкнутое компактное подмножество T. Рассмотрим индуцированную топологию на R. Тогда выполняется

Теорема 4. *R гомеоморфно $E(G)$.*

Доказательство. Из доказательства импликации “тогда” теоремы 1 и теоремы 3 достаточно показать, что отображение

$$\alpha_1, \alpha_2, \ldots; \beta_1, \beta_2, \ldots \mapsto s_2, s_3, \ldots, \text{ где } s_\nu = \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i^\nu + (-1)^{\nu+1} \sum_{i=1}^{\infty} \beta_i^\nu$$

является непрерывным отображением из R в S. Тогда это непрерывное отображение из R на $\widetilde{M}$, и это гомеоморфизм, так как R компактно.

Пусть $\alpha_{1,0}, \alpha_{2,0}, \ldots; \beta_{1,0}, \beta_{2,0}, \ldots$ – это пара из R. Обозначим через $p_{2,0}, p_{3,0}, \ldots$ образ этой пары, то есть

$$p_{\nu,0} = \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_{i,0}^\nu + (-1)^{\nu+1} \sum_{i=1}^{\infty} \beta_{i,0}^\nu.$$

Окрестность $U(\varepsilon, n)$ последовательности $p_{2,0}, p_{3,0}, \ldots$ состоит из всех последовательностей $p_2, p_3, \ldots$ в S, для которых $|p_\nu - p_{\nu,0}| < \varepsilon$ для $\nu = 2, 3, \ldots, n$. Выберем достаточно большое число n_0, чтобы были выполнены неравенства $\alpha_{n_0,0} < \varepsilon/16$ и $\beta_{n_0,0} < \varepsilon/16$. Будем считать, что $\varepsilon < 1$. Выберем такое $\eta > 0$, что $\eta < \varepsilon/16$ и

$$\left| \sum_{i=1}^{n_0} \alpha_{i,0}^\nu - \sum_{i=1}^{n_0} \alpha_i^\nu \right| < \frac{\varepsilon}{16}, \left| \sum_{i=1}^{n_0} \beta_{i,0}^\nu - \sum_{i=1}^{n_0} \beta_i^\nu \right| < \frac{\varepsilon}{16}$$

выполняется для $\nu = 1, 2, \ldots, n$ и всех $\alpha_1, \alpha_2, \ldots; \beta_1, \beta_2, \ldots$ из $W(\eta, n_0)$. Здесь через $W(\eta, n_0)$ обозначено множество всех пар последовательностей $\alpha_1, \alpha_2, \ldots; \beta_1, \beta_2, \ldots$ из R, для которых $|\alpha_{i,0} - \alpha_i| < \eta, |\beta_{i,0} - \beta_i| < \eta$ для $i = 1, 2, \ldots, n_0$. Отметим, что $W(\eta, n_0)$ является окрестностью $\alpha_{1,0}, \alpha_{2,0}, \ldots; \beta_{1,0}, \beta_{2,0}, \ldots$. Покажем, что $W(\eta, n_0)$ отображается в $U(\varepsilon, n)$, отсюда будет следовать непрерывность. Пара $\alpha_1, \alpha_2, \ldots; \beta_1, \beta_2, \ldots$ отображается в $p_2, p_3, \ldots$, где

$$p_\nu = \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i^\nu + (-1)^{\nu+1} \sum_{i=1}^{\infty} \beta_i^\nu.$$

Тогда для $\nu = 2, 3, \ldots, n$ выполнено

$$|p_{\nu,0} - p_\nu| \leqslant \left| \sum_{i=1}^{n_0} \alpha_{i,0}^\nu - \sum_{i=1}^{n_0} \alpha_i^\nu \right| + \left| \sum_{i=1}^{n_0} \beta_{i,0}^\nu - \sum_{i=1}^{n_0} \beta_i^\nu \right| + \left| \sum_{i=n_0+1}^{\infty} \alpha_{i,0}^\nu \right|$$
$$+ \left| \sum_{i=n_0+1}^{\infty} \alpha_i^\nu \right| + \left| \sum_{i=n_0+1}^{\infty} \beta_{i,0}^\nu \right| + \left| \sum_{i=n_0+1}^{\infty} \beta_i^\nu \right|$$

$$\leqslant \frac{\varepsilon}{16} + \frac{\varepsilon}{16} + \frac{2\varepsilon}{16} + \frac{4\varepsilon}{16} + \frac{2\varepsilon}{16} + \frac{4\varepsilon}{16} < \varepsilon$$

