Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 527, 2023 г.

$\boxed{\text{А. А. Флоринский}}$, **К. А. Фофанов, Н. А. Широков**

ТЕОРЕМА ТИПА Л. АЛЬФОРСА ДЛЯ МЕР ХАУСДОРФА

§1. Введение

Данная работа мотивирована теоремой Л. Альфорса [1], называемой в литературе "принципом длины и площади". Принцип состоит в следующем.

Пусть $\Delta \subset \mathbb{C}$ – область, функция f аналитична в Δ, $l_R = \{z \in \Delta : |f(z)| = R\}$ – линия уровня, $E \subset \Delta$, $A(E)$ – плоская мера множества E, $E_R = E \cap l_R$, $|E_R|$ – линейная мера множества E_R, $n_E(w)$ – количество корней уравнения $f(z) = w$, лежащих в E,

$$p_E(R) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} n_E(Re^{i\theta}) d\theta.$$

Тогда справедливо следующее соотношение, см. [1], стр. 27.

Теорема Альфорса.

$$\int\limits_0^{\infty} \frac{|E_R|^2}{Rp_E(R)} dR \leqslant 2\pi A(E). \tag{1}$$

Полагая $T_R = f(E_R)$, заметим, что $2\pi R p_E(R)$ есть линейная мера множества T_R на римановой поверхности $D = f(\Delta)$. С учетом этого формула (1) *примет вид*

$$\int\limits_0^{\infty} \frac{|E_R|^2}{|T_R|} dR \leqslant A(E). \tag{2}$$

Ключевые слова: принцип длины и площади, меры Хаусдорфа, римановы поверхности.

Александр Алексеевич Флоринский скончался в процессе приготовления данной статьи к печати. С нижеследующим текстом он был согласен.

В работе [2] оценка (2) была обобщена на множества $E \subset \Delta$, для которых мера Хаусдорфа $\Lambda_{1+\sigma}(E)$ конечна, $0<\sigma<1$. В формулировке основной теоремы в [2] были допущены опечатки, которые далее, при ее цитировании, будут исправлены.

Сохраним обозначения f, Δ, $D=f(\Delta)$, l_R. Предполагаем, что $E \subset \Delta$ – замкнутое множество, $\Lambda_{1+\sigma}(E)<\infty$, где далее $\Lambda_\sigma(\,\cdot\,)$, $\Lambda_{\sigma+1}(\,\cdot\,)$ – соответствующие меры Хаусдорфа [3], $0<\sigma<1$. Пусть $\varepsilon>0$, $l_{R,\varepsilon}=\{z\in l_R : \operatorname{dist}(z,\partial\Delta)\geqslant\varepsilon,\ |z|\leqslant\frac{1}{\varepsilon}\}$, $T_{R,\varepsilon}=f(l_{R,\varepsilon}\cap E)$, $T_{R,\varepsilon}\subset D$.

§2. Формулировка основного результата

Через $\int\limits_0^{\infty}{}^{*} g(R)dR$ для неотрицательной функции g обозначим верхний интеграл Лебега (его определение и свойства приведены ниже в п. 3). Введем функцию $g_\varepsilon(R)$:

$$g_\varepsilon(R)=\begin{cases}0, & \text{если } \Lambda_\sigma(T_{R,\varepsilon})=0 \text{ или } \Lambda_\sigma(T_{R,\varepsilon})=\infty,\\ \dfrac{\Lambda_\sigma^{\frac{1+\sigma}{\sigma}}(E\cap l_{R,\varepsilon})}{\Lambda_\sigma^{\frac{1}{\sigma}}(T_{R,\varepsilon})}, & \text{если } 0<\Lambda_\sigma(T_{R,\varepsilon})<\infty.\end{cases}$$

В работе [2] доказано следующее утверждение.

Теорема A. *Для любого $\varepsilon>0$ при почти всех R по 1-мере Лебега выполнено соотношение $\Lambda_\sigma(T_{R,\varepsilon})<+\infty$ и имеет место оценка*

$$\int\limits_0^{\infty}{}^{*} \varliminf_{\varepsilon\to+0} g_\varepsilon(R)dR\leqslant 2\Lambda_{1+\sigma}(E). \tag{3}$$

Настоящая работа посвящена обобщению неравенства (3) на новые меры Хаусдорфа.

Пусть $0<\beta\leqslant 1$, $0<\alpha<1$, $h_{\alpha,\beta}(r)=r^\alpha|\ln r|^\beta$, $\Lambda_{\alpha,\beta}(V)$ – мера Хаусдорфа, построенная по функции $h_{\alpha,\beta}(r)$ (см. [3], глава 2), $\Lambda_{\alpha+1,\beta}(V)$ – мера Хаусдорфа, построенная по функции $h_{\alpha+1,\beta}(r)=r^{\alpha+1}|\ln r|^\beta$.

Определим функцию $G_\varepsilon(R)$, аналогичную функции g_ε:

$$G_\varepsilon(R)=\begin{cases}0, & \text{если } \Lambda_{\alpha,\beta}(T_{R,\varepsilon})=0 \text{ или } \Lambda_{\alpha,\beta}(T_{R,\varepsilon})=\infty,\\ \dfrac{\Lambda_{\alpha,\beta}^{\frac{1+\alpha}{\alpha}}(E\cap l_{R,\varepsilon})}{\Lambda_{\alpha,\beta}^{\frac{1}{\alpha}}(T_{R,\varepsilon})}, & \text{если } 0<\Lambda_{\alpha,\beta}(T_{R,\varepsilon})<\infty.\end{cases}$$

Основной результат данной работы состоит в следующем. Пусть $\Lambda_{1+\alpha,\beta}(E)<+\infty$.

Теорема. *Для любого $\varepsilon > 0$ при почти всех R по 1-мере Лебега выполнено соотношение $\Lambda_{\alpha,\beta}(T_{R,\varepsilon}) < +\infty$ и имеет место оценка*

$$\int_0^{\infty *} \varliminf_{\varepsilon\to+0} G_\varepsilon(R)dR \leqslant 2\Lambda_{1+\alpha,\beta}(E). \tag{4}$$

§3. Некоторые свойства верхнего интеграла по σ-конечной мере

.

В процессе доказательства основного результата нам потребуется аналог теоремы Фату для верхнего интеграла по σ-конечной мере. Докажем его.

3.1. Замечания о внешней мере. Пусть $(\mathcal{X}, \mu)$ – пространство с полной σ-конечной мерой; μ^* – порожденная мерой μ внешняя мера. В основе дальнейших рассуждений мы будем пользоваться тем, что для всякого произвольно выбранного множества $E \subset \mathcal{X}$ существует «измеримая оболочка» $\widetilde{E}$, то есть наименьшее по включению (с точностью до множества меры 0) измеримое множество, содержащее E.

Часто используются следующие факты:

(1) $\mu^*\widetilde{E} = \mu\widetilde{E} = \mu^*E$;

(2) Для произвольно построенной последовательности $\{E_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ подмножеств множества $\mathcal{X}$ последовательность $\{\widetilde{E}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ измеримых оболочек ее элементов может быть выбрана так, что переход от E_n к $\widetilde{E}_n$ есть порядковый гомоморфизм, то есть $E_n \subset E_m \implies \widetilde{E}_n \subset \widetilde{E}_m$.

В частности, если $E_n \subset E_{n+1}$ для всех $n \in \mathbb{N}$, то не умаляя общности можно считать, что $\widetilde{E}_n \subset \widetilde{E}_{n+1}$ и

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} \widetilde{E}_n = \widetilde{\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n}.$$

(Чтобы действительно получить порядковый гомоморфизм, следует сначала выбрать оболочки $\widetilde{E}_n$ произвольно, а затем каждое множество $\widetilde{E}_n$ заменить на пересечение всех измеримых оболочек множеств E_m, содержащих E_n.)

Следствие. *Внешняя мера μ^* непрерывна снизу.*

Действительно, если $E_n \subset E_{n+1}$, то

$$\mu^*\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) = \mu^*\left(\widetilde{\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n}\right) = \mu^*\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} \widetilde{E}_n\right) = \mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} \widetilde{E}_n\right)$$
$$= \lim_{n\to\infty} \mu\left(\widetilde{E}_n\right) = \lim_{n\to\infty} \mu^*\left(E_n\right).$$

(3) Здесь и далее через $D(\mu)$ будем обозначать совокупность всех измеримых по мере μ множеств P. Зафиксируем множество $E \subset \mathcal{X}$. На множестве $D(\mu)$ определим отображение ν, ставящее в соответствие множеству $P \in D(\mu)$ число $\nu(P) = \mu^*(P \cap E)$. Заметим, что ν – мера на $D(\mu)$.

Действительно, заметим, что $\widetilde{E} \cap P = \widetilde{E \cap P}$. Очевидно включение $\widetilde{E \cap P} \subset \widetilde{E} \cap P$: $E \cap P \subset \widetilde{E} \cap P \implies \widetilde{E \cap P} \subset \widetilde{\widetilde{E} \cap P} = \widetilde{E} \cap P$.

Предположим, что равенство неверно и существует измеримое множество $E_1 \in D(\mu)$, содержащее $E \cap P$ и “меньшее”, чем $\widetilde{E} \cap P$, по мере: $\mu\left((\widetilde{E} \cap P) \setminus E_1\right) > 0$. В этом случае рассмотрим $E_2 = E_1 \cup (\widetilde{E} \setminus P)$. При том, что $E_2 \supset E$ и $E_2 \in D(\mu)$, имеем

$$\mu(\widetilde{E} \setminus E_2) \geqslant \mu\left((\widetilde{E} \cap P) \setminus E_2\right) \geqslant \mu\left((\widetilde{E} \cap P) \setminus E_1\right) > 0,$$

что противоречит тому, что $\widetilde{E}$ – измеримая оболочка.

Значит, $\nu(P) = \mu(\widetilde{E} \cap P) = \mu(\widetilde{E \cap P})$, откуда видно, что ν – мера.

(4) Пусть $E_i \subset \mathcal{X}$ и $\mu^*\left(\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} E_i\right) < \infty$. Тогда если $\mu^*\left(\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} E_i\right) = \sum\limits_{i=1}^{\infty} \mu^*(E_i)$, то $\mu(\widetilde{E}_i \cap \widetilde{E}_j) = 0$ (то есть при выполнении условия, измеримые оболочки множеств системы почти дизъюнктны). Обратное также верно.

Действительно, если предположить почти дизъюнктность множеств E_i, то, не умаляя общности, $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} \widetilde{E}_i = \widetilde{\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} E_i}$. Тогда, так как $\mu(\widetilde{E}_i) = \mu^*(E_i)$ и $\mu\left(\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} \widetilde{E}_n\right) = \mu^*\left(\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} E_n\right)$, то

$$\sum_{i=1}^{\infty} \mu^*(E_i) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(\widetilde{E}_i) = \mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} \widetilde{E}_i\right) = \mu^*\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i\right).$$

3.2. Внешняя мера в произведении пространств. Пусть меры μ и ν конечны, $A \subset \mathcal{X},\ B \subset \mathcal{Y}$ – произвольные множества. Покажем, что измеримая оболочка произведения множеств A, B совпадает с произведением измеримых оболочек этих множеств. Пусть $E = \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} U_i \times V_i$ – объединение измеримых «прямоугольников», которое, к тому же, удовлетворяет включениям $A \times B \subseteq E \subseteq \widetilde{A} \times \widetilde{B}$, где $\widetilde{A}, \widetilde{B}$ – измеримые оболочки множеств A, B. Тогда $\mathrm{Pr}_{\mathcal{X}}(E) = \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} U_i$, $A \subseteq \mathrm{Pr}_{\mathcal{X}}(E) \subseteq \widetilde{A}$, откуда по определению измеримой оболочки следует, что $\mu(\widetilde{A} \setminus \mathrm{Pr}_{\mathcal{X}}(E)) = 0$.

Мы покажем, что для почти всех $x \in \mathrm{Pr}_{\mathcal{X}}(E)$ выполнено равенство $\nu(\widetilde{B} \setminus E_x) = 0$. Заметим, что при $x \in A$ это очевидно, так как $B \subset E_x \subset \widetilde{B}$ и множество E_x измеримо. Не умаляя общности, "прямоугольники" $U_i \times V_i$ будем считать попарно дизъюнктными.

Для каждого $x \in A$ определим множество $I(x) = \{i \in \mathbb{N} \mid x \in U_i\}$. С учетом этого обозначения, можем переписать $B \subseteq E_x = \bigcup\limits_{i \in I(x)} V_i \subseteq \widetilde{B}$. Выберем $\varepsilon > 0$ и пусть $I_\varepsilon(x)$ – конечное подмножество в $I(x)$, такое, что $\nu\left(\widetilde{B} \setminus \left(\bigcup\limits_{i \in I_\varepsilon(x)} V_i\right)\right) < \varepsilon$.

Пусть $\widetilde{U_\varepsilon}(x) = \bigcap\limits_{i \in I_\varepsilon(x)} U_i$, $\widetilde{V_\varepsilon}(x) = \bigcup\limits_{i \in I_\varepsilon(x)} V_i$. Заметим, что если $i \in I_\varepsilon(x)$, то $x \in U_i$, имеем $x \in \widetilde{U_\varepsilon}(x)$. Стало быть, $\widetilde{A}_\varepsilon = \bigcup\limits_{x \in A} \widetilde{U_\varepsilon}(x) \supset A$. Кроме того, семейство всевозможных множеств $I_\varepsilon(x)$ счетно (как набор конечных подмножеств множества $\mathbb{N}$). Значит, в семействе $\{\widetilde{U_\varepsilon}(x)\}_{x \in A}$ также счетное количество различных элементов. А тогда $\widetilde{A}_\varepsilon$ измеримо. Отметим, что $A \subset \widetilde{A}_\varepsilon \subset \mathrm{Pr}_{\mathcal{X}}(E) \subset \widetilde{A}$. Далее, при всех $x \in A$ справедливы включения $\widetilde{U_\varepsilon}(x) \times \widetilde{V_\varepsilon}(x) \subset \bigcup\limits_{i \in I_\varepsilon(x)} U_i \times V_i \subset E$. Значит, при всех $t \in \widetilde{U_\varepsilon}(x)$ имеем $\widetilde{V_\varepsilon}(x) \subset E_t$, откуда $\nu(\widetilde{B} \setminus E_t) < \varepsilon$.

Соотношение $\nu(\widetilde{B}\setminus E_t) < \varepsilon$ выполнено при всех $t \in \widetilde{U_\varepsilon}(x)$ и при всех $x \in A$, а значит оно выполнено и вообще для всех $t \in \widetilde{A}_\varepsilon = \bigcup\limits_{x\in A} \widetilde{U_\varepsilon}(x)$.

Положив теперь $\varepsilon = \frac{1}{n}$ и $\widetilde{A_0} = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} \widetilde{A}_{\frac{1}{n}}$, получим

$$A \subset \widetilde{A_0} \subset \mathrm{Pr}_{\mathcal{X}}(E) \subset \widetilde{A}; \quad \mu(\widetilde{A} \setminus \widetilde{A_0}) = 0 \ \text{ и } \ \nu(\widetilde{B} \setminus E_t) = 0$$

при всех $t \in \widetilde{A_0}$.

Итак, для почти всех $t \in \mathrm{Pr}_{\mathcal{X}}(E)$ выполнено равенство $\nu(\widetilde{B} \setminus E_t)=0$.

Теперь вычисление меры $(\mu\times\nu)(E)$ сводится к интегрированию постоянной функции:

$$(\mu\times\nu)(E) = \int\limits_{\mathrm{Pr}_{\mathcal{X}}(E)} \nu(E_x)d\mu(x) = \int\limits_{\widetilde{A}} \nu(\widetilde{B})d\mu(x)$$
$$= \mu(\widetilde{A})\cdot\nu(\widetilde{B}) = (\mu\times\nu)(\widetilde{A}\times\widetilde{B}).$$

Таким образом, $\widetilde{A}\times\widetilde{B}$ – измеримая оболочка множества $A\times B$.

Следствие. *$(\mu\times\nu)^*(A\times B) = \mu^*(A)\cdot\nu^*(B)$, где через $(\mu\times\nu)^*, \mu^*, \nu^*$ обозначены внешние меры, соответствующие мерам $\mu\times\nu, \mu, \nu$.*

3.3. Монотонные множества в пространстве $\mathcal{X}\times\mathbb{R}$. Для $E \subset \mathcal{X}\times\mathbb{R}$ через E_a будем обозначать сечение $E_a = \{x \in \mathcal{X} : (x,a) \in E\}$, где $a \in \mathbb{R}$. Будем обозначать через λ меру Лебега. Множество $E \subset (\mathcal{X},\mu)\times(\mathbb{R},\lambda)$ будем называть положительным, если $E_a = \varnothing$ при всех $a < 0$; E будем называть монотонным, если для $a < b$ выполнено включение $E_b \subseteq E_a$.

Утверждение 1. *Пусть E – монотонное положительное множество. Тогда $(\mu\times\lambda)^*(E) = \int\limits_0^\infty \mu^*(E_a)\,da$.*

Доказательство. Положим $\theta(P) = (\mu\times\lambda)^*(E\cap(\mathcal{X}\times P))$, где $P\subset\mathbb{R}$ и P измеримо по Лебегу. Пусть $\widetilde{\theta}(P) = \int\limits_P \mu^*(E_a)\,da$.

Тогда θ и $\widetilde{\theta}$ – меры с областью определения $D(\lambda)$. Пусть $P = [b,c]$. Тогда $E_c \subset E_a \subset E_b$ для всех $a \in P$. Значит, имеет место цепочка включений $E_c \times P \subset E\cap(\mathcal{X}\times P) \subset E_b\times P$.

Отсюда $\theta(P) \leqslant (\mu\times\lambda)^*(E_b\times P)= \mu^*(E_b)\cdot\lambda(P)= \mu^*(E_b)\cdot(c-b) = M_{[b,c]}(c-b)$, где $M_{[b,c]}$ обозначает максимум функции $\mu^*(E_a)$ при $a \in [b,c]$.

Также, для всех $a \in [b,c]$ справедливо неравенство

$$\theta([b,c]) \geqslant m_{[b,c]}(c-b),$$

где $m_{[b,c]} = \min(\mu^*(E_a)) = \mu^*(E_c)$.

Поскольку $\theta[b,c]$ – аддитивная функция промежутка $[b,c]$, удовлетворяющая двум доказанным выше оценкам сверху и снизу, имеем $\theta[0,c] = \int\limits_0^c \mu^*(E_a)\,da$ (по единственности интеграла Римана).

Итак, для всех положительных c справедливо равенство $\theta[0,c] = \widetilde{\theta}[0,c]$. Далее, с учетом счетной аддитивности мер θ и $\widetilde{\theta}$, получаем $\theta[0,\infty) = \widetilde{\theta}[0,\infty)$. Однако, в этом и состоит доказываемое утверждение. □

Утверждение 2. *Пусть E – монотонное положительное множество. Тогда $(\mu\times\lambda)^*(E) = \inf\limits_f \int\limits_{\mathcal{X}} f\,d\mu$, где $f \geqslant 0$ – измеримые функции на $(\mathcal{X},\mu)$, подграфики π_f которых содержат E. (Под "подграфиком" π_f понимается множество $\mathcal{X}\times\{0\}\cup\{(x,y):\ x\in\mathcal{X}, 0<y<f(x)\}$.)*

Доказательство. Так как для произвольной измеримой функции f, подграфик которой содержит E, справедлива оценка $\int\limits_{\mathcal{X}} f\,d\mu = (\mu\times\lambda)(\pi_f) \geqslant (\mu\times\lambda)^*(E)$, осталось доказать противоположное неравенство.

Не умаляя общности, считаем, что $(\mu\times\lambda)^*(E) < \infty$. Разобьем промежуток $[0,\infty)$ на счетное число частей точками $a_0 = 0 < a_1 < \ldots < a_n < \ldots$, где $a_n \to \infty$ так, чтобы "левая риманова сумма" $\sum\limits_{a=0}^{\infty} \mu^*(E_{a_i})(a_{i+1}-a_i)$ отличалась от $\int\limits_0^{\infty} \mu^*(E_a)\,da$ менее, чем на заранее заданное $\varepsilon > 0$. В самом деле, это можно сделать, так как функция $\mu^*(E_a)$ интегрируема по Риману на каждом промежутке $[N-1,N]$, где $N\in\mathbb{N}$ и точки a_i можно выбрать на $[N-1,N]$ так, чтобы соответствующая сумма отличалась от $\int\limits_{N-1}^{N} \mu^*(E_a)\,da$ менее, чем на $\frac{\varepsilon}{2^N}$.

Рассмотрим функцию $f(x) = \sum\limits_{i=0}^{\infty}(a_{i+1}-a_i)\chi_{\widetilde{E_{a_i}}}(x)$, где χ – характеристическая функция и множества $\widetilde{E_{a_i}}$ монотонно убывают ($a < b \implies \widetilde{E_a} \supset \widetilde{E_b}$). Пусть $(x,y)\in E$. Тогда $y \in [a_i, a_{i+1})$ для некоторого индекса $i \in \mathbb{N}\cup\{0\}$ (так как $y \geqslant 0$ и $a_i \underset{i\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$). Значит,

$x \in E_y \subset E_{a_i} \subset E_{a_j}$ для всех $j \leqslant i$. Отсюда, $\chi_{\widetilde{E_{a_j}}}(x) = 1$ при $j \leqslant i$, $f(x) \geqslant \sum\limits_{0 \leqslant j \leqslant i} (a_{j+1} - a_j) = a_{i+1} > y$. Таким образом, $(x, y) \in \pi_f$.

Далее заметим, что функция f измерима и

$$\int\limits_{\mathcal{X}} f \, d\mu = \sum_{i=0}^{\infty} (a_{i+1} - a_i)\mu(\widetilde{E_{a_i}}) = \sum_{i=0}^{\infty} (a_{i+1} - a_i)\mu^*(E_{a_i})$$

$$< \int\limits_{\mathcal{X}} \mu^*(E_a) \, da + \varepsilon = (\mu \times \lambda)^*(E) + \varepsilon.$$

В силу произвольности выбора $\varepsilon > 0$, имеем требуемое неравенство. □

3.4. Верхний интеграл Лебега по пространству с σ-конечной мерой. Пусть $f : (\mathcal{X}, \mu) \to [0, \infty]$, π_f – подграфик функции f. Тогда $E = \pi_f \subset \mathcal{X} \times \mathbb{R}$ – монотонное положительное множество. Положим $\int\limits_{\mathcal{X}}^* f \, d\mu = (\mu \times \lambda)^*(E)$.

Теорема. *Справедливы утверждения:*

(1) $\int\limits_{\mathcal{X}}^* f \, d\mu = \int\limits_0^{\infty *} \mu^*(f > a) \, da = \int\limits_0^{\infty *} \mu^*(f \geqslant a) \, da$;

(2) $\int\limits_{\mathcal{X}}^* f \, d\mu = \inf\limits_{g \geqslant f} \int\limits_{\mathcal{X}} g \, d\mu$ (*инфимум берется по измеримым функциям*);

(3) *если* $0 \leqslant f_1 \leqslant f_2 \leqslant \ldots$ *и* $f(x) = \lim\limits_{n \to \infty} f_n(x)$, *то* $\int\limits_{\mathcal{X}}^* f \, d\mu = \lim\limits_{n \to \infty} \int\limits_{\mathcal{X}}^* f_n \, d\mu$ *(теорема Леви);*

(4) *если* $f_n \geqslant 0$ *– произвольная последовательность функций, то* $\int\limits_{\mathcal{X}}^* \varliminf\limits_{n \to \infty} f_n \, d\mu \leqslant \varliminf\limits_{n \to \infty} \int\limits_{\mathcal{X}}^* f_n \, d\mu$ (*теорема Фату*);

(5) $\int\limits_{\mathcal{X}}^* \sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n \, d\mu \leqslant \sum\limits_{n=1}^{\infty} \int\limits_{\mathcal{X}}^* f_n \, d\mu$ *– счетная* (*и конечная*) *полуаддитивность при любых* $f_n \geqslant 0$.

Доказательство. (1) При $E = \pi_f$ множество $f > a = \{x \in \mathcal{X} : f(x) > a\}$ и множество $E_a = \{x : (x, a) \in \pi_f\}$ совпадают как определяющиеся одним и тем же условием при $a \neq 0$. Поэтому первое равенство – другая запись утверждения 1 пункта 3.

Для доказательства второго равенства заметим, что

$$\int\limits_0^\infty \mu^*(f \geqslant a)\, da = \lim_{\delta\to 0} \int\limits_\delta^\infty \mu^*(f \geqslant a)\, da = \lim_{\delta\to 0} \int\limits_0^\infty \mu^*(f \geqslant a+\delta)\, da$$

$$\geqslant \lim_{\delta\to 0} \int\limits_0^\infty \mu^*(f > a + \frac{\delta}{2})\, da = \lim_{\delta\to 0} \int\limits_{\frac{\delta}{2}}^\infty \mu^*(f > a)\, da = \int\limits_0^\infty \mu^*(f > a)\, da.$$

Обратное неравенство очевидно.

(2) Утверждение вытекает из утверждения 2 пункта 3, так как $\pi_g \supset E \Leftrightarrow \pi_g \supset \pi_f \Leftrightarrow g \geqslant f$.

(3) При нашем определении подграфика, имеем $\pi_{f_n} \subset \pi_{f_{n+1}}$ и $\pi_f = \bigcup\limits_{n=1}^\infty \pi_{f_n}$. Отсюда по непрерывности функции $(\mu\times\lambda)^*$ снизу получаем $(\mu\times\lambda)^*(\pi_f) = \lim\limits_{n\to\infty} (\mu\times\lambda)^*(\pi_{f_n})$, что и является доказываемым утверждением.

(4) Взяв в качестве $\widetilde{f_n}(x) = \inf\limits_{k\geqslant n} f_k(x)$, по теореме Леви получим

$$\int\limits_{\mathcal{X}}^{*} \varliminf_{n\to\infty} f_n\, d\mu = \int\limits_{\mathcal{X}}^{*} \left(\lim_{n\to\infty} \widetilde{f_n}\right) d\mu = \lim_{n\to\infty} \int\limits_{\mathcal{X}}^{*} \widetilde{f_n}\, d\mu$$
$$= \varliminf_{n\to\infty} \int\limits_{\mathcal{X}}^{*} \widetilde{f_n}\, d\mu \leqslant \varliminf_{n\to\infty} \int\limits_{\mathcal{X}}^{*} f_n\, d\mu.$$

(5) Рассмотрим $\int\limits_{\mathcal{X}}^{*} f_n\, d\mu < \infty$, число $\varepsilon > 0$ и измеримую функцию $\widetilde{f_n} \geqslant f_n$, такую, что $\int\limits_{\mathcal{X}} \widetilde{f_n}\, d\mu < \int\limits_{\mathcal{X}}^{*} f_n\, d\mu + \frac{\varepsilon}{2^n}$. Получим

$$\int\limits_{\mathcal{X}}^{*} \sum_{n=1}^\infty f_n\, d\mu \leqslant \int\limits_{\mathcal{X}} \sum_{n=1}^\infty \widetilde{f_n}\, d\mu = \sum_{n=1}^\infty \int\limits_{\mathcal{X}} \widetilde{f_n}\, d\mu$$
$$\leqslant \sum_{n=1}^\infty \int\limits_{\mathcal{X}}^{*} f_n\, d\mu + \sum_{n=1}^\infty \frac{\varepsilon}{2^n} = \left(\sum_{n=1}^\infty \int\limits_{\mathcal{X}}^{*} f_n\, d\mu\right) + \varepsilon.$$

Это и означает требуемое, если верхние интегралы всех функций f_n конечны. В противном случае, утверждение очевидно. $\square$

§4. Вспомогательные утверждения

4.1. Лемма 1. Пусть $\Delta \subset \mathbb{C}$. Рассмотрим функцию f, аналитическую на Δ. Обозначим через D ее риманову поверхность, а через φ – обратную к f аналитическую функцию.

Пусть $\mathcal{F} \subseteq D$, $E = \varphi(\mathcal{F})$.

Мерой Хаусдорфа $\Lambda_{\alpha,\beta}$ множества $\mathcal{F}$ на римановой поверхности D будем полагать сумму мер множеств $\mathcal{F}_j$, где каждое $\mathcal{F}_j$ – пересечение множества $\mathcal{F}$ с одним из листов (на каждом из которых $\Lambda_{\alpha,\beta}$-мера определена стандартно).

Лемма 1. *При ранее оговоренных обозначениях, для* $\alpha \in (1;2]$ *имеем*

$$\Lambda_{\alpha,\beta}(E) = \int\limits_{\mathcal{F}} |\varphi'(w)|^{\alpha}\, d\Lambda_{\alpha,\beta}.$$

Доказательство. Зафиксируем $\varepsilon > 0$ и разобьем D на счетное число областей Q_j, каждая из которых ограничена кусочно-гладкой кривой и однозначно проектируется на плоскость.

При этом разбиение будем выбирать таковым, чтобы при всех $j \in \mathbb{N}$ и всех $w_1, w_2 \in Q_j$ было выполнено неравенство

$$\left|\frac{\varphi'(w_1)}{\varphi'(w_2)}\right| < 1 + \varepsilon.$$

(Ясно, что мы всегда можем выбрать Q_j таковыми, ведь если $\operatorname{diam} Q_j \to 0$, то $\left|\frac{\varphi'(w_1)}{\varphi'(w_2)}\right| \to 1$ по непрерывности производной φ').

Обозначим через $\mathcal{F}_j$ пересечение $\mathcal{F} \cap Q_j$; $E_j = \varphi(\mathcal{F}_j)$.

В силу определения меры $\Lambda_{\alpha,\beta}$ на римановой поверхности и того, что $\alpha > 1$, имеем $\Lambda_{\alpha,\beta}(\mathcal{F}) = \sum\limits_j \Lambda_{\alpha,\beta}(\mathcal{F}_j)$, $\Lambda_{\alpha,\beta}(E) = \sum\limits_j \Lambda_{\alpha,\beta}(E_j)$ (условие $\alpha > 1$ важно, так как оно делает несущественными слагаемые, относящиеся к радиусам шаров, пересекающих более, чем одно множество; такие шары лежат вдоль кусочно-гладких границ областей $\mathcal{F}_j$).

Пусть w_j – фиксированная точка множества Q_j. Тогда при всех $w \in Q_j$ имеем

$$\left|\frac{\varphi'(w_j)}{\varphi'(w)}\right| < 1+\varepsilon \implies \frac{1}{(1+\varepsilon)^\alpha}\left|\varphi'(w_j)\right|^\alpha < \left|\varphi'(w)\right|^\alpha$$

$$\left|\frac{\varphi'(w)}{\varphi'(w_j)}\right| < 1+\varepsilon \implies \left|\varphi'(w)\right|^\alpha < (1+\varepsilon)^\alpha\left|\varphi'(w_j)\right|^\alpha .$$

Проинтегрируем цепочку неравенств

$$\frac{1}{(1+\varepsilon)^\alpha}\left|\varphi'(w_j)\right|^\alpha < \left|\varphi'(w)\right|^\alpha < (1+\varepsilon)^\alpha\left|\varphi'(w_j)\right|^\alpha$$

по мере $\Lambda_{\alpha,\beta}$ на множестве $\mathcal{F}_j$:

$$\frac{1}{(1+\varepsilon)^\alpha}\left|\varphi'(w_j)\right|^\alpha \Lambda_{\alpha,\beta}(\mathcal{F}_j) < \int\limits_{\mathcal{F}_j}\left|\varphi'(w)\right|^\alpha d\Lambda_{\alpha,\beta} < (1+\varepsilon)^\alpha\left|\varphi'(w_j)\right|^\alpha \Lambda_{\alpha,\beta}(\mathcal{F}_j). \quad (5)$$

Пусть $\eta, \eta_1 > 0$. Рассмотрим такое покрытие множества $\mathcal{F}_j$ кругами $\{K_{jm}\}_{m\geqslant 1}$ с центрами в точках w_{jm} и радиусами $r_{jm} < \eta$, чтобы выполнялось неравенство

$$\sum_m r_{jm}^\alpha \left|\ln\ r_{jm}\right|^\beta < \inf\left\{\sum_m R_{jm}^\alpha\left|\ln\ R_{jm}\right|^\beta\right\} + \eta_1, \quad (6)$$

где R_{jm} – радиусы всевозможных круговых покрытий множества $\mathcal{F}_j$ с условием $R_{jm} < \eta$, инфимум берется по этим покрытиям. Существование такого покрытия обеспечено характеристическим свойством инфимума.

Обозначим через L_{jm} образы кругов $\varphi(K_{jm})$; через z_{jm} – образы центров w_{jm}.

Заметим, что L_{jm} содержится в круге с центром z_{jm} радиуса $\left|\varphi'(w_j)\right|(1+\varepsilon)r_{jm}$.

Действительно, воспользовавшись формулой Ньютона–Лейбница, видим, что при всех $w \in K_{jm}$ верна оценка

$$|\varphi(w) - \varphi(w_{jm})| = \left| \int\limits_{[w_{jm}w]} \varphi'(w)dw \right| \leqslant \int\limits_{[w_{jm}w]} |\varphi'(w)|\,|dw|$$

$$< \int\limits_{[w_{jm}w]} (1+\varepsilon)\,|\varphi'(w_j)|\,|dw| < (1+\varepsilon)\,|\varphi'(w_j)|\,r_{jm}.$$

Обозначим через a константу $(1+\varepsilon)\,|\varphi'(w_j)|$. Заметим, что мы можем подбирать радиусы покрытий так, чтобы выполнялось неравенство $|\ln\ ar_{jm}|^\beta < |\ln\ r_{jm}|^\beta\,(1+\varepsilon)$. Действительно,

$$|\ln\ ar_{jm}|^\beta = |\ln\ a + \ln\ r_{jm}|^\beta = |\ln\ r_{jm}|^\beta \left|1 + \frac{\ln\ a}{\ln\ r_{jm}}\right|^\beta.$$

Применив обобщенное неравенство Бернулли, имеем $\left|1 + \frac{\ln\ a}{\ln\ r_{jm}}\right|^\beta < 1 + \beta\left|\frac{\ln\ a}{\ln\ r_{jm}}\right|$. При $r_{jm} \to 0$ имеем $\beta\left|\frac{\ln\ a}{\ln\ r_{jm}}\right| \to 0$. Стало быть, выбрав достаточно малые r_{jm}, мы получим неравенства

$$\left|1 + \frac{\ln\ a}{\ln\ r_{jm}}\right|^\beta < 1 + \beta\left|\frac{\ln\ a}{\ln\ r_{jm}}\right| < 1 + \varepsilon$$

и

$$|\ln\ ar_{jm}|^\beta = |\ln\ r_{jm}|^\beta \left|1 + \frac{\ln\ a}{\ln\ r_{jm}}\right|^\beta < |\ln\ r_{jm}|^\beta\,(1+\varepsilon).$$

Тогда

$$\inf_{\rho_{jm} < a\eta} \sum_m \rho_{jm}^\alpha\,|\ln \rho_{jm}|^\beta < \sum_m (ar_{jm})^\alpha\,|\ln\ ar_{jm}|^\beta$$

$$< \sum_m a^\alpha r_{jm}^\alpha (1+\varepsilon)\,|\ln\ r_{jm}|^\beta = a^\alpha (1+\varepsilon)^\alpha \sum_m r_{jm}^\alpha\,|\ln\ r_{jm}|^\beta.$$

Воспользовавшись неравенством (6), имеем

$$a^\alpha (1+\varepsilon)^\alpha \sum_m r_{jm}^\alpha\,|\ln\ r_{jm}|^\beta < a^\alpha (1+\varepsilon)^\alpha \left(\inf\left\{\sum_m R_{jm}^\alpha\,|\ln\ R_{jm}|^\beta\right\} + \eta_1\right),$$

или, окончательно,

$$\inf_{\rho_{jm} < a\eta} \sum_m \rho_{jm}^\alpha\,|\ln \rho_{jm}|^\beta < a^\alpha (1+\varepsilon)^\alpha \left(\inf\left\{\sum_m R_{jm}^\alpha\,|\ln\ R_{jm}|^\beta\right\} + \eta_1\right).$$

Перейдя к пределу по $\eta, \eta_1 \to 0$, получаем неравенство

$$\Lambda_{\alpha,\beta}(E_j) \leqslant (1+\varepsilon)^{1+\alpha} \left|\varphi'(w_j)\right|^{\alpha} \Lambda_{\alpha,\beta}(\mathcal{F}_j).$$

Тогда, воспользовавшись неравенством (5), получаем оценку

$$\Lambda_{\alpha,\beta}(E) = \sum_j \Lambda_{\alpha,\beta}(E_j) \leqslant (1+\varepsilon)^{1+\alpha} \sum_j \left|\varphi'(w_j)\right|^{\alpha} \Lambda_{\alpha,\beta}(\mathcal{F}_j)$$

$$< (1+\varepsilon)^{1+2\alpha} \sum_j \int\limits_{\mathcal{F}_j} \left|\varphi'(w)\right|^{\alpha} d\Lambda_{\alpha,\beta} = (1+\varepsilon)^{1+2\alpha} \int\limits_{\mathcal{F}} \left|\varphi'(w)\right|^{\alpha} d\Lambda_{\alpha,\beta}. \quad (7)$$

Проведя аналогичные рассуждения, получим оценку с другой стороны. (Для удобства, обнулим обозначения K_{jm}, r_{jm}, z_{jm}, η, η_1, L_{jm}, w_{jm}, a.)

Пусть теперь K_{jm} – круги с центрами в точках z_{jm} радиусов $r_{jm} < \eta$, покрывающие множество E_j, причем $\eta > 0$ настолько мало, что для некоторого заранее зафиксированного $\eta_1 > 0$ выполняется неравенство

$$\Lambda_{\alpha,\beta}(E_j) - \eta_1 < \sum_m r_{jm}^{\alpha} \left|\ln\, r_{jm}\right|^{\beta} < \Lambda_{\alpha,\beta}(E_j) + \eta_1.$$

Тогда, обозначив $L_{jm} = f(K_{jm})$, мы заметим, что множества L_{jm} содержатся в кругах с центрами $w_{jm} = f(z_{jm})$ радиусов $\frac{1+\varepsilon}{|\varphi'(w_j)|} r_{jm}$. Тогда, обозначив через a константу $\frac{1+\varepsilon}{|\varphi'(w_j)|}$, имеем

$$\inf_{\rho_{jm} < a\eta} \sum_m \rho_{jm}^{\alpha} \left|\ln \rho_{jm}\right|^{\beta} < a^{\alpha}(1+\varepsilon) \sum_m r_{jm}^{\alpha} \left|\ln r_{jm}\right|^{\beta} < a^{\alpha}(1+\varepsilon)(\Lambda_{\alpha,\beta}(E_j) + \eta_1).$$

Переходя в этом неравенстве к пределу при $\eta, \eta_1 \to 0$, получаем

$$\Lambda_{\alpha,\beta}(\mathcal{F}_j) \leqslant \frac{(1+\varepsilon)^{1+\alpha}}{\left|\varphi'(w_j)\right|^{\alpha}} \Lambda_{\alpha,\beta}(E_j).$$

Тогда, вновь воспользовавшись неравенством (5), имеем

$$\Lambda_{\alpha,\beta}(E) = \sum_j \Lambda_{\alpha,\beta}(E_j) \geqslant \frac{1}{(1+\varepsilon)^{1+\alpha}} \sum_j \left|\varphi'(w_j)\right|^{\alpha} \Lambda_{\alpha,\beta}(\mathcal{F}_j)$$

$$> \frac{1}{(1+\varepsilon)^{1+2\alpha}} \sum_j \int\limits_{\mathcal{F}_j} \left|\varphi'(w)\right|^{\alpha} d\Lambda_{\alpha,\beta} = \frac{1}{(1+\varepsilon)^{1+2\alpha}} \int\limits_{\mathcal{F}} \left|\varphi'(w)\right|^{\alpha} d\Lambda_{\alpha,\beta}.$$

Таким образом, в результате обоих рассуждений, получаем оценку

$$\frac{1}{(1+\varepsilon)^{1+2\alpha}} \int\limits_{\mathcal{F}} \left|\varphi'(w)\right|^{\alpha} d\Lambda_{\alpha,\beta} < \Lambda_{\alpha,\beta}(E) < (1+\varepsilon)^{1+2\alpha} \int\limits_{\mathcal{F}} \left|\varphi'(w)\right|^{\alpha} d\Lambda_{\alpha,\beta}.$$

Переходя в этих неравенствах к пределу по $\varepsilon \to 0$, получаем утверждение леммы. $\square$

4.2. Лемма 2.

Лемма 2. *Пусть $\mathcal{F} \subseteq D$, $\Lambda_{\alpha,\beta}(\mathcal{F}) < \infty$. Пусть $\mathcal{F}_R$ – часть множества $\mathcal{F}$, проекция которой лежит на окружности $|w| = R$. Тогда выполнено неравенство*

$$\int_0^{\infty *} \Lambda_{\alpha,\beta}(\mathcal{F}_R)\lambda(dR) \leqslant 2\Lambda_{\alpha+1,\beta}(\mathcal{F}_R).$$

Доказательство. Разобьем поверхность D на не более, чем счетное число частей $Q_{jm}^{(\nu)}$, которые однозначно проектируются на области-сектора, определяемые неравенствами

$$R_j < |w| < R_{j+1}, \quad \psi_m < |\arg w| < \psi_{m+1};$$

N_{jm} – кратность покрытия Q_{jm} (то есть каждая точка из Q_{jm} покрыта N_{jm} раз).

Из аддитивности интеграла Лебега мы понимаем, что достаточно показать выполнение леммы для множества $\mathcal{F} \subseteq Q_{jm}$, что и предполагаем в дальнейшем.

Напомним обозначение

$$\Lambda_{\alpha,\beta}(\mathcal{F}_R, \varepsilon) = \inf \left\{ \sum_n r_n^\alpha \left|\ln\ r_n\right|^\beta \right\},$$

где инфимум берется по всевозможным покрытиям множества $\mathcal{F}_R$ кругами K_n с радиусами $r_n < \varepsilon$.

Пусть теперь $\{K_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ – покрытие множества $\mathcal{F}$ кругами радиусов $\rho_n < \varepsilon$, для которого

$$\sum_n \rho_n^{\alpha+1} \left|\ln\ \rho_n\right|^\beta \leqslant \Lambda_{\alpha+1,\beta}(\mathcal{F}) + \varepsilon. \tag{8}$$

Выделим из покрытия $\{K_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ круги, которые пересекаются с $\mathcal{F}_R$ не по пустому множеству. Обозначим через $\Lambda_{\alpha,\beta}^{(\varepsilon)}(\mathcal{F}, \mathcal{F}_R)$ сумму

$$\Lambda_{\alpha,\beta}^{(\varepsilon)}(\mathcal{F}, \mathcal{F}_R) = \sum_{K_n \cap \mathcal{F}_R \neq \varnothing} \rho_n^\alpha \left|\ln\ \rho_n\right|^\beta.$$

Так как выбранные круги образуют покрытие множества $\mathcal{F}_R$, выполнено следующее неравенство (инфимум по множеству не превосходит его элемента):

$$\Lambda_{\alpha,\beta}(\mathcal{F}_R, \varepsilon) \leqslant \Lambda^{(\varepsilon)}_{\alpha,\beta}(\mathcal{F}, \mathcal{F}_R). \tag{9}$$

Перейдем к нижнему пределу в последнем неравенстве при $\varepsilon \to 0$. При этом заметим, что (так как функция $\Lambda_{\alpha,\beta}(\mathcal{F}_R, \varepsilon)$ имеет предел при $\varepsilon \to 0$), $\varliminf\limits_{\varepsilon\to 0} \Lambda_{\alpha,\beta}(\mathcal{F}_R, \varepsilon) = \lim\limits_{\varepsilon\to 0} \Lambda_{\alpha,\beta}(\mathcal{F}_R, \varepsilon) = \Lambda_{\alpha,\beta}(\mathcal{F}_R)$:

$$\Lambda_{\alpha,\beta}(\mathcal{F}_R) \leqslant \varliminf_{\varepsilon\to 0} \Lambda^{(\varepsilon)}_{\alpha,\beta}(\mathcal{F}, \mathcal{F}_R). \tag{10}$$

Тогда

$$\int_0^{\infty *} \Lambda_{\alpha,\beta}(\mathcal{F}_R) d\lambda \leqslant \int_0^{\infty *} \varliminf_{\varepsilon\to 0} \Lambda^{(\varepsilon)}_{\alpha,\beta}(\mathcal{F}, \mathcal{F}_R) d\lambda \leqslant \varliminf_{\varepsilon\to 0} \int_0^{\infty *} \Lambda^{(\varepsilon)}_{\alpha,\beta}(\mathcal{F}, \mathcal{F}_R) d\lambda$$

$$= \varliminf_{\varepsilon\to 0} \int_0^{\infty} \Lambda^{(\varepsilon)}_{\alpha,\beta}(\mathcal{F}, \mathcal{F}_R) d\lambda.$$

(Последнее неравенство выполнено по теореме Фату для верхнего интеграла, доказанной нами ранее.)

Рассмотрим отдельно интеграл $\int\limits_0^{\infty} \Lambda^{(\varepsilon)}_{\alpha,\beta}(\mathcal{F}, \mathcal{F}_R) d\lambda$. Заметим, что мы можем представить его в виде повторного.

Будем мыслить часть римановой поверхности, на которой расположены круги K_n, как плоскость. Заметим тогда, что каждый круг K_n (с учетом известного радиуса ρ_n) задается углом θ_n (аргумент центра круга) и расстоянием $a \in \mathbb{R}$ от этого круга до начала координат (можно считать, что $a > 0$). Сопоставим этой части римановой поверхности полуполосу $(0; \infty) \times (0; 2\pi)$. Заметим, что кругу K_n соответствует прямоугольник $(a; a + 2\rho_n) \times \left(\theta_n - \arcsin \frac{\rho_n}{a+\rho_n};\ \theta_n + \arcsin \frac{\rho_n}{a+\rho_n}\right)$.

Зафиксируем некоторый конкретный радиус $R > 0$. Для него в этом прямоугольнике рассмотрим постоянную функцию $k_R^{(n)} = \frac{\rho_n^{\alpha} |\ln \rho_n|^{\beta}}{2 \arcsin \frac{\rho_n}{a+\rho_n}}$. Заметим, что для данного фиксированного R подынтегральная функция $\Lambda^{(\varepsilon)}_{\alpha,\beta}(\mathcal{F}, \mathcal{F}_R)$ равна сумме интегралов констант $k_R^{(n)}$, умноженных на характеристические функции $\chi_R^{(n)}$ (относительно полуполосы) прямоугольников, соответствующих кругам K_n:

$$\Lambda_{\alpha,\beta}^{(\varepsilon)}(\mathcal{F},\mathcal{F}_R) = \sum_{K_n\cap\mathcal{F}_R\neq\varnothing} \int\limits_0^{2\pi} \chi_R^{(n)} \cdot k_R^{(n)} d\theta = \int\limits_0^{2\pi} \sum_{K_n\cap\mathcal{F}_R\neq\varnothing} \chi_R^{(n)} \cdot k_R^{(n)} d\theta.$$

Тогда интересующий нас интеграл может быть выписан следующим образом:

$$\int\limits_0^{\infty} \Lambda_{\alpha,\beta}^{(\varepsilon)}(\mathcal{F},\mathcal{F}_R) d\lambda = \int\limits_0^{\infty} \lambda(dR) \int\limits_0^{2\pi} \sum_{K_n\cap\mathcal{F}_R\neq\varnothing} \chi_R^{(n)} \cdot k_R^{(n)} d\theta.$$

Сменим порядок интегрирования и рассмотрим внутренний интеграл

$$\int\limits_0^{\infty} \sum_{K_n\cap\mathcal{F}_R\neq\varnothing} \chi_R^{(n)} \cdot k_R^{(n)} \lambda(dR) = \sum_{K_n\cap\mathcal{F}_R\neq\varnothing} \int\limits_0^{\infty} \chi_R^{(n)} \cdot k_R^{(n)} \lambda(dR).$$

При фиксированном θ для конкретного круга (прямоугольника) K_n (считаем, что полупрямая $y=\theta$ пересекает прямоугольник K_n) получаем

$$\int\limits_0^{\infty} \chi_R^{(n)} \cdot k_R^{(n)} \lambda(dR) = 2\rho_n \cdot \frac{\rho_n^{\alpha} |\ln \rho_n|^{\beta}}{2 \arcsin \frac{\rho_n}{a+\rho_n}}.$$

При взятии внешнего интеграла знаменатели у дробей сокращаются и мы получаем сумму $2\sum\limits_n \rho_n^{\alpha+1} \left|\ln \rho_n\right|^{\beta}$. Таким образом, получаем

$$\int\limits_0^{\infty} \Lambda_{\alpha,\beta}^{(\varepsilon)}(\mathcal{F},\mathcal{F}_R) d\lambda \leqslant 2\sum_n \rho_n^{\alpha+1} \left|\ln \rho_n\right|^{\beta}.$$

Причем, с учетом выбора покрытия K_n, видим, что

$$2\sum_n \rho_n^{\alpha+1} \left|\ln \rho_n\right|^{\beta} \leqslant 2\Lambda_{\alpha+1,\beta}(\mathcal{F}) + \varepsilon.$$

Переходя к пределу по $\varepsilon \to 0$ в окончательном неравенстве

$$\int\limits_0^{\infty}{}^{*} \Lambda_{\alpha,\beta}(\mathcal{F}_R) d\lambda \leqslant 2\Lambda_{\alpha+1,\beta}(\mathcal{F}) + \varepsilon,$$

получаем утверждение леммы. □

Следствие. *Для каждого* $\varepsilon > 0$ *и для почти всех* $R > 0$ *имеем*

$$\Lambda_{\alpha+1,\beta}(T_{R,\varepsilon}) < \infty.$$

Доказательство. Возьмем множество E_δ точек E, удаленных от границы области Δ не менее, чем на δ, и пусть $\mathcal{F}_\delta = f(E_\delta)$. Функция $|f'|$ ограничена в области E_δ, то есть существует положительное число $M > 0$, для которого $|f'(z)| < M$ при всех $z \in E_\delta$.

