Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 527, 2023 г.

К. А. Синцова

ОБРАТНАЯ ТЕОРЕМА ПРИБЛИЖЕНИЯ НА ПОДМНОЖЕСТВАХ ОБЛАСТЕЙ С ЗАОСТРЕНИЯМИ

§1. Введение

В работе [1] рассматривалась задача об оценке приближения функции, заданной в замкнутой области на эллиптической кривой в $\mathbb{C}^2$, граница которой удовлетворяла chord-arc условию, т.е. дуги этой кривой соизмеримы со стягивающими их хордами.

Такие кривые в [1] назывались кривыми Лаврентьева. Предполагалось, что функция голоморфна во внутренности области и удовлетворяет условию Гёльдера порядка, меньшего 1, в замыкании области. Установлена возможность приближения функции голоморфными полиномами $P_n(u, v), \deg P_n \leqslant n$, от двух переменных с оценкой уклонения, зависящей от n и точки границы. В работе [2] была доказана обратная теорема приближения: если в области, лежащей на эллиптической кривой в $\mathbb{C}^2$ и ограниченной кривой Лаврентьева, функцию можно приблизить голоморфными полиномами со скоростью, указанной в прямой теореме, то функция голоморфна во внутренности области и удовлетворяет условию Гёльдера в ее замыкании. В статье [3] прямая теорема была распространена на области, имеющие конечное число внешних углов, равных 2π, и на функции более высокого порядка гладкости.

Существенно, что при решении задач о приближении использовалась специальная параметризация рассматриваемой эллиптической кривой плоской областью. В этой плоской области, тем самым, возникали задачи о приближении полиномами от двоякопериодических функций Вейерштрасса и их производных. Этот аппарат будет применяться и здесь.

В настоящей работе доказывается обратная теорема приближения, соответствующая прямой теореме из [3].

Ключевые слова: кривая Лаврентьева, функция Вейерштрасса, условие chord-arc.

Введем некоторые определения для формулировки основных теорем.

Определение 1. *Будем называть величины A и B соизмеримыми друг с другом, если существуют такие постоянные m_1 и m_2, что выполняется неравенство: $m_1 A \leqslant B \leqslant m_2 A$, где m_1 и m_2 – постоянные соизмеримости.*

Соизмеримость величин A и B будем обозначать следующей записью: $A \asymp B$.

Теперь опишем плоскую область, с помощью которой параметризