Рефераты

УДК 517.51, 519.216.8

Некоторые экстремальные задачи для мартингальных преобразований. I. Васюнин В. И., Затицкий П. Б. — В кн.: Исследования по линейным операторам и теории функций. 51. (Зап. научн. семин. ПОМИ, т. 527), СПб., 2023, с. 5–53.

Данной работой мы начинаем серию исследований экстремальных задач для оценок распределений мартингальных преобразований ограниченных мартингалов. Соответствующие таким задачам функции Беллмана являются поточечно минимальными диагонально вогнутыми функциями на горизонтальной полосе, удовлетворяющими наперед заданным граничным условиям. Мы описываем базовые структурные элементы, возникающие при построении таких функций, а также приводим решение в случае асимметричных граничных данных и достаточно малой ширины полосы.

Библ. – 8 назв.

УДК 517.55

Обратные меры Карлесона для пространств Харди в единичном шаре. Дубцов Е. С. — В кн.: Исследования по линейным операторам и теории функций. 51. (Зап. научн. семин. ПОМИ, т. 527), СПб., 2023, с. 54–70.

Пусть $H^p = H^p(B_d)$ обозначает пространство Харди в открытом единичном шаре B_d из $\mathbb{C}^d$, $d \geqslant 1$. В работе дано описание обратных мер Карлесона для H^p, $1 < p < \infty$, т.е. охарактеризованы конечные положительные борелевские меры μ, заданные на замкнутом шаре $\overline{B}_d$, такие что

$$\|f\|_{H^p} \leqslant c\|f\|_{L^p(\overline{B}_d,\mu)}$$

для всех $f \in H^p(B_d) \cap C(\overline{B}_d)$ и универсальной константы $c > 0$. Для невнутренней голоморфной функции $b : B_d \to B_1$ получены свойства обратных мер Карлесона для пространства де Бранжа–Ровняка $\mathcal{H}(b)$.

Библ. – 10 назв.

УДК 517.51

Теоремы типа Палтани, или об оценках приближения положительными дискретными функционалами. Ихсанов Л. Н. — В кн.: Исследования по линейным операторам и теории функций. 51. (Зап. научн. семин. ПОМИ, т. 527), СПб., 2023, с. 71–83.

Работа посвящена оценкам вида

$$|F(f)-F(e_0)f(x)|\leqslant F(e_0)\omega_2(f,h),$$

где $F(f)=\sum\limits_{y\in Y}\gamma(y)f(y)$, Y – не более чем счётное множество, не имеющее точек сгущения на $\mathbb{R}$, $\gamma:Y\to(0,\infty)$.

Библ. – 2 назв.

УДК 517

Частичные ретракции для абстрактных пространств типа Харди. Кисляков С. В. — В кн.: Исследования по линейным операторам и теории функций. 51. (Зап. научн. семин. ПОМИ, т. 527), СПб., 2023, с. 84–93.

Доказано существование частичных ретракций для простанств типа Харди в рамках недавнего абстрактного подхода, предложенного В. А. Боровицким и автором. В основе построений лежит равномерная алгебра, более общая, чем w^*-алгебры Дирихле.

Библ. – 3 назв.

УДК 517.927.25

Об асимптотическом разложении характеристического определителя для 2×2-систем типа Дирака. Лунёв А. А., Маламуд М. М. — В кн.: Исследования по линейным операторам и теории функций. 51. (Зап. научн. семин. ПОМИ, т. 527), СПб., 2023, с. 94–136.

Статья посвящена граничным задачам для следующей 2×2-системы типа Дирака:

$$Ly=-iB^{-1}y'+Q(x)y=\lambda y,\quad B=\begin{pmatrix}b_1 & 0\\ 0 & b_2\end{pmatrix},\quad y=\operatorname{col}(y_1,y_2),$$

с гладкой потенциальной матрицей $Q\in W_1^n[0,1]\otimes\mathbb{C}^{2\times 2}$ и $b_1<0<b_2$. При $b_2=-b_1=1$ эта система эквивалентна одномерной системе Дирака.

Наша цель – получение асимптотического разложения характеристического определителя граничной задачи, ассоциированной с приведенным выше уравнением с общими двухточечными граничными условиями. Из этого разложения непосредственно вытекает новый результат о полноте системы корневых функций указанной граничной задачи с нерегулярными граничными условиями.

Библ. – 33 назв.

УДК 517.984.7

К теореме о бикоммутанте алгебр, порождённых движениями конечных точечных множеств в $\mathbb{R}^3$. Марченко В. В. — В кн.: Исследования по линейным операторам и теории функций. 51. (Зап. научн. семин. ПОМИ, т. 527), СПб., 2023, с. 137–154.