С учетом этого, перепишем лемму 1 для меры $\Lambda_{\alpha+1,\beta}(\mathcal{F}_\delta)$:

$$\Lambda_{\alpha+1,\beta}(\mathcal{F}_\delta) = \int\limits_{E_\delta} |f'(z)|^{\alpha+1}\, d\Lambda_{\alpha+1,\beta} \leqslant M^{\alpha+1}\Lambda_{\alpha+1,\beta}(E_\delta) < \infty.$$

($\Lambda_{\alpha+1,\beta}(E_\delta) < \infty$ по предположению из условия теоремы.) □

§5. Основная теорема

Пусть $z = \varphi(w)$ – функция, обратная к $w = f(z)$. Воспользуемся леммой 1 и интегральным неравенством Гёльдера:

$$\begin{aligned}
\Lambda_{\alpha,\beta}(l_{R,\varepsilon} \cap E) &= \int\limits_{T_{R,\varepsilon}} |\varphi'(w)|^{\alpha} d\Lambda_{\alpha,\beta} \\
&\leqslant \left(\int\limits_{T_{R,\varepsilon}} |\varphi'(w)|^{\alpha+1} d\Lambda_{\alpha,\beta} \right)^{\frac{\alpha}{\alpha+1}} \left(\int\limits_{T_{R,\varepsilon}} d\Lambda_{\alpha,\beta} \right)^{\frac{1}{\alpha+1}} \\
&= \left(\int\limits_{T_{R,\varepsilon}} |\varphi'(w)|^{\alpha+1} d\Lambda_{\alpha,\beta} \right)^{\frac{\alpha}{\alpha+1}} \Lambda_{\alpha,\beta}^{\frac{1}{\alpha+1}}(T_{R,\varepsilon}).
\end{aligned}$$

Разделим полученное неравенство на $\Lambda_{\alpha,\beta}^{\frac{1}{\alpha+1}}(T_{R,\varepsilon})$ и возведем в степень $\frac{\alpha+1}{\alpha}$:

$$\frac{\Lambda_{\alpha,\beta}^{\frac{\alpha+1}{\alpha}}(l_{R,\varepsilon} \cap E)}{\Lambda_{\alpha,\beta}^{\frac{1}{\alpha}}(T_{R,\varepsilon})} \leqslant \int\limits_{T_{R,\varepsilon}} |\varphi'(w)|^{\alpha+1} d\Lambda_{\alpha,\beta}. \tag{11}$$

При $\varepsilon \to 0$ область интегрирования $T_{R,\varepsilon}$ "увеличивается" и, стало быть, правая часть неравенства монотонно возрастает и имеет конечный или бесконечный предел. Заметим, что этот же предел можно описать немного по-другому. Рассмотрим последовательность поверхностей D_n, таких, что $\overline{D_n} \subset D_{n+1}$, $\overline{D_n} \subset D$ и $\bigcup\limits_n D_n = D$. Тогда

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \int\limits_{T_{R,\varepsilon}} |\varphi'(w)|^{\alpha+1} d\Lambda_{\alpha,\beta} = \lim_{n\to\infty} \int\limits_{D_n\cap T_R} |\varphi'(w)|^{\alpha+1} d\Lambda_{\alpha,\beta}.$$

Возьмем последовательно в неравенстве (11) нижний предел и верхний интеграл. При этом предел, полученный в правой части, перепишем указанным способом:

$$\int_0^{\infty *} \varliminf_{\varepsilon\to 0} \frac{\Lambda_{\alpha,\beta}^{\frac{\alpha+1}{\alpha}}(l_{R,\varepsilon}\cap E)}{\Lambda_{\alpha,\beta}^{\frac{1}{\alpha}}(T_{R,\varepsilon})} dR \leqslant \int_0^{\infty *} \Big(\lim_{\varepsilon\to 0} \int\limits_{T_{R,\varepsilon}} |\varphi'(w)|^{\alpha+1} d\Lambda_{\alpha,\beta}\Big) dR$$

$$= \int_0^{\infty *} \Big(\lim_{n\to\infty} \int\limits_{D_n\cap T_R} |\varphi'(w)|^{\alpha+1} d\Lambda_{\alpha,\beta}\Big) dR \leqslant \lim_{n\to\infty} \int_0^{\infty *} \Big(\int\limits_{D_n\cap T_R} |\varphi'(w)|^{\alpha+1} d\Lambda_{\alpha,\beta}\Big) dR \leqslant \dots \tag{12}$$

Положим $T_{R,n} = D_n \cap T_R$. Разобьем множество D_n на не более, чем счетное число кусков $Q_{jm}^{(\nu)}$, $\nu \leqslant N_{jm}$. При этом потребуем, чтобы для любых w_1, $w_2 \in Q_{jm}^{(\nu)}$ и для заранее определенного $\eta > 0$ выполнялось неравенство $\left|\frac{\varphi'(w_1)}{\varphi'(w_2)}\right| < 1 + \eta$. Пусть $\mathcal{F}_{jm}^{(\nu)} = \mathcal{F} \cap Q_{jm}^{(\nu)}$. Характеристическую функцию множества $Q_{jm}^{(\nu)}$ на D_n обозначим через $\chi_{jm}^{(\nu)}$. С учетом соотношений $E_{jm}^{(\nu)} = \varphi(\mathcal{F}_{jm}^{(\nu)})$, $\psi_{jm}^{(\nu)} = \chi_{jm}^{(\nu)} |\varphi'|^{\alpha+1}$, можем переписать интеграл под пределом:

$$\dots \leqslant \int_0^{\infty *} (\dots) dR = \sum_j \int_{R_j}^{R_{j+1} *} (\dots)\lambda(dR)$$

$$= \sum_j \int_{R_j}^{R_{j+1} *} \left(\int\limits_{T_{R,n}} \left(\sum_m \sum_{\nu\leqslant N_{jm}} \psi_{jm}^{(\nu)}(w) \right) d\Lambda_{\alpha,\beta} \right) \lambda(dR) \leqslant \dots \tag{13}$$

Внесем интегралы под знаки сумм:

$$\dots \leqslant \sum_j \int_{R_j}^{R_{j+1} *} \left(\sum_m \sum_{\nu\leqslant N_{jm}} \int\limits_{T_{R,n}} \psi_{jm}^{(\nu)}(w) d\Lambda_{\alpha,\beta} \right) \lambda(dR)$$

$$\leqslant \sum_j \sum_m \sum_{\nu \leqslant N_{jm}} \int\limits_{R_j}^{R_{j+1}}{}^{*} \left(\int\limits_{T_{R,n}} \psi_{jm}^{(\nu)}(w) d\Lambda_{\alpha,\beta} \right) \lambda(dR) \leqslant \ldots \qquad (14)$$

В каждом множестве $Q_{jm}^{(\nu)}$ выберем точку $w_{jm}^{(\nu)}$. В силу выполнения условия на разбиение $\{Q_{jm}^{(\nu)}\}$ и очевидного неравенства $\psi_{jm}^{(\nu)} \leqslant |\varphi'|^{\alpha+1}$ (на D_n), имеем (на $Q_{jm}^{(\nu)}$) неравенство

$$\int\limits_{T_{R,n}} \psi_{jm}^{(\nu)}(w) d\Lambda_{\alpha,\beta} \leqslant (1+\eta)^{\alpha+1} \left|\varphi'\left(w_{jm}^{(\nu)}\right)\right|^{\alpha+1} \Lambda_{\alpha,\beta}\left(T_{R,n} \cap Q_{jm}^{(\nu)}\right).$$