Оценка на первые два члена следует из выбора η. Также имеем

$$\alpha_{n_0+1,0} \leqslant \alpha_{n_0,0} \leqslant \frac{\varepsilon}{16}, \quad \alpha_{n_0+1} \leqslant \alpha_{n_0} \leqslant \frac{2\varepsilon}{16},$$

так как

$$|\alpha_{n_0} - \alpha_{n_0,0}| < \frac{\varepsilon}{16} \text{ и } \alpha_{n_0,0} < \frac{\varepsilon}{16}.$$

Такие же неравенства выполняются для $\beta_{n_0+1,0}$ и β_{n_0+1}. Отсюда и из следующего утверждения следует оценка на оставшиеся слагаемые.

Пусть $\gamma_1, \gamma_2, \ldots$ – последовательность положительных чисел, для которых выполнены неравенства $\gamma_1 \geqslant \gamma_2 \geqslant \cdots$, $\sum_{i=1}^{\infty} \gamma_i \leqslant 1$, и $\gamma_1 \leqslant \varepsilon < 1$. Тогда

$$\sum_{i=1}^{\infty} \gamma_i^{\nu} \leqslant 2\varepsilon$$

для $\nu = 2, 3, \ldots$.

Доказательство. Существует такое i_0, такое, что $\sum_{i=i_0+1}^{\infty} \gamma_i < \varepsilon$. Пусть $\gamma_i' = \gamma_i$ для $i = 1, 2, \ldots, i_0$, $\gamma_{i_0+1}' = \sum_{i=i_0+1}^{\infty} \gamma_i$, и $\gamma_i' = 0$, если $i > i_0 + 1$. Тогда $\sum_{i=1}^{\infty} \gamma_i' \leqslant 1$, $|\gamma_i'| \leqslant \varepsilon$ для $i = 1, 2, \ldots$, и выполнено

$$\sum_{i=1}^{\infty} (\gamma_i')^{\nu} = \sum_{i=1}^{i_0} \gamma_i^{\nu} + (\gamma_{i_0+1}')^{\nu} \geqslant \sum_{i=1}^{i_0} \gamma_i^{\nu} + \gamma_{i_0+1}^{\nu-1} \sum_{i=i_0+1}^{\infty} \gamma_i$$
$$\geqslant \sum_{i=1}^{i_0} \gamma_i^{\nu} + \sum_{i=i_0+1}^{\infty} \gamma_i^{\nu} = \sum_{i=1}^{\infty} \gamma_i^{\nu}.$$

Переупорядочив γ_i', можно добиться того, что $\gamma_1' \geqslant \gamma_2' \geqslant \cdots$. Только конечное число γ_i' отличается от нуля. Если существует больше двух таких γ_i', что $0 < \gamma_i' < \varepsilon$, то пусть i_1 – это первый индекс, и i_2 – это последний индекс для γ_i с таким свойством. Тогда из-за того, что $\gamma_{i_1}' \geqslant \gamma_{i_2}'$, функция $(\gamma_{i_1}' + \sigma)^{\nu} + (\gamma_{i_2}' - \sigma)^{\nu}$ возрастает на отрезке $0 \leqslant \sigma \leqslant \gamma_{i_2}'$. Выбрав подходящее число σ, и положив $\gamma_i'' = \gamma_i'$ для $i \neq i_1, i_2$, и $\gamma_{i_1}'' = \gamma_{i_1}' + \sigma$, $\gamma_{i_2}'' = \gamma_{i_2}' - \sigma$, можно добиться того, что либо $\gamma_{i_1}'' = \varepsilon$, либо $\gamma_{i_2}'' = 0$. Также число γ_i'', для которого выполнены неравенства $0 < \gamma_i'' < \varepsilon$, меньше, чем число γ_i', для которого выполнено $0 < \gamma_i' < \varepsilon$. Но тогда

$$\sum_{i=1}^{\infty} (\gamma_i'')^{\nu} \geqslant \sum_{i=1}^{\infty} (\gamma_i')^{\nu}.$$

Продолжая таким же образом, мы получаем последовательность $\gamma_1''' = \dots = \gamma_n''' = \varepsilon$, $0 \leqslant \gamma_{n+1}''' < \varepsilon$ и $\gamma_i''' = 0$ для $i > n+1$, причем

$$\sum_{i=1}^{\infty} (\gamma_i''')^{\nu} \geqslant \sum_{i=1}^{\infty} (\gamma_i')^{\nu} \geqslant \sum_{i=1}^{\infty} \gamma_i^{\nu}$$

для $\nu = 2, 3, \dots$, и

$$\sum_{i=1}^{\infty} \gamma_i''' = \sum_{i=1}^{\infty} \gamma_i \leqslant 1.$$

Таким образом, получаем неравенство $n \cdot \varepsilon \leqslant 1$, следовательно $n \leqslant 1/\varepsilon$. Поэтому выполнена цепочка неравенств

$$\sum_{i=1}^{\infty} (\gamma_i''')^{\nu} \leqslant (n+1)\varepsilon^{\nu} \leqslant (1+\varepsilon)\varepsilon^{\nu-1} < 2\varepsilon^{\nu-1} \leqslant 2\varepsilon \text{ для } \nu = 2, 3, \dots.$$

Таким образом,

$$\sum_{i=1}^{\infty} \gamma_i^{\nu} < 2\varepsilon. \qquad \square$$

$\square$

Пусть $\alpha \in E(\mathfrak{S}_\infty)$ и α_a – знакопеременная центральная функция (см. Пример 2 после Следствия 3 из теоремы 1), тогда $\alpha_a \alpha \in E(\mathfrak{S}_\infty)$ будем называть ассоциированной с α центральной функцией. Легко видеть, что если α соответствует паре последовательностей $\alpha_1, \alpha_2, \dots; \beta_1, \beta_2, \dots$ из R, то $\alpha_a \alpha$ соответствует последовательности $\beta_1, \beta_2, \dots; \alpha_1, \alpha_2, \dots$. $\alpha \in E(\mathfrak{S}_\infty)$ ассоциирована сама себе, то есть $\alpha = \alpha_a \alpha$ тогда и только тогда, когда $\alpha_i = \beta_i$ для $i = 1, 2, \dots$.

Пусть $\alpha \in E(\mathfrak{S}_\infty)$, тогда из [4, стр. 115] следует, что элементу α соответствует примарное представление $U^\alpha \colon x \to U_x^\alpha$ группы $\mathfrak{S}_\infty$. К какому типу представления оно относится, I или II? Тривиальное и знакопеременное представление принадлежат типу I, так как они одномерны. Они соответствуют α_e и α_a) (см. Пример 2 после следствия 3). Все остальные относятся к типу II.

Теорема 5. *Если $\alpha \in E(\mathfrak{S}_\infty), \alpha \neq \alpha_e, \alpha \neq \alpha_a$, то U^α относится к типу II.*

Доказательство. В [4, стр. 117] показано, что $\dim \mathfrak{A}_\alpha = +\infty$ (см. определение $\mathfrak{A}_\alpha$ в [4, стр. 115]). Если $\alpha \in E(\mathfrak{S}_\infty)$, то ограничение α_n на подгруппу $\mathfrak{S}_n$ лежит в $K(\mathfrak{S}_n)$.

I. Покажем, что $\dim \mathfrak{A}_\alpha \geqslant \dim \mathfrak{A}_{\alpha_n}$. Пусть $x, y \in \mathfrak{S}_n$, тогда

$$\langle \delta_x^{\alpha_n}, \delta_y^{\alpha_n} \rangle = \alpha_n(y^{-1}x) = \alpha(y^{-1}x) = \langle \delta_x^{\alpha}, \delta_y^{\alpha} \rangle.$$

Множества $\{\delta_x^{\alpha_n} \mid x \in \mathfrak{S}_n\}$ и $\{\delta_x^{\alpha} \mid x \in \mathfrak{S}_n\}$ порождают пространства одной и той же размерности в $\mathfrak{A}_{\alpha_n}$ и $\mathfrak{A}_\alpha$. Но $\{\delta_x^{\alpha_n} \mid x \in \mathfrak{S}_n\}$ порождает все пространство $\mathfrak{A}_{\alpha_n}$. Поэтому $\dim \mathfrak{A}_\alpha \geqslant \dim \mathfrak{A}_{\alpha_n}$.

