Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 527, 2023 г.

М. А. Шагай, Н. А. Широков

ПРИБЛИЖЕНИЕ ПОЛИНОМАМИ ОТ ДВОЯКО-ПЕРИОДИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ ВЕЙЕРШТРАССА В L^P МЕТРИКЕ НА ДИЗЪЮНКТНЫХ ОТРЕЗКАХ

§1. Определения и формулировки

Полиномиальные приближения гладких функций на отрезке в L^P метрике, позволяющие далее привести конструктивное описание соответствующих функциональных классов, были получены В. П. Моторным в 1971 году [1]. В работе второго автора и Ю. В. Крашенинниковой в 2000 году [2] были найдены полиномиальные приближения в L^P метрике функций, заданных на нескольких дизъюнктных отрезках. Вопрос о приближении одной последовательностью полиномов функций, определённых на несвязных множествах, привлекает внимание математиков долгое время. Он представляет интерес и в многомерной постановке. В частности, естественно спросить, каким может быть полиномиальное приближение в метрике L^P функций, определённых на нескольких дизъюнктных кривых, лежащих на эллиптической кривой в $\mathbb{C}^2$. Задача о полиномиальном приближении функций, определённых на дизъюнктных кривых, лежащих на эллиптической кривой в $\mathbb{C}^2$, сводится к задаче о приближении функций, заданных на дизъюнктных кривых, лежащих в фундаментальном параллелограмме некоторой двояко-периодической функции Вейерштрасса, с помощью полиномов от этой функции и её производной. Настоящая работа посвящена приближению в L^P метрике функций, определённых на нескольких дизъюнктных отрезках, с помощью таких полиномов. Отметим, что в обозначении L^P мы имеем дело с вектором показателей $P = (p_1, \dots, p_m)$, используемых на разных отрезках.

Пусть Q – параллелограмм на комплексной плоскости $\mathbb{C}$ с вершинами $0, 2\omega_1, 2\omega_2, 2\omega_3 = 2(\omega_1 + \omega_2)$; $\operatorname{Im} \frac{\omega_2}{\omega_1} > 0$; $\wp$ – классическая функция

Ключевые слова: двояко-периодическая функция Вейерштрасса, аппроксимация, полиномы.

Исследования второго автора выполнены за счет гранта Российского научного фонда No. 23-11-00171, `https://rscf.ru/project/23-11-00171/`.

Вейерштрасса с периодами $2\omega_1, 2\omega_2$ [3, гл. 1]; $\overset{o}{Q}$ – внутренность параллелограмма Q; $s_k = [a_k, b_k]$, $k = 1, \ldots, m$, – отрезки в $\mathbb{C}$; $s_k \cap s_l = \varnothing$ при $k \neq l$; $s_k \subset \overset{o}{Q}$; $E = \bigcup_{k=1}^{m} s_k$. Полагаем $m \geqslant 2$. Обозначим через θ_k величину $\theta_k = \arg(b_k - a_k)$, $-\pi \leqslant \theta_k \leqslant \pi$. Для функции f_k, заданной на отрезке s_k, положим

$$f'_k(\zeta) \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{\delta \to 0} \frac{f_k(\zeta + \delta e^{i\theta_k}) - f_k(\zeta)}{\delta e^{i\theta_k}}, \quad \zeta \in (a_k, b_k).$$

Пусть $f : E \to \mathbb{C}$, $f|_{s_k} = f_k$, $1 < f_k < \infty$, $1 \leqslant k \leqslant m$. Предпологаем, что

$$f'_k \in L^{p_k}(s_k), \quad k = 1, \ldots, m, \tag{1}$$

где L^{p_k} норма определяется на мере Лебега на s_k.

Пусть $G(\zeta)$ – функция Грина области $\mathbb{C} \backslash E$ с полюсом в бесконечности,

$$L_h = \{\zeta : \zeta \in \mathbb{C} \backslash E, G(\zeta) = \log(1 + h)\}, \quad h > 0,$$

$$\rho_h(\zeta) \stackrel{\text{def}}{=} \operatorname{dist}(\zeta, L_h). \tag{2}$$

Основным результатом настоящей статьи является следующая теорема.

Теорема. *Пусть функция $f : E \to \mathbb{C}$ удовлетворяет условию* (1), *функция $\rho_h(\zeta)$ определена в* (2). *Тогда существуют число c, не зависящее от n, и последовательность полиномов $P_n(u, v)$, $\deg P_n \leqslant n$, таких, что выполняется соотношение*

$$\sum_{k=1}^{m} \int_{s_k} \left| \frac{f_k(\zeta) - P_n(\wp(\zeta), \wp'(\zeta))}{\rho_{\frac{1}{n}}(\zeta)} \right|^{p_k} |d\zeta| \leqslant c. \tag{3}$$

Введём ещё ряд обозначений, требующихся для доказательства теоремы. Пусть $\Pi_{k,j}$, $k = 1, \ldots, m$, $j = 1, 2, 3$, – замкнутые прямоугольники, пара сторон в $\Pi_{k,j}$ параллельны отрезку s_k, $s_k \subset \overset{o}{\Pi}_{k,1}$, $\Pi_{k,j} \subset \overset{o}{\Pi}_{k,j+1}, k = 1, \ldots, m$, $j = 1, 2$, при этом выполняется условие $\Pi_{k,3} \cap \Pi_{l,3} = \varnothing$, $k \neq l$.

Обозначим через z'_k, z''_k точки пересечения границы $\partial \Pi_{k,3}$ и прямой l_k, на которой лежит отрезок s_k. Считаем также, что $\Pi_{k,3} \subset \overset{o}{Q}, k = 1, \ldots, m$, и пусть число $0 < t_0 < 1$ таково, что $\Pi_{k,3} \subset Q_{t_0} \stackrel{\text{def}}{=} \omega_1 + \omega_2 + t_0(Q - \omega_1 - \omega_2)$.

Обозначим через Λ C^2-гладкую кривую, $\Lambda \subset Q_t$, начинающуюся в z_1', на которой в порядке её обхода лежат точки $a_1, b_1, z_1'', \dots, z_k', a_k, b_k, z_k'', z_{k+1}', \dots, b_m, z_m''$, при этом $\Lambda \cap \Pi_{k,3} = [z_k', z_k'']$, $k = 1, \dots, m$, z_m'' – конец кривой Λ. Положим $s_k' = [\frac{7}{8}a_k + \frac{1}{8}b_k, \frac{5}{8}a_k + \frac{3}{8}b_k], s_k'' = [\frac{3}{8}a_k + \frac{5}{8}b_k, \frac{1}{8}a_k + \frac{7}{8}b_k]$, и пусть $z_k^{o\prime} \in s_k', z_k^{o\prime\prime} \in s_k''$.

Выберем $\delta_k > 0$ так, чтобы при $z \in [a_k, b_k]$ выполнялось включение $z + i\delta_k e^{i\theta_k} \in \partial\,\Pi_{k,2}$, положим $\nu_k(z) = [z, z + i\delta_k e^{i\theta_k}]$.

Через $d_k'(z_k^{o\prime}), d_k''(z_k^{o\prime\prime})$ обозначим C^2-гладкие кривые со следующими свойствами.

(1) $d_k'(z_k^{o\prime}), d_k''(z_k^{o\prime\prime}) \subset \Pi_{k,3}, d_k'(z_k^{o\prime}) \cap d_k''(z_k^{o\prime\prime}) = \varnothing$.

(2) Вторые производные функций, задающих кривые $d_k'(z_k^{o\prime})$, $d_k''(z_k^{o\prime\prime})$ как отображения $[0,1]$ в $\mathbb{C}$, ограничены постоянной, не зависящей от $z_k^{o\prime}, z_k^{o\prime\prime}$ и k; дифференциалы отображений с этими координатными функциями отделены от нуля величиной $\delta_0 > 0$, также не зависящей от $z_k^{o\prime}, z_k^{o\prime\prime}$ и k.

(3) Справедливы включения $\nu_k(z_k^{o\prime}) \subset d_k'(z_k^{o\prime})$, $\nu_k(z_k^{o\prime\prime}) \subset d_k''(z_k^{o\prime\prime})$, $\nu_k(z_k') \subset d_k'(z_k^{o\prime})$, $\nu_k(z_k'') \subset d_k''(z_k^{o\prime\prime})$, $d_k'(z_k^{o\prime}) \backslash \nu_k(z_k^{o\prime}) \subset \Pi_{k,3} \backslash \Pi_{k,2}$, $d_k''(z_k^{o\prime\prime}) \backslash \nu_k(z_k^{o\prime\prime}) \subset \Pi_{k,3} \backslash \Pi_{k,2}$.

Обозначим через $M(z_1^{o\prime}, z_1^{o\prime\prime}, \dots, z_m^{o\,\prime}, z_m^{o\,\prime\prime})$ следующий континуум:

$$M\left(z_1^{o\prime}, z_1^{o\prime\prime}, \dots, z_m^{o\,\prime}, z_m^{o\,\prime\prime}\right) = \left(\Lambda \backslash \left(\bigcup_{k=1}^{m} [z_k', a_k] \cup \bigcup_{k=1}^{m} [b_k, z_k'']\right)\right) \cup \bigcup_{k=1}^{m} d_k'\left(z_k^{o\prime}\right) \cup \bigcup_{k=1}^{m} d_k''\left(z_k^{o\prime\prime}\right).$$

§2. Продолжение функции f на параллелограмм Q_{t_0}

Пусть $\widehat{z_k}', \widehat{z_k}''$ – точки пересечения прямой l_k и границы $\partial\,\Pi_{k,1}$, $\check{z}_k{}', \check{z}_k{}''$ – точки пересечения прямой l_k и границы $\partial\,\Pi_{k,2}$, при этом $\widehat{z_k}', \check{z}_k{}' \in [a_k, z_k'], \widehat{z_k}'', \check{z}_k{}'' \in [b_k, z_k'']$. Положим $f_0(z) \equiv f_k(a_k)$ при $z \in [a_k, \widehat{z_k}'], f_0(\check{z}_k{}') = 0$, на отрезке $[\widehat{z_k}', \check{z}_k{}']$ функция f_0 линейна; $f_0(z) \equiv f_k(b_k)$ при $z \in [b_k, \widehat{z_k}''], f_0(\check{z}_k{}'') = 0$, на отрезке $[\widehat{z_k}'', \check{z}_k{}'']$ функция f_0 линейна. Обозначим через $t_k(z)$ прямую, проходящую через точку $z \in l_k$ и перпендикулярную прямой l_k. Для $\zeta \in t_k(z) \cap \Pi_{k,1}$ при $z \in [\widehat{z_k}', \widehat{z_k}'']$ положим $f_0(\zeta) = f_k(z)$. Для $\zeta \in \partial\Pi_{k,2}$ положим $f_0(\zeta) = 0$, для $\zeta \in t_k(z) \cap \Pi_{k,2}, z \in l_k \backslash \Pi_{k,1}$ функция $f_0(\zeta)$ линейна; $f_0(\zeta) = 0$, $\zeta \notin \bigcup_{k=1}^m \Pi_{k,2}$.

Пусть $g_k(\zeta) = e^{-i\theta_k}\zeta + d_k$, где точка d_k выбрана так, что $g_k(s_k) \subset \mathbb{R}$, $g_k^{-1}(w) = e^{i\theta_k}(w - d_k)$. Положим $f^*(w) = f\big(g_k^{-1}(w)\big)$, $f_0^*(w) = f_0\big(g_k^{-1}(w)\big)$,

$s_k^* \overset{\text{def}}{=} g_k(s_k)$, $s_k^* = [a_k^*, b_k^*]$, $a_k^*, b_k^* \in \mathbb{R}$, $\Pi_{k,2}^* \overset{\text{def}}{=} g_k(\Pi_{k,2}) = \{w = x + iy :$ $a_k^* - \check{h}_k \leqslant x \leqslant b_k^* + \check{h}_k, |y| \leqslant \delta_k\}$,

$$\Pi_{k,1}^* \overset{\text{def}}{=} g_k(\Pi_{k,1}) = \bigl\{w = x + iy : a_k^* - \widehat{h_k} \leqslant x \leqslant b_k^* + \widehat{h_k}, |y| \leqslant \widehat{\delta_k}\bigr\},$$

где $0 < \widehat{h_k} < \check{h}_k$, $0 < \widehat{\delta_k} < \delta_k$. Тогда существует постоянная c_1, не зависящая от w, такая, что

a) $\dfrac{\partial f_0^*(w)}{\partial \overline{w}} = \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial f_0^*(x)}{\partial x} = \dfrac{1}{2} f_k^{*\prime}(x), w = x + iy, x \in s_k^*, |y| \leqslant \widehat{\delta_k}$;

b) $\dfrac{\partial f_0^*(w)}{\partial \overline{w}} = 0, w = x + iy, x \in [a_k^* - \widehat{h_k}, a_k^*] \cup [b_k^*, b_k^* + \widehat{h_k}], |y| \leqslant \widehat{\delta_k}$;

c) $\left|\dfrac{\partial f_0^*(w)}{\partial \overline{w}}\right| \leqslant \dfrac{1}{\sqrt{2}} |f_k^{*\prime}(x)| + c_1, w = x + iy, x \in s_k^*, \widehat{\delta_k} \leqslant |y| \leqslant \delta_k$;

d) $\left|\dfrac{\partial f_0^*(w)}{\partial \overline{w}}\right| \leqslant c_1, w$ лежит в $\Pi_{k,2}^*$ и не принадлежит множествам, определённым в (a), (b), (c).

Из соотношений (a)–(d) следует (см. [2]), что существует постоянная c_2, не зависящая от $z^* \in \mathbb{C}$ такая, что выполнено соотношение

$$\int\limits_{\mathbb{C}} \left|\frac{\partial f_0^*(w)}{\partial \overline{w}}\right| \frac{dxdy}{|w - z^*|} \leqslant c_2, \quad z^* \in \mathbb{C}, w = x + iy. \tag{4$'$}$$

Так как при $\zeta \in \Pi_{k,2}$ имеем $\frac{\partial f_0(\zeta)}{\partial \bar{\zeta}} = \frac{\partial f_0^*(w)}{\partial \overline{w}}$ при $w = g_k(\zeta)$, то неравенство (4$'$) даёт соотношение

$$\int\limits_{\mathbb{C}} \frac{|\partial f_0(\zeta)|}{|\partial \bar{\zeta}|} \frac{d\sigma d\tau}{|\zeta - z|} \leqslant c_2, \quad z \in \mathbb{C}, \quad \zeta = \sigma + i\tau. \tag{4}$$

§3. Приближающий полином $P_n\bigl(\wp(z), \wp'(z)\bigr)$

Мы будем использовать следующий результат.

Лемма 1 (см. [4, лемма 5]). *Пусть число t_0 определенно выше. Существуют неотрицательное целое число m_0, зависящее от $\wp(z)$ и t_0, и полином $Q_{m_0}(\omega), \deg Q_{m_0} = m_0$, такие, что функция*

$$s(z) = \wp'(z) Q_{m_0}(\wp(z))$$

будет однолистной в Q_{t_0}.

Обозначим $Z^{0\prime} = (z_1^{0\prime}, \cdots, z_m^{0}{}^{\prime}), Z^{0\prime\prime} = (z_1^{0\prime\prime}, \cdots, z_m^{0}{}^{\prime\prime})$. В соответствии с этим, континуум, определенный в конце §1, обозначим через $M(Z^{0\prime}, Z^{0\prime\prime})$. Пусть $G(Z^{0\prime}, Z^{0\prime\prime}) = s(M(Z^{0\prime}, Z^{0\prime\prime}))$.

Далее, через $\varphi(t, Z^{0\prime}, Z^{0\prime\prime})$ обозначим функцию, конформно отображающую область $\mathbb{C}\backslash G(Z^{0\prime}, Z^{0\prime\prime})$ на $\mathbb{C}\backslash\overline{\mathbb{D}}$ так, чтобы $\varphi(\infty, Z^{0\prime}, Z^{0\prime\prime}) = \infty$, $\varphi'(\infty, Z^{0\prime}, Z^{0\prime\prime}) > 0, \psi(\omega, Z^{0\prime}, Z^{0\prime\prime})$ – обратное отображение к $\varphi(t, Z^{0\prime}, Z^{0\prime\prime})$. Для $t \in \mathbb{C}\backslash G(Z^{0\prime}, Z^{0\prime\prime}), \theta \in [0, 2\pi], R > 1$ положим

$$t_{R,\theta}\left(Z^{0\prime}, Z^{0\prime\prime}\right) = \psi\Big(Re^{-i\theta}\varphi\left(t, Z^{0\prime}, Z^{0\prime\prime}\right), Z^{0\prime}, Z^{0\prime\prime}\Big).$$

Выберем c_n из равенства

$$c_n \int_{-\pi}^{\pi} \left(\frac{\sin n\theta}{\sin\theta}\right)^{34} d\theta = 1. \tag{5}$$

Теперь для $w \in G\left(Z^{0\prime}, Z^{0\prime\prime}\right)$, $t \in \mathbb{C}\backslash G\left(Z^{0\prime}, Z^{0\prime\prime}\right)$ и $n \in \mathbb{N}$ полагаем $R = 1 + \frac{1}{n}$ и

$$K_n\left(w, t, \theta, Z^{0\prime}, Z^{0\prime\prime}\right) = \sum_{\nu=1}^{4} \frac{(t_{R,\theta}(Z^{0\prime}, Z^{0\prime\prime}) - t)^{\nu-1}}{(t_{R,\theta}(Z^{0\prime}, Z^{0\prime\prime}) - w)^{\nu}}, \tag{6}$$

$$\Pi_n\left(w, t, Z^{0\prime}, Z^{0\prime\prime}\right) = c_n \int_{-\pi}^{\pi} \left(\frac{\sin n\theta}{\sin\theta}\right)^{34} K_n(w, t, \theta, Z^{0\prime}, Z^{0\prime\prime})\, d\theta. \tag{7}$$

$$\begin{aligned} &P_n\left(\wp(z), \wp'(z), Z^{0\prime}, Z^{0\prime\prime}\right) \\ &\quad = -\frac{1}{\pi} \int\limits_{Q_{t_0}\backslash M(Z^{0\prime}, Z^{0\prime\prime})} f'_{0\bar{\zeta}}(\zeta)\, s'(\zeta)\, \Pi_n\big(s(z), s(\zeta), Z^{0\prime}, Z^{0\prime\prime}\big)\, d\sigma\, d\tau, \end{aligned} \tag{8}$$

где в (8) $\zeta = \sigma + i\tau$.

Пусть $\alpha, \beta \in s_k$, $\arg(\beta - \alpha) = \arg(b_k - a_k) = \theta_k$, $\sigma = |\beta - \alpha|$, $\widetilde{s}(\omega) = s(e^{i\theta_k}\omega + \alpha)$, $\omega \in [0, \sigma]$. Если бы выполнялось условие $\int_0^\sigma \omega^n \widetilde{s}(\omega) d\omega = 0$ при $n = 0, 1, \ldots$, то это повлекло бы соотношение $\widetilde{s}(\omega) \equiv 0$, $\omega \in [0, \sigma]$, тогда $s(\zeta) \equiv 0$, $\zeta \in [\alpha, \beta]$, что невозможно. Положим

$$d_n \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\int_0^\sigma \omega^n \widetilde{s}(\omega)\, d\omega}{\int_0^\sigma \omega^n\, d\omega}.$$

Тогда не при всех $n \geqslant 0$, $n \in \mathbb{Z}$, будут равенства $d_n = 0$. Предположим, что $d_n = d$, $d \neq 0$, при всех $n \geqslant 0$, $n \in \mathbb{Z}$. Тогда при $|w| > \sigma$ выполняется соотношение

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{w^n} \int_0^\sigma \omega^n \widetilde{s}(\omega)\, d\omega = d \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{w^n} \int_0^\sigma \omega^n\, d\omega,$$

или

$$\int_0^\sigma \frac{w}{w-\omega} \widetilde{s}(\omega)\, d\omega = d \int_0^\sigma \frac{w}{w-\omega}\, d\omega. \qquad (8')$$

Функции в левой и правой части соотношения $(8')$ аналитичны в $\mathbb{C}\backslash[0,\sigma]$, и по формуле Сохоцкого–Племеля получилось бы соотношение $\widetilde{s}(\omega) \equiv d, \omega \in [0,\sigma]$, а тогда и $s(\zeta) \equiv d, \zeta \in [\alpha,\beta]$, что невозможно.

Таким образом, существуют числа $m \neq n$ такие, что $d_m \neq d_n$.

Пусть $A_n = \frac{\sigma^{m+1}}{m+1}, A_m = \frac{\sigma^{n+1}}{n+1}$. Тогда

$$\int_0^\sigma (A_m\omega^m - A_n\omega^n) d\omega = 0,$$

$$\int_0^\sigma (A_m\omega^m - A_n\omega^n)\widetilde{s}(\omega)\, d\omega = d_m A_m A_n - d_n A_m A_n \neq 0.$$

Положим $\widetilde{\mu}(\omega) = \dfrac{A_m\omega^m - A_n\omega^n}{(d_m - d_n)A_m A_n}$, тогда

$$\int_0^\sigma \widetilde{\mu}(\omega)\, d\omega = 0, \qquad \int_0^\sigma \widetilde{\mu}(\omega)\widetilde{s}(\omega)\, d\omega = 1.$$

Пусть $\mu(\zeta)$ задаётся равенством $\mu(e^{i\theta_k}\omega + \alpha) = \widetilde{\mu}(\omega)$, $\zeta = e^{i\theta_k}\omega + \alpha$, $\zeta \in [\alpha,\beta]$.

Поскольку $\int\limits_{[\alpha,\beta]} h(\zeta)|d\zeta| = \int\limits_0^\sigma \widetilde{h}(\omega)\, d\omega$, получаем следующее равенство:

$$\int\limits_{[\alpha,\beta]} \mu(\zeta)|d\zeta| = 0, \qquad \int\limits_{[\alpha,\beta]} \mu(\zeta)s(\zeta)|d\zeta| = 1. \qquad (8'')$$

Таким образом, для любого $k = 1,\ldots,m$ и любого промежутка $[\alpha,\beta] \subset s_k$ можно найти функцию $\mu(\zeta), \zeta \in [\alpha,\beta]$, удовлетворяющую соотношениям ($8''$). Будем применять эту конструкцию для промежутков s'_k, s''_k.

Обозначим через $\mu_{k1}(z'), \mu_{k2}(z'')$, $k = 1, \dots, m$, две функции, μ_{k1} определена при $z' \in s'_k$, μ_{k2} определена при $z'' \in s''_k$, удовлетворяющие следующим условиям:

$$\int\limits_{s'_k} \mu_{k1}\left(z_k^{0\prime}\right)\left|dz_k^{0\prime}\right| = 0, \qquad \int\limits_{s'_k} s\left(z_k^{0\prime}\right)\mu_{k1}\left(z_k^{0\prime}\right)\left|dz_k^{0\prime}\right| = 1, \tag{9}$$

$$\int\limits_{s''_k} \mu_{k2}\left(z_k^{0\prime\prime}\right)\left|dz_k^{0\prime\prime}\right| = 0, \qquad \int\limits_{s''_k} s\left(z_k^{0\prime\prime}\right)\mu_{k1}\left(z_k^{0\prime\prime}\right)\left|dz_k^{0\prime\prime}\right| = 1. \tag{9$'$}$$

Положим $s' = s'_1 \times \dots \times s'_m$, $s'' = s''_1 \times \dots \times s''_m$, $\int\limits_{s'} \cdots \left|dZ^{0\prime}\right|$ означает повторный интеграл $\int\limits_{s'_1} \left|dz_1^{0\prime}\right| \Big(\cdots \int\limits_{s'_m} \cdots \left|dz_m^{0}{}'\right|\Big)$, $\int\limits_{s''} \cdots \left|dZ^{0\prime\prime}\right|$ означает повторный интеграл $\int\limits_{s''_1} \left|dz_1^{0\prime\prime}\right| \Big(\cdots \int\limits_{s''_m} \cdots \left|dz_m^{0}{}''\right|\Big)$. Полагаем

$$\begin{aligned} &P_n(\wp(z), \wp'(z)) \\ &= \int\limits_{s'}\int\limits_{s''} \left(\prod_{k=1}^{m}\Big(s\left(z_k^{0\prime}\right) - s(z)\Big)\mu_{k1}\left(z_k^{0\prime}\right) \times \prod_{k=1}^{m}\Big(s\left(z_k^{0\prime\prime}\right) - s(z)\Big)\mu_{k2}\left(z_k^{0\prime\prime}\right)\right)\cdot \\ &\qquad\qquad \cdot P_n\left(\wp(z), \wp'(z), Z^{0\prime}, Z^{0\prime\prime}\right)|dZ^{0\prime}||dZ^{0\prime\prime}| \end{aligned} \tag{10}$$

§4. Оценка приближения $f(z) - P_n\big(\wp(z), \wp'(z), Z^{0\prime}, Z^{0\prime\prime}\big)$

Найти понадобится ещё ряд величин. Обозначим через $\Phi\left(t, Z^{0\prime}, Z^{0\prime\prime}\right)$ функцию, конформно отображающую $\mathbb{C}\backslash M\left(Z^{0\prime}, Z^{0\prime\prime}\right)$ на $\mathbb{C}\backslash\overline{\mathbb{D}}$ так, что $\Phi\left(\infty, Z^{0\prime}, Z^{0\prime\prime}\right) = \infty$, $\Phi'\left(\infty, Z^{0\prime}, Z^{0\prime\prime}\right) > 0, \Psi(\omega, Z^{0\prime}, Z^{0\prime\prime})$ – обратное отображение. Положим

$$L_h\left(Z^{0\prime}, Z^{0\prime\prime}\right) = \Psi\left((1+h)\partial\mathbb{D}, Z^{0\prime}, Z^{0\prime\prime}\right), \tag{10$'$}$$

$$l_h\left(Z^{0\prime}, Z^{0\prime\prime}\right) = \psi\left((1+h)\partial\mathbb{D}, Z^{0\prime}, Z^{0\prime\prime}\right), \tag{10$''$}$$

где в ($10''$) функция ψ определена в п. 3, и пусть

$$\rho_h\left(z, Z^{0\prime}, Z^{0\prime\prime}\right) = \operatorname{dist}\big(z, L_h\left(Z^{0\prime}, Z^{0\prime\prime}\right)\big), \tag{11}$$

$$\widetilde{\rho}_h(z, Z^{0\prime}, Z^{0\prime\prime}) = \operatorname{dist}\big(z, l_h\left(Z^{0\prime}, Z^{0\prime\prime}\right)\big). \tag{11$''$}$$

Справедливо следующее свойство, см. [4]: при $z \in \Pi_{k3}, 0 < h \leqslant 1$

$$\widetilde{\rho}_h(s(z), Z^{0\prime}, Z^{0\prime\prime}) \asymp \rho_h(z, Z^{0\prime}, Z^{0\prime\prime}), \tag{12}$$

где постоянные в знаке $\asymp$ в (12) не зависят от $Z^{0\prime}, Z^{0\prime\prime}$. Имеются соотношения для функций $\rho_h(z, Z^{0\prime}, Z^{0\prime\prime})$, получаемые аналогично соответствующему месту в [2]:

$\rho_h(z, Z^{0\prime}, Z^{0\prime\prime}) \asymp h(|z - a_k|^{\frac{1}{2}} + h)$ при $z \in [a_k, \frac{1}{2}(a_k + z_k^{0\prime})]$,
$\rho_h(z, Z^{0\prime}, Z^{0\prime\prime}) \asymp \frac{h}{|z - z_k^{0\prime}| + \sqrt{h}}$ при $z \in [\frac{1}{2}(a_k + z_k^{0\prime}), \frac{1}{2}(z_k^{0\prime} + z^{0\prime\prime}_k)]$,
$\rho_h(z, Z^{0\prime}, Z^{0\prime\prime}) \asymp \frac{h}{|z - z_k^{0\prime\prime}| + \sqrt{h}}$ при $z \in [\frac{1}{2}(z_k^{0\prime} + z_k^{0\prime\prime}), \frac{1}{2}(b_k + z^{0\prime\prime}_k)]$,
$\rho_h(z, Z^{0\prime}, Z^{0\prime\prime}) \asymp h(|z - b_k|^{\frac{1}{2}} + h)$ при $z \in [\frac{1}{2}(b_k + z_k^{0\prime\prime}), b_k]$.

Кроме того, при $z \in [a_k, b_k], 0 < h \leqslant 1$, в [2] установлено, что

$$\begin{aligned} \rho_h(z) \asymp h\big(|(z - a_k)(z - b_k)|^{\frac{1}{2}} + h\big),\ \rho_h\left(z, Z^{0\prime}, Z^{0\prime\prime}\right) \\ \leqslant c\frac{\rho_h(z)}{|z - z_k^{0\prime}| \cdot |z - z_k^{0\prime\prime}|}. \end{aligned} \tag{13$'$}$$

Далее, в [2] было построено покрытие промежутков s_k отрезками $I_{k\nu}$, $1 \leqslant \nu \leqslant N_k$, такими, что $s_k = \bigcup_{\nu=1}^{N_k} I_{k\nu}$, пересечение $I_{k\nu} \cap I_{k\nu'}$ либо пусто, либо состоит из одной точки, и при $z \in I_{k\nu}$ справедливо соотношение

$$\rho_h\left(z, Z^{0\prime}, Z^{0\prime\prime}\right) \asymp |I_{k\nu}|. \tag{13}$$

Для промежутка I, лежащего на прямой l, через $2I$ обозначаем промежуток с тем же центром, что I, и удвоенной длины, $2I \subset l$. Через $\square_I$ обозначаем квадрат с центром в центре промежутка I со стороной $|I|$, пара сторон которого параллельна l.

Определим функции $u_k(z)$ и $v_k(z)$, $z \in s_k$, следующим образом. Пусть $F_k(w) = f_k'\big(g_k^{-1}(w)\big)$, $w \in \mathbb{R}$, тогда

$$v_k(z) \stackrel{\text{def}}{=} MF_k(g_k(z)), \quad MF_k(w) \stackrel{\text{def}}{=} \sup_{w \in I} \frac{1}{|I|} \int\limits_I |F_k(\lambda)|\, d\lambda, \tag{14}$$

$$u_k(z) \stackrel{\text{def}}{=} HF_k(g_k(z)), \quad HF_k(w) \stackrel{\text{def}}{=} \sup_{w \in I,\, |t|>0} \left| \int\limits_{2I} \frac{F_k(\lambda)}{w - (\lambda + it)}\, d\lambda \right|. \tag{15}$$

При определении функций v_k и u_k полагаем $f(z) = 0$ при $z \in l_k \setminus \Pi_{k,3}$.

Пусть $z \in I_{k\nu}$, для краткости положим $I = I_{k\nu}$. Для $f(z)$ справедлива формула (см. [4]):

$$f(z) = -\frac{1}{\pi}\int\limits_{Q_{t_0}} f'_{0\bar\zeta}(\zeta)\frac{s'(\zeta)}{s(\zeta)-s(z)}d\sigma d\tau, \quad \zeta = \sigma + i\tau,$$

поэтому равенства (6)–(8) влекут

$$\begin{aligned}
&f(z) - P_n\big(\wp(z), \wp'(z), Z^{0\prime}, Z^{0\prime\prime}\big)\\
&\quad= -\frac{1}{\pi}\int\limits_{Q_{t_0}} f'_{0\bar\zeta}(\zeta)\frac{s'(\zeta)}{s(\zeta)-s(z)}\,d\sigma\,d\tau\\
&\qquad+\frac{1}{\pi}\int\limits_{Q_{t_0}\setminus M(Z^{0\prime},Z^{0\prime\prime})} f'_{0\bar\zeta}(\zeta)\,s'(\zeta)\,\Pi_n\Big(s(z), s(\zeta), Z^{0\prime}, Z^{0\prime\prime}\Big)\,d\sigma\,d\tau\\
&= c_n\int\limits_{-\pi}^{\pi}\left(\frac{\sin n\theta}{\sin\theta}\right)^{34}\Bigg(-\frac{1}{\pi}\int\limits_{Q_{t_0}} f'_{0\bar\zeta}(\zeta)\bigg(\frac{s'(\zeta)}{s(\zeta)-s(z)}\\
&\qquad - s'(\zeta)K_n\Big(s(z), s(\zeta), \theta, Z^{0\prime}, Z^{0\prime\prime}\Big)\bigg)d\sigma\,d\tau\Bigg)d\theta\\
&\quad= c_n\int\limits_{-\pi}^{\pi}\left(\frac{\sin n\theta}{\sin\theta}\right)^{34}\left(-\frac{1}{\pi}\int\limits_{\square_{2I}} f'_{0\bar\zeta}(\zeta)\frac{s'(\zeta)}{s(\zeta)-s(z)}d\sigma\,d\tau\right)d\theta\\
&\quad+ c_n\int\limits_{-\pi}^{\pi}\left(\frac{\sin n\theta}{\sin\theta}\right)^{34}\left(\frac{1}{\pi}\int\limits_{\square_{2I}} f'_{0\bar\zeta}(\zeta)K_n\Big(s(z), s(\zeta), \theta, Z^{0\prime}, Z^{0\prime\prime}\Big)\cdot s'(\zeta)d\sigma d\tau\right)d\theta\\
&+ c_n\int\limits_{-\pi}^{\pi}\left(\frac{\sin n\theta}{\sin\theta}\right)^{34}\Bigg(-\frac{1}{\pi}\int\limits_{Q_{t_0}\setminus\square_{2I}} f'_{0\bar\zeta}(\zeta)s'(\zeta)\bigg(\frac{1}{s(\zeta)-s(z)}\\
&\qquad - K_n\Big(s(z), s(\zeta), \theta, Z^{0\prime}, Z^{0\prime\prime}\Big)\bigg)d\sigma\,d\tau\Bigg)d\theta\\
&\quad\stackrel{\text{def}}{=} A_n\left(z, Z^{0\prime}, Z^{0\prime\prime}\right) + B_n\left(z, Z^{0\prime}, Z^{0\prime\prime}\right) + C_n\left(z, Z^{0\prime}, Z^{0\prime\prime}\right).
\end{aligned}\tag{16}$$

4.1. Оценка величины $A_n\left(z, Z^{0\prime}, Z^{0\prime\prime}\right)$. Учитывая соотношение (5), получаем соотношение

$$A_n\left(z,Z^{0\prime},Z^{0\prime\prime}\right)=-\frac{1}{\pi}\int\limits_{\square_{2I}} f'_{0\bar\zeta}(\zeta)\frac{s'(\zeta)}{s(\zeta)-s(z)}d\sigma d\tau$$
$$=-\frac{1}{\pi}\int\limits_{\square_{2I}} f'_{0\bar\zeta}(\zeta)\frac{d\sigma d\tau}{\zeta-z}+\frac{1}{\pi}\int\limits_{\square_{2I}} f'_{0\bar\zeta}(\zeta)\left(\frac{1}{\zeta-z}-\frac{s'(\zeta)}{s(\zeta)-s(z)}\right)d\sigma d\tau$$
$$\stackrel{\text{def}}{=} A_{n1}(z,Z^{0\prime},Z^{0\prime\prime})+A_{n2}(z,Z^{0\prime},Z^{0\prime\prime}). \quad (17)$$

Слагаемое $A_{n1}(z,Z^{0\prime},Z^{0\prime\prime})$ оценивалось в [2], получается оценка
$$\left|A_{n1}\left(z,Z^{0\prime},Z^{0\prime\prime}\right)\right|\leqslant c\cdot|I|u_k(z). \quad (18)$$

Далее,
$$\frac{1}{\zeta-z}-\frac{s'(\zeta)}{s(\zeta)-s(z)}=\frac{s(\zeta)-s(z)-s'(\zeta)(\zeta-z)}{(\zeta-z)\big(s(\zeta)-s(z)\big)}=O(1),$$
поэтому, учитывая оценки в [2], получим
$$\left|A_{n2}\left(z,Z^{0\prime},Z^{0\prime\prime}\right)\right|\leqslant c\int\limits_{\square_{2I}}|f'_{0\bar\zeta}(\zeta)|d\sigma d\tau\leqslant c\cdot|I|^2v_k(z). \quad (19)$$

4.2. Оценка величины $B_n\left(z,Z^{0\prime},Z^{0\prime\prime}\right)$**.** Оценки в [2] дают соотношение
$$\left|B_n\left(z,Z^{0\prime},Z^{0\prime\prime}\right)\right|\leqslant c\int\limits_{\square_{2I}}\frac{1}{\widetilde{\rho}_{\frac{1}{n}}\left(s(z),Z^{0\prime},Z^{0\prime\prime}\right)}|s'(\zeta)|\,d\sigma\,d\tau\stackrel{\text{def}}{=}c\,\beta_n(z). \quad (20)$$