Применим его и продолжим раскрывать строку (14):

$$\ldots \leqslant \sum_j \sum_m \sum_{\nu \leqslant N_{jm}} (1+\eta)^{\alpha+1} \left|\varphi'\left(w_{jm}^{(\nu)}\right)\right|^{\alpha+1} \int\limits_{R_j}^{R_{j+1}}{}^{*} \left(\Lambda_{\alpha,\beta}\left(T_{R,n} \cap Q_{jm}^{(\nu)}\right)\right) dR \leqslant \ldots \qquad (15)$$

С учетом соотношений $T_{R,n} \cap Q_{jm}^{(\nu)} = \mathcal{F} \cap Q_{jm}^{(\nu)} = \mathcal{F}_{jm}^{(\nu)}$, леммы 2 и (во втором неравенстве) леммы 1, примененной к $\Lambda_{\alpha+1,\beta}\left(\mathcal{F}_{jm}^{(\nu)}\right)$, имеем

$$\ldots \leqslant 2(1+\eta)^{\alpha+1} \sum_j \sum_m \sum_{\nu \leqslant N_{jm}} \left|\varphi'\left(w_{jm}^{(\nu)}\right)\right|^{\alpha+1} \Lambda_{\alpha+1,\beta}\left(\mathcal{F}_{jm}^{(\nu)}\right) \leqslant \ldots \qquad (16)$$

Запишем

$$\left|\varphi'\left(w_{jm}^{(\nu)}\right)\right|^{\alpha+1} \Lambda_{\alpha+1,\beta}\left(\mathcal{F}_{jm}^{(\nu)}\right) = \int\limits_{\mathcal{F}_{jm}^{(\nu)}} \left|\varphi'\left(w_{jm}^{(\nu)}\right)\right|^{\alpha+1} d\Lambda_{\alpha+1,\beta}$$

и еще раз применим условие на разбиение $\{Q_{jm}^{(\nu)}\}$:

$$\int\limits_{\mathcal{F}_{jm}^{(\nu)}} \left|\varphi'\left(w_{jm}^{(\nu)}\right)\right|^{\alpha+1} d\Lambda_{\alpha+1,\beta} \leqslant (1+\eta)^{1+\alpha} \int\limits_{\mathcal{F}_{jm}^{(\nu)}} |\varphi'(w)|^{\alpha+1} d\Lambda_{\alpha+1,\beta}.$$

С учетом этого,

$$\ldots \leqslant 2(1+\eta)^{2+2\alpha} \sum_j \sum_m \sum_{\nu \leqslant N_{jm}} \int\limits_{\mathcal{F}_{jm}^{(\nu)}} |\varphi'(w)|^{\alpha+1} d\Lambda_{\alpha+1,\beta} \leqslant \ldots \qquad (17)$$

Мы свели все к сумме интегралов по областям $\mathcal{F}_{jm}^{(\nu)}$, составляющим разбиение области D_n. Таким образом, применяя лемму 1, имеем

$$\begin{aligned} \ldots \leqslant 2(1+\eta)^{2+2\alpha} \sum_j \sum_m \sum_{\nu \leqslant N_{jm}} \int\limits_{\mathcal{F}_{jm}^{(\nu)}} |\varphi'(w)|^{\alpha+1}\, d\Lambda_{\alpha+1,\beta} \\ = 2(1+\eta)^{2+2\alpha} \Lambda_{\alpha+1,\beta}\left(E \cap \varphi(D_n)\right) \\ \leqslant 2(1+\eta)^{2+2\alpha} \Lambda_{\alpha+1,\beta}(E). \quad (18) \end{aligned}$$

Устремляя в неравенстве

$$\int\limits_0^{\infty}{}^{*} \varliminf_{\varepsilon\to 0} \frac{\Lambda_{\alpha,\beta}^{\frac{\alpha+1}{\alpha}}(l_{R,\varepsilon} \cap E)}{\Lambda_{\alpha,\beta}^{\frac{1}{\alpha}}(T_{R,\varepsilon})} \lambda(dR) \leqslant 2(1+\eta)^{2+2\alpha} \Lambda_{\alpha+1,\beta}(E)$$

$\eta \to 0$, получаем утверждение теоремы.

Список литературы

1. В. К. Хейман, *Многолистные функции*, Москва, ИЛ, 1960.
2. Н. А. Широков, *Об одном обобщении теоремы Альфорса.* — Зап. научн. семин. ЛОМИ **44** (1974), 179–185.
3. Л. Карлесон, *Избранные проблемы теории исключительных множеств*, Москва, Мир, 1971.

Florinskiy A. A., Fofanov K. A., Shirokov N. A. Ahlfors-type theorem for Hausdorff measures.

Suppose that $\Delta \subset \mathbb{C}$ is a domain, a function f is analytic in Δ, $D = f(\Delta)$ is viewed as a Riemann surface. We put $l_R = \{z \in \Delta :\ |f(z)| = R\}$. Let $E \subset \Delta$ be a closed set. Put $h_{\alpha,\beta}(r) = r^{\alpha}|\ln r|^{\beta}$, $0 < \alpha < 1$, $0 < \beta < 1$. Let $\Lambda_{\alpha,\beta}(\cdot)$, $\Lambda_{\alpha+1,\beta}(\cdot)$ be the Hausdorff measures with respect to the functions $h_{\alpha,\beta}$, $h_{\alpha+1,\beta}$. Assume that $\Lambda_{\alpha+1,\beta}(E) < \infty$. We introduce the sets $l_{R,\varepsilon} = \{z \in l_R :\ \mathrm{dist}(z, \partial\Delta) \geqslant \varepsilon,\ |z| \leqslant \frac{1}{\varepsilon}\}$ and $T_{R,\varepsilon} = f(l_{R,\varepsilon} \cap E)$, $T_{R,\varepsilon} \subset D$. Put

$$G_\varepsilon(R) = \begin{cases} 0 \ \text{ if } \Lambda_{\alpha,\beta}(T_{R,\varepsilon}) = 0 \text{ or } \Lambda_{\alpha,\beta}(T_{R,\varepsilon}) = \infty, \\ \frac{\Lambda_{\alpha,\beta}^{\frac{1+\alpha}{\alpha}}(E \cap l_{R,\varepsilon})}{\Lambda_{\alpha,\beta}^{\frac{1}{\alpha}}(T_{R,\varepsilon})} \ \text{ if } 0 < \Lambda_{\alpha,\beta}(T_{R,\varepsilon}) < \infty. \end{cases}$$

We define the upper Lebesgue integral $\int_0^{\infty *} g\,\mathrm{d}m$ for a function g, $g(x) \geqslant 0$, $x > 0$ in the following way: let $U(y) \stackrel{\mathrm{def}}{=} \{x > 0 : g(x) > y\}$, $H(y) = m^* U(y)$. Then we put $\int_0^{\infty *} g\,\mathrm{d}m \stackrel{\mathrm{def}}{=} \int_0^{\infty} H(y)\mathrm{d}y$.

We prove the following result.

Theorem. *The condition* $\Lambda_{\alpha,\beta}(T_{R,\varepsilon}) < \infty$ *is fulfilled for almost all* R *with respect to the* 1*-Lebesgue measure and*

$$\int_0^{\infty *} \varliminf_{\varepsilon \to +0} G_\varepsilon(R)\mathrm{d}R \leqslant 2\Lambda_{1+\alpha,\beta}(E).$$

Поступило 23 сентября 2023 г.

Национальный
исследовательский университет
«Высшая школа экономики» в Санкт-Петербурге,
Кантемировская ул. д.3,
Санкт-Петербург 194100, Россия

РГПУ им. А. И. Герцена,
наб. р. Мойки 48,
191186, Санкт-Петербург
E-mail: kirfof@mail.ru

Санкт-Петербургский
государственный университет,
Университетская наб.7-9,
Санкт-Петербург 199034, Россия;
Национальный
исследовательский университет
«Высшая школа экономики» в Санкт-Петербурге,
Кантемировская ул. д. 3,
Санкт-Петербург 194100, Россия
E-mail: nikolai.shirokov@gmail.com