II. Разложим α_n как в равенстве (3) и получим, что $\alpha_n = \sum s_\lambda \chi^\lambda$, где суммирование идет по $\lambda \in \Lambda$ с $|\lambda| = n$. Покажем, что если существует монотонно возрастающая последовательность $n_1, n_2, \dots$ натуральных чисел такая, что $p_\lambda = 0$ для всех λ таких, что $|\lambda| = n_\nu, \lambda_1 \geqslant 2, \lambda_2 \geqslant 1$, то либо $\alpha = \alpha_e$, либо $\alpha = \alpha_a$. $\alpha_{n_\nu} = a_{n_\nu}\alpha_{e,n_\nu} + b_{n_\nu}\alpha_{a,n_\nu}$, где $a_{n_\nu} + b_{n_\nu} = 1$ для $\nu = 1, 2, \dots$. Тогда для всех $n \leqslant n_\nu$ должно выполняться равенство $\alpha_n = a_{n_\nu}\alpha_{e,n} + b_{n_\nu}\alpha_{a,n}$. Все a_{n_ν}, b_{n_ν} должны быть равны, так что $\alpha_n = a\alpha_{e,n} + b\alpha_{a,n}$ для $n = 1, 2, \dots$, то есть $\alpha = a\alpha_e + b\alpha_a$. Так как $\alpha \in E(\mathfrak{S}_\infty)$, либо $\alpha = \alpha_e$, либо $\alpha = \alpha_a$.

III. Пусть $\alpha_n = \sum s_\lambda \chi^\lambda$, и пусть $\lambda^1, \dots \lambda^r$ – это те разбиения $\lambda \in \Lambda, |\lambda| = n$, для которых $s_\lambda > 0$. Обозначим через $f \mapsto M_f^\rho$ неприводимое матричное представление группового кольца $\mathfrak{A}(\mathfrak{S}_\infty)$, соответствующее характеру χ^λ, $\rho = 1, 2, \dots, r$. Это представление имеет размерность $\chi^\lambda(\varepsilon)$. Рассмотрим $\mathfrak{M}$ – кольцо матриц

$$M_f = M_f^1 \oplus M_f^2 \oplus \dots \oplus M_f^r$$

для $f \in \mathfrak{A}(\mathfrak{S}_n)$. Обозначим через M_f^* сопряженную матрицу (она получается из M_f транспонированием и заменой коэффициентов на сопряженные). Получаем, что $\mathfrak{M}$ – это $*$-алгебра, и

$$\langle M_f, M_g \rangle = \sum_{\rho=1}^{\infty} s_{\lambda^\rho} \operatorname{tr}(M_g^\rho)^* M_f^\rho$$

является точным следом $\mathfrak{M}$ (см. [4, стр. 113]). Отображение $f \mapsto M_f$ из $\mathfrak{A}(\mathfrak{S}_n)$ в $\mathfrak{M}$ – это $*$-гомоморфизм, который соответствует α_n (см. [4, стр. 114]). Из леммы 1 в [4] следует, что $\mathfrak{A}_{\alpha_n}$ изоморфна $\mathfrak{M}$. Также получаем, что

$$\dim \mathfrak{A}_{\alpha_n} = \dim \mathfrak{M} = \sum_{i=1}^{r} (\chi^{\lambda^\rho}(\varepsilon))^2.$$

IV. Пусть $\alpha \in E(\mathfrak{S}_\infty)$ и $\alpha \neq \alpha_e, \alpha_a$. Тогда из пункта II следует, что существует n_0 со следующим свойством: для всех $n \geqslant n_0$ в разложении

$$\alpha_n = \sum s_\lambda \chi^\lambda$$

существует такое разбиение $\lambda \in \Lambda$, что $\lambda_1 \geqslant 2, \lambda_2 \geqslant 1$ и $s_\lambda > 0$. Для таких разбиений $\lambda \in \Lambda$ выполнено неравенство $\chi^\lambda(\varepsilon) \geqslant |\lambda| - 2$. (Это следует, например, с помощью простой индукции по $|\lambda|$ из известной рекуррентной формулы

$$\chi^{(\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_r,0,\ldots)}(\varepsilon) = \chi^{(\lambda_1-1,\lambda_2,\ldots,\lambda_r,0,\ldots)}(\varepsilon) + \chi^{(\lambda_1,\lambda_2-2,\ldots,\lambda_r,0,\ldots)}(\varepsilon) + \cdots + \chi^{(\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_r-1,0,\ldots)}(\varepsilon)$$