Учитывая формулу (12), оценку $|s'(\zeta)|\leqslant c$, $\zeta\in Q_{t_0}$, и оценки в [2], имеем
$$\beta_n(z)\leqslant c\int\limits_{\square_{2I}}\frac{d\sigma\,d\tau}{\rho_{\frac{1}{n}}\left(s(z),Z^{0\prime},Z^{0\prime\prime}\right)}\leqslant c|I|v_k(z). \quad (20')$$

Таким образом, формулы (20) и (20′) влекут
$$|B_n(z,Z^{0\prime},Z^{0\prime\prime})|\leqslant c|I|v_k(z). \quad (21)$$

4.3. Оценка величины $C_n\left(z,Z^{0\prime},Z^{0\prime\prime}\right)$**.** Применяя оценки из [2], находим, что выполнено соотношение
$$\left|C_n\left(z,Z^{0\prime},Z^{0\prime\prime}\right)\right|\leqslant c\int\limits_{Q_{t_0}\setminus\square_{2I}}\left|f'_{0\bar\zeta}(\zeta)\right|\frac{\widetilde{\rho}^{4}_{\frac{1}{n}}\left(s(z)\right)}{|s(\zeta)-s(z)|^5}d\sigma\,d\tau. \quad (22)$$

Учитывая формулы (12), (22), соотношение $|s(\zeta) - s(z)| \asymp |\zeta - z|$ и оценки в [2], находим, что

$$|C_n(z, Z^{0\prime}, Z^{0\prime\prime})| \leqslant c\left(|I| v_k(z) + \frac{1}{n^2}\right). \qquad (23)$$

Принимая во внимание формулы (17)–(19), (21), (23), окончательно получаем оценку

$$\left|f(z) - P_n\left(\wp(z), \wp'(z), Z^{0\prime}, Z^{0\prime\prime}\right)\right| \\ \leqslant c|I_{k\nu}|\left(u_k(z) + v_k(z)(1 + |I_{k\nu}|)\right) + \frac{1}{n^2}. \qquad (24)$$

где в (24) $z \in I_{k\nu} \subset s_k$.

§5. Оценка приближения $f(z) - P_n(\wp(z), \wp'(z))$

Принимая во внимание соотношения (9) и (9′), получаем равенство

$$\int\limits_{s'}\int\limits_{s''} \prod_{k=1}^{m}(s(z_k^{0\prime}) - s(z))\mu_{k1}(z_k^{0\prime}) \cdot \prod_{k=1}^{m}(s(z_k^{0\prime}) - s(z))\mu_{k2}(z_k^{0\prime\prime})|dZ^{0\prime}||dZ^{0\prime\prime}| = 1,$$

поэтому формула (10) влечёт равенство

$$f(z) - P_n(\wp(z), \wp'(z)) = \int\limits_{s'}\int\limits_{s''} \prod_{j=1}^{m}(s(z_j^{0\prime\prime}) - s(z))\mu_{j1}(z_j^{0\prime}) \\ \times \prod_{j=1}^{m}(s(z_j^{0\prime\prime}) - s(z))\mu_{j2}(z_k^{0\prime\prime})(f(z) - P_n(\wp(z), \wp'(z), Z^{0\prime}, Z^{0\prime\prime})|dZ^{0\prime}||dZ^{0\prime\prime}|. \qquad (25)$$

Учитывая оценку (13) и неравенство (24), находим, что

$$\int\limits_{s_k}\left|\frac{f(z) - P_n(\wp(z), \wp'(z), Z^{0\prime}, Z^{0\prime\prime})}{\rho_{\frac{1}{n}}(z, Z^{0\prime}, Z^{0\prime\prime})}\right|^{p_k}|dz| \\ = \sum_{\nu=1}^{N_{kn}}\int\limits_{I_{k\nu}}\left|\frac{f(z) - P_n(\wp(z), \wp'(z), Z^{0\prime}, Z^{0\prime\prime})}{\rho_{\frac{1}{n}}(z, Z^{0\prime}, Z^{0\prime\prime})}\right|^{p_k}|dz| \\ \asymp \sum_{\nu=1}^{N_{kn}}\frac{1}{|I_{k\nu}|^{p_k}}\int\limits_{I_{k\nu}}|f(z) - P_n(\wp(z), \wp'(z), Z^{0\prime}, Z^{0\prime\prime})|^{p_k}|dz|$$

$$\leqslant c\sum_{\nu=1}^{N_{kn}}\frac{1}{|I_{k\nu}|^{p_k}}\int\limits_{I_{k\nu}}\Bigl(|I_{k\nu}|(u_k(z)+v_k(z)(1+|I_{k\nu}|))+\frac{1}{n^2}\Bigr)^{p_k}|dz|$$

$$\asymp\sum_{\nu=1}^{N_{kn}}\Bigl(\int\limits_{I_{k\nu}}u_k^{p_k}(z)|dz|+\int\limits_{I_{k\nu}}v_k^{p_k}(z)|dz|\Bigr)+\sum_{\nu=1}^{N_{kn}}\frac{1}{|I_{k\nu}|^{p_k-1}n^{2p_k}}$$

$$=\int\limits_{s_k}u_k^{p_k}(z)|dz|+\int\limits_{s_k}v_k^{p_k}(z)|dz|+\sum_{\nu=1}^{N_{kn}}\frac{1}{|I_{k\nu}|^{p_k-1}n^{2p_k}}. \quad (26)$$

Поскольку $|I_{k\nu}|\geqslant c\frac{1}{n^2}$ [5], получаем

$$|s_k|=\sum_{\nu=1}^{N_{kn}}|I_{k\nu}|\geqslant cN_{kn}\cdot\frac{1}{n^2},\quad N_{kn}\leqslant cn^2,\quad \sum_{\nu=1}^{N_{kn}}\frac{1}{|I_{k\nu}|^{p_k-1}n^{2p_k}}\leqslant c. \quad (27)$$

Оценки функций HF_k и MF_k из [6] и определения (14) и (15) показывают, что

$$\int\limits_{s_k}u_k^{p_k}(z)|dz|\leqslant c\int\limits_{s_k}|f_k'(z)|^{p_k}|dz|\leqslant c, \quad (28)$$

$$\int\limits_{s_k}v_k^{p_k}(z)|dz|\leqslant c\int\limits_{s_k}|f_k'(z)|^{p_k}|dz|\leqslant c. \quad (29)$$

Собирая вместе оценки (26)–(29), получаем, что

$$\int\limits_{s_k}\left|\frac{f(z)-P_n(\wp(z),\wp'(z),Z^{0\prime},Z^{0\prime\prime})}{\rho_{\frac{1}{n}}(z,Z^{0\prime},Z^{0\prime\prime})}\right|^{p_k}|dz|\leqslant c, \quad (30)$$

и постоянная c в (30) не зависит от $Z^{0\prime},Z^{0\prime\prime}$.