Задача описания инвариантных расширений 3-мерного оператора Шрёдингера с конечным числом точечных взаимодействий приводит к необходимости изучения матриц специального типа – *матриц перестановок.* Широкий класс таких расширений, рассматриваемых в определённой граничной тройке, находится во взаимно однозначном соответствии с множеством так называемых граничных операторов (матриц). Расширение оператора $\mathbf{H}$ с точечными взаимодействиями в множестве $X = \{x_1, \ldots, x_m\}$ инвариантно относительно группы движений множества X (или её подгруппы) в точности тогда, когда соответствующая граничная матрица коммутирует с множеством матриц размера $m \times m$, индуцированным группой движений, т.е. принадлежит *коммутанту* этого множества.

Для произвольного конечного множества точек и для соответствующего множества матриц доказана теорема о бикоммутанте. Для некоторых частных случаев – правильного многоугольника, тетраэдра и куба – в явном виде выписан базис бикоммутанта, рассматриваемого как векторное пространство.

Библ. – 13 назв.

УДК 517.982.274

Варианты метода Бургейна для проверки K-замкнутости некоторых подпар. Руцкий Д. В. — В кн.: Исследования по линейным операторам и теории функций. 51. (Зап. научн. семин. ПОМИ, т. 527), СПб., 2023, с. 155–182.

В начале 90-х Ж. Бургейн доказал, что пара (L_1^P, L_p^P) подпространств, определённых соотношением $\{Pf = f\}$ с помощью проектора P, являющегося оператором Кальдерона–Зигмунда, K-замкнута в соответствующей паре (L_1, L_p) при $1 < p < \infty$. K-замкнутость означает, что произвольные измеримые разбиения в $L_1 + L_p$ функций из $L_1^P + L_p^P$ можно исправлять до разбиений в $L_1^P + L_p^P$ с соответствующими оценками нормы. В настоящей работе предлагается один вариант рассуждения Ж. Бургейна, который естественным образом приводит ко многим известным его обобщениям. В качестве иллюстрации этой техники доказывается следующее обобщение результата С. В. Кислякова и К. Шу о K-замкнутости пространств Харди на бидиске: пространства функций на $\mathbb{R}^2$, носитель преобразования Фурье которых лежит в заданном конечном объединении многоугольников, K-замкнуты в паре (L_1, L_∞). С другой стороны, некоторые контрпримеры в контексте этого подхода выявляют конкретные ограничения, с которыми подобные методы сталкиваются в более высоких размерностях и при рассмотрении более сложных пространств функций на прямой и на плоскости. Среди прочего показано, как недавний результат С. В. Кислякова и И. К. Злотникова о K-замкнутости коинвариантных пространств оператора сдвига $\mathcal{K}_\theta^p$ можно непосредственно вывести из результата Ж. Бургейна, причём для всей шкалы $(\mathcal{K}_\theta^1, \mathcal{K}_\theta^\infty)$.

Библ. – 24 назв.

УДК 517.574

Функция Б. Я. Левина для некоторых совокупностей промежутков. Сильванович О. В., Широков Н. А. — В кн.: Исследования по линейным операторам и теории функций. 51. (Зап. научн. семин. ПОМИ, т. 527), СПб., 2023, с. 183–203.

Пусть $\{I_k\}_{k\in\mathbb{Z}},\ I_k = [a_k, b_k],\ b_k < a_{k+1},\ a_k \xrightarrow[k\to-\infty]{} -\infty, a_k \xrightarrow[k\to+\infty]{} +\infty$ – множество попарно дизъюнктных отрезков вещественной оси $\mathbb{R}$. $J_k = [b_k, a_{k+1}],\ E = \bigcup\limits_{k\in\mathbb{Z}} J_k$. Полагаем $a_0 = -1,\ b_0 = 1,\ a_1 = 2^{n_0} \stackrel{\text{def}}{=} C$. Для $I_k \subset [2^m, 2^{m+1}]$ или $I_k \subset [-2^{m+1}, -2^m]$ полагаем $|I_k| = 2^{-m\alpha}, \alpha > 0,\ m \geqslant n_0$. Предположим также, что для любого $n \geqslant n_0$ найдутся такие k и l, что $a_k = 2^n$ и $b_l = -2^n$. Функцией Б. Я. Левина мы назовем функцию $f_{E,\sigma}(z),\ \sigma > 0$, удовлетворяющую следующим условиям:

1. $f_{E,\sigma}(z)$ субгармонична на всей комплексной плоскости $\mathbb{C}$ и гармонична в $\mathbb{C}\setminus E$;
2. $f_{E,\sigma}(z) = 0,\ x \in E;\ f_{E,\sigma}(z) > 0,\ z \in \mathbb{C}\setminus E$;
3. $\overline{\lim\limits_{z\to\infty}} \dfrac{f_{E,\sigma}(z)}{|z|} = \sigma,\ f_{E,\sigma}(\overline{z}) = f_{E,\sigma}(z)$;
4. если g субгармонична в $\mathbb{C}$, $g(x) \leqslant 0,\ x \in E$ и $\overline{\lim\limits_{z\to\infty}} \dfrac{g(z)}{|z|} \leqslant \sigma$, то

$$g(z) \leqslant f_{E,\sigma}(z),\ z \in \mathbb{C}.$$

Функция Б. Я. Левина существует, если $C_1|I_l| \geqslant |J_k| \geqslant C|I_l|$ при условии, что

$$J_k,\ I_l \subset [2^n, 2^{n+1}] \text{ или } J_k,\ I_l \subset [-2^{n+1}, -2^n],\ n \geqslant n_0.$$

Мы доказываем, что при условии $C \geqslant c_0(\alpha)$ справедливо соотношение $\max\limits_{x\in I_k} f_{E,\sigma}(x) \leqslant 6\sigma|I_k|$ и описываем поведение функции $f_{E,1}(z)$ в окрестности отрезков $J_k,\ k \in \mathbb{Z}$.

Библ. – 8 назв.

УДК 517.537

Обратная теорема приближения на подмножествах областей с заострениями. Синцова К. А. — В кн.: Исследования по линейным операторам и теории функций. 51. (Зап. научн. семин. ПОМИ, т. 527), СПб., 2023, с. 204–220.

Пусть $\mathfrak{P}(z)$ – двоякопериодическая функция Вейерштрасса с периодами $2\boldsymbol{\omega}_1, 2\boldsymbol{\omega}_2$, пусть Q – параллелограмм периодов на комплексной плоскости, $Q = \{z \in \mathbb{C}\ :\ z = 2\alpha_1\boldsymbol{\omega}_1 + 2\alpha_2\boldsymbol{\omega}_2,\ \ \alpha_1, \alpha_2 \in [0, 1)\}$.

Рассмотрим односвязную область $D, \overline{D} \subset Q$, с конечным числом внешних по отношению к ней углов, равных 2π. Граничные дуги ∂D в окрестности угловых точек достаточно гладкие, а между граничными точками дуги удовлетворяют условиям соизмеримости дуги и хорды.

Множество функций f, для которых функция $f^{(r)}$ имеет модуль непрерывности $\omega(t)$, обозначим через $H^{r+\omega}$. Предполагается, что $\omega(t)$ удовлетворяет следующему соотношению:

$$\int\limits_0^x \frac{\omega(t)}{t}dt + x\int\limits_x^\infty \frac{\omega(t)}{t^2}dt \leqslant c\omega(x).$$

Пусть функция Φ конформно отображает область $\mathbb{C} \setminus D$ на $\mathbb{C} \setminus \mathbb{D}$ с нормализацией $\Phi(\infty) = \infty$, $\Phi'(\infty) > 0$. Положим $L_{1+t} = \{z \in \mathbb{C} \setminus D : |\Phi(z)| = 1 + t\}$, $\delta_n(z) = \operatorname{dist}(z, L_{1+\frac{1}{n}})$, $z \in \partial D$. Основным результатом работы является следующее утверждение.

Теорема 1. *Пусть $f\colon \overline{D} \to \mathbb{C}$, и пусть существует последовательность полиномов $P_n(u, v)$, $\deg P_n \leqslant n$, такая, что*

$$|f(z) - P_n(\mathfrak{P}(z), \mathfrak{P}'(z))| \leqslant C\delta_n^r(z)\omega(\delta_n(z)),\ z \in \partial D,$$

где C не зависит от n и z. Тогда $f \in H^{r+\omega}(D)$.

Библ. – 5 назв.

УДК 517.545

Теорема типа Л. Альфорса для мер Хаусдорфа. Флоринский А. А., Фофанов К. А., Широков Н. А. — В кн.: Исследования по линейным операторам и теории функций. 51. (Зап. научн. семин. ПОМИ, т. 527), СПб., 2023, с. 221–241.