где $\chi^{(\mu_1,\mu_2,\ldots,\mu_r-1,0,\ldots)}(\varepsilon) = 0$, если $(\mu_1,\mu_2,\ldots,\mu_r-1,0,\ldots) \notin \Lambda$.) Из пункта III получаем, что для $n \geqslant n_0$ выполнено неравеннство $\dim \mathfrak{A}_{\alpha_n} \geqslant (n-2)^2$. А из пункта I следует, что $\dim \mathfrak{A}_\alpha \geqslant (n-2)^2$. Тогда

$$\dim \mathfrak{A}_\alpha = +\infty. \qquad \square$$

В заключение вычислим неразложимые положительно определенные центральные функции знакопеременной группы $\mathfrak{A}_\infty$. Теперь это крайне просто, даже проще, чем в случае конечных знакопеременных групп. Пусть

$$\mathfrak{A}_\infty = \left\{ \varphi \in \mathfrak{S}_\infty \mid \sum_{\nu=1}^{\infty} \gamma_{2\nu}(\varphi) \text{ четно} \right\}$$

Ясно, что $\mathfrak{A}_\infty$ – это нормальная подгруппа $\mathfrak{S}_\infty$ индекса 2.

Теорема 6. *Функция $\beta \in E(\mathfrak{A}_\infty)$ тогда и только тогда, когда β – это ограничение некоторой функции $\alpha \in E(\mathfrak{S}_\infty)$. Ограничения центральных функций $\alpha_1, \alpha_2 \in E(\mathfrak{S}_\infty)$ на подгруппу $\mathfrak{A}_\infty$ совпадают тогда и только тогда, когда $\alpha_2 = \alpha_1$ или $\alpha_2 = \alpha_a \alpha_1$.*

Доказательство. Так как подгруппа $\mathfrak{A}_\infty$ нормальна в $\mathfrak{S}_\infty$, класс сопряженности K_γ в $\mathfrak{S}_\infty$ либо содержится в $\mathfrak{A}_\infty$, либо не пересекается с $\mathfrak{A}_\infty$. Классы сопряженности K_γ в $\mathfrak{A}_\infty$ – это в точности те классы, для которых сумма $\gamma_2 + \gamma_4 + \gamma_6 + \cdots$ четна. Классы сопряженности группы $\mathfrak{A}_\infty$ – это в точности те классы сопряженности группы $\mathfrak{S}_\infty$, которые лежат в подгруппе $\mathfrak{A}_\infty$. (Но для групп $\mathfrak{S}_n$ и $\mathfrak{A}_n$ это неверно!) А именно: пусть элементы $\varphi_0, \varphi_1 \in \mathfrak{A}_\infty$ таковы, что выполнено равенство $\varphi^{-1}\varphi_0\varphi = \varphi_1$ для элемента $\varphi \in \mathfrak{S}_\infty$. Тогда выполнено равенство $\varphi'^{-1}\varphi_0\varphi' = \varphi_1$ для элемента $\varphi' = \varphi_3\varphi$, где φ_3 – это такая транспозиция $(k, k+1)$, что $\varphi_0(k) = k$ и $\varphi_0(k+1) = k+1$. Поскольку или элемент φ, или элемент φ' принадлежит подгруппе $\mathfrak{A}_\infty$, утверждение доказано. Отсюда следует, что $L(\mathfrak{A}_\infty, \mathfrak{S}_\infty) = L(\mathfrak{A}_\infty)$ (см. [4], замечание после леммы 6). Также выполнено равенство $E(\mathfrak{A}_\infty, \mathfrak{S}_\infty) = E(\mathfrak{A}_\infty)$. Из [4, лемма 14] следует первое утверждение предложения.