Положим

$$\Omega_{kn}^{p_k}\overset{\text{def}}{=}\int\limits_{s_k}\left|\frac{f(z)-P_n(\wp(z),\wp'(z))}{\rho_{\frac{1}{n}}(z)}\right|^{p_k}|dz|,\quad z\in s_k. \quad (31)$$

Пользуясь тем, что $|\mu_{j1}(z)|,|\mu_{j2}(z)|\leqslant c$, $z\in s_j$, $1\leqslant j\leqslant m$, $|s(z_j^{0\prime}-s(z)|$, $|s(z_j^{0\prime\prime})-s(z)|\leqslant c$, $1\leqslant j\leqslant m$, $z\in s_k$, $1\leqslant k\leqslant m$, и справедливы соотношения $(13')$, получаем:

$$\frac{\prod\limits_{j=1}^{m}|s(z_j^{0\prime})-s(z)|\cdot|\mu_{j1}(z_j^{0\prime})|\cdot\prod\limits_{j=1}|s(z_j^{0\prime\prime})-s(z)|\cdot|\mu_{j2}(z_j^{0\prime\prime})|}{\rho_{\frac{1}{n}(z)}} \leqslant \frac{c}{\rho_{\frac{1}{n}}(z,Z^{0\prime},Z^{0\prime\prime})}. \quad (32)$$

Теперь из (25), (31), (32) находим, что при $z\in s_k$ выполнено неравенство

$$\Omega_{kn} \leqslant c\left(\int\limits_{s_k}\left(\int\limits_{s'}\int\limits_{s''}\left|\frac{f(z)-P_n(\wp(z),\wp'(z),Z^{0\prime},Z^{0\prime\prime})}{\rho_{\frac{1}{n}}(z,Z^{0\prime},Z^{0\prime\prime})}\right||dZ^{0\prime}||dZ^{0\prime\prime}|\right)^{p_k}|dz|\right)^{\frac{1}{p_k}}. \quad (33)$$

Применяя неравенство Минковского и (30), получаем оценку

$$\Omega_{kn} \leqslant c\int\limits_{s'}\int\limits_{s''}\left(\int\limits_{s_k}\left|\frac{f(z)-P_n(\wp(z),\wp'(z),Z^{0\prime},Z^{0\prime\prime})}{\rho_{\frac{1}{n}}(z,Z^{0\prime},Z^{0\prime\prime})}\right|^{p_k}|dz|\right)^{\frac{1}{p_k}}|dZ^{0\prime}||dZ^{0\prime\prime}| \leqslant c. \quad (34)$$

Соотношение (34) доказывает теорему.

Список литературы

1. В. П. Моторный, *Приближение функций алгебраическими полиномами в метрике L_p.* — Известия АН СССР, серия матем. **35**, No. 4 (1971), 874–899.
2. Ю. В. Крашенинникова, Н. А Широков, *Аппроксимация полиномами в метрике L_p на дизъюнктных отрезках.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **270** (2000), 175–200.
3. Н. И. Ахиезер, *Элементы теории эллиптических функций*, Москва, 1970
4. А. В. Хаустов, Н. А. Широков, *Полиномиальные приближения на замкнутых подмножествах эллиптических кривых.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **302** (2003), 178–187.
5. В. В. Андриевский, В. И. Белый, *Метрико-геометрические соотношения для конмформных отображений односвязной области на внешность единичного круга.* — Украинский матем. журнал **29**, No. 2 (1977), 147–156.
6. М. Стейн, *Сингулярные интегралы и дифференциальные свойства функции*, Москва, 1973.

Shagay M. A., Shirokov N. A. Polynomial approximation by doubly periodic Weierstrass functions on disjoint segments in the L^P metric.

Let $s_k, 1 \leqslant k \leqslant m, m \geqslant 2$, be disjoint segments lying in a parallelogram Q. We denote by $\wp(z)$ a doubly periodic Weierstrass function with the fundamental parallelogram Q. Let $f_k : s_k \to \mathbb{C}$ be functions, and let $f_k' \in L^{p_k}(s_k), 1 \leqslant k \leqslant m, 1 < p_k < \infty$.

Consider the Green function $G(z)$ of the domain $\mathbb{C} \setminus \bigcup\limits_{k=1}^{m} s_k$ with the pole at infinity and define

$$L_h \stackrel{\text{def}}{=} \{ \zeta : \zeta \in \mathbb{C} \setminus \bigcup_{k=1}^{m} s_k, \, G(\zeta) = \log(1+h)\}, \, h > 0; \rho_h(\zeta) \stackrel{\text{def}}{=} \operatorname{dist}(\zeta, L_h).$$

Theorem. *There exist polynomials* $P_n(u,v), \deg P_n \leqslant n, n = 1, 2, \cdots,$ *such that*

$$\sum_{k=1}^{m} \int_{s_k} \left| \frac{f_k(\zeta) - P_n(\wp(\zeta), \wp'(\zeta))}{\rho_{\frac{1}{n}}(\zeta)} \right|^{p_k} |d\zeta| \leqslant c.$$

Национальный
исследовательский университет
«Высшая школа экономики»
СПб, Кантемировская ул.3,
194100 Санкт-Петербург, Россия
E-mail: shagay.masha@mail.ru

Санкт-Петербургское отделение
Математического института
им. В. А. Стеклова,
СПб, наб. р. Фонтанки 27
191023 Санкт-Петербург, Россия
E-mail: nikolai.shirokov@gmail.com

Поступило 23 сентября 2023 г.