Пусть функция f аналитична в области $\Delta \subset \mathbb{C}$, $D = f(\Delta)$ – риманова поверхность. Рассмотрим $E \subset \Delta$ – замкнутое множество, положим $l_R = \{z \in \Delta \,:\, |f(z)| = R\}$, $h_{\alpha,\beta}(r) = r^\alpha |\log r|^\beta$, $0 < \alpha < 1$, $0 < \beta < 1$. Через $\Lambda_{\alpha,\beta}(\cdot)$, $\Lambda_{\alpha+1,\beta}(\cdot)$ обозначим меры Хаусдорфа по отношению к функциям $h_{\alpha,\beta}$, $h_{\alpha+1,\beta}$. Предположим, что $\Lambda_{\alpha+1,\beta}(E) < \infty$.

Определим также

(1) $l_{R,\varepsilon} = \{z \in l_R \,:\, \operatorname{dist}(z, \partial\Delta) \geqslant \varepsilon,\ |z| \leqslant \frac{1}{\varepsilon}\}$,

(2) $T_{R,\varepsilon} = f(l_{R,\varepsilon} \cap E)$,

(3) $G_\varepsilon(R) = \begin{cases} 0, & \text{если } \Lambda_{\alpha,\beta}(T_{R,\varepsilon}) = 0 \text{ или } \Lambda_{\alpha,\beta}(T_{R,\varepsilon}) = \infty \\ \frac{\Lambda_{\alpha,\beta}^{\frac{1+\alpha}{\alpha}}(E \cap l_{R,\varepsilon})}{\Lambda_{\alpha,\beta}(T_{R,\varepsilon})}, & \text{если } 0 < \Lambda_{\alpha,\beta}(T_{R,\varepsilon}) < \infty. \end{cases}$

Определим верхний интеграл Лебега $\int\limits_0^{\infty}{}^{*} g \,\mathrm{d}m$ для функции $g(x) \geqslant 0$ следующим образом: пусть $U(y) = \{x > 0 \ :\ g(x) > y,\}$ $H(y) = m^* U(y)$. Тогда положим $\int\limits_0^{\infty}{}^{*} g \,\mathrm{d}m \overset{\text{def}}{=} \int\limits_0^{\infty} H(y)\,\mathrm{d}y$.

Мы доказываем следующий результат.

Теорема. *Для почти всех R по 1-мере Лебега выполнено условие $\Lambda_{\alpha,\beta}(T_{R,\varepsilon}) < \infty$ и справедливо соотношение*

$$\int\limits_0^{\infty} \varliminf_{\varepsilon \to 0} G_\varepsilon(R)\,\mathrm{d}R \leqslant 2\Lambda_{\alpha+1,\beta}(E).$$

Библ. – 3 назв.

УДК 517.547

Приближение полиномами от двояко-периодических функций Вейерштрасса в L^P метрике на дизъюнктных отрезках. Шагай М. А., Широков Н. А. — В кн.: Исследования по линейным операторам и теории функций. 51. (Зап. научн. семин. ПОМИ, т. 527), СПб., 2023, с. 242–255.

Пусть s_k, $1 \leqslant k \leqslant m$, $m \geqslant 2$, – попарно дизъюнктные отрезки, лежащие в параллелограмме Q. Обозначим через $\wp(z)$ двоякопериодическую функцию Вейерштрасса с фундаментальным параллелограммом Q. Пусть f_k – функции, заданные на s_k, такие, что $f_k' \in L^{p_k}(s_k)$, $1 < p_k < \infty$, $1 \leqslant k \leqslant m$. Обозначим через $G(z)$ функцию Грина области $\mathbb{C} \setminus \bigcup\limits_{k=1}^{m} s_k$ с полюсом в бесконечности и положим

$$L_h \stackrel{\text{def}}{=} \{\zeta : \zeta \in \mathbb{C} \setminus \bigcup_{k=1}^{m} s_k,\ G(\zeta) = \log(1+h)\},\ \ h > 0;\ \ \rho_h(\zeta) \stackrel{\text{def}}{=} \operatorname{dist}(\zeta, L_h).$$

Мы доказываем следующее утверждение.

Теорема. *Существуют полиномы* $P_n(u,v)$, $\deg P_n \leqslant n, n = 1, 2, \ldots,$ *такие, что*

$$\sum_{k=1}^{m} \int_{s_k} \left| \frac{f_k(\zeta) - P_n(\wp(\zeta), \wp'(\zeta))}{\rho_{\frac{1}{n}}(\zeta)} \right|^{p_k} |d\zeta| \leqslant c.$$

Библ. – 6 назв.