Предположим, что $\alpha_1, \alpha_2 \in E(\mathfrak{S}_\infty)$ имеют одинаковое ограничение на $\mathfrak{A}_\infty$. Положим

$$\alpha_i(\gamma) = \prod_{\nu=2}^{\infty} (p_{\nu,i})^{\gamma_\nu}, i = 1, 2.$$

Тогда

$$\alpha_1(\gamma^{(2k+1)}) = p_{2k+1,1} = \alpha_2(\gamma^{(2k+1)}) = p_{2k+1,2} \text{ для } k = 1, 2, \ldots.$$

Также имеем цепочку равенств

$$2\gamma^{(2k)} = (2\delta_{1,2k}, 2\delta_{2,2k}, \ldots)\alpha_1(2\gamma^{(2k)}) = (p_{2k,1})^2 = \alpha_2(2\gamma^{(2k)}) = (p_{2k,2})^2 \\ \text{для } k = 1, 2, \ldots$$

Отсюда следует, что если $p_{2k,1} = 0$ для $k = 1, 2, 3, \ldots$, то $p_{2k,2} = 0$ для $k = 1, 2, 3, \ldots$. Тогда получаем, что $\alpha_1 = \alpha_2$. В другом случае, пусть k_0 – это наименьший индекс, для которого $p_{2k_0,1} \neq 0$. Тогда $p_{2k_0,1} = p_{2k_0,2}$ или $p_{2k_0,1} = -p_{2k_0,2}$. Для

$$\gamma^{(2k_0)} + \gamma^{(2k)} = (\delta_{1,2k_0} + \delta_{1,2k}, \delta_{2,2k_0} + \delta_{2,2k}, \ldots)$$

выполнена цепочка равенств

$$\alpha_1(\gamma^{2k_0} + \gamma^{(2k)}) = p_{2k_0,1}p_{2k,1} = \alpha_2(\gamma^{(2k_0)} + \gamma^{(2k)}) = p_{2k_0,2}p_{2k,1} \\ \text{для } k = 1, 2, \ldots$$

Поэтому мы получаем, что или $p_{2k,1} = p_{2k,2}$, или $p_{2k,1} = -p_{2k,2}$ для $k = 1, 2, \ldots$. Следовательно, или $\alpha_2 = \alpha_1$, или $\alpha_2 = \alpha_a\alpha_1$. □

Примечания, добавленные при переводе.

1) При описании различных множеств, связанных с положительно определенными функциями Э.Тома использует в том числе и обозначения, введенные им в других работах. Для удобства читателя мы приводим здесь список обозначений таких множеств с краткими определениями.

$L(G)$ – это группа формальных разностей, получаемая из моноида положительно определенных центральных функций на группе G.

$K(G)$ – это множество всех нормированных положительно определенных центральных функций на группе G.

$E(G)$ – это множество всех неразложимых функций в множестве $K(G)$.

$F(G)$ – это топологическое замыкание множества $E(G)$.

$L(G, H)$ – это подгруппа $L(G)$, состоящая из функций, неподвижных при действии подгруппы H.

$K(G, H)$ – это пересечение $K(G)$ с $L(G, H)$.

$E(G, H)$ - это множество всех неразложимых функций в множестве $K(G, H)$.

2) После выхода в 1979 году монографии I.Macdonald "Symmetric Functions and Hall Polynomials" в теории симметрических функций установились канонические обозначения, которые не совпали с используемыми Э.Тома в этой работе. Поэтому мы сделали ряд замен по сравнению с исходным текстом:

"s-ряды" на "p-ряды";

"P-ряды" на "H-ряды";

"s_n" на "p_n";

"p_λ" на "s_λ" или "h_n" в зависимости от того, является ли разбиение λ однострочечным.

Список литературы

1. L. Bieberbach,, *Lehrbuch der Funktionstheorie.* II. Leipzig u. Berlin: Teubner 1931.
2. D. E. Littlewood,, *The theory of group characters and matrix representations of groups.* Second edition. Oxford: University Press 1950.
3. F. D. Murnaghan, *The theory of group representations.* Baltimore, Johns Hopkins Press 1938.
4. E. Thoma, , *Über unitäre Darstellungen abzählbarer, diskreter Gruppen.* — Math. Annalen **153** (1964), 111–138.
5. E. Thoma, *Über positiv definite Klassenfunktionen abzählbarer Gruppen.* — Math. Z. **84** (1964), 389–402.

Поступило 14 ноября 2023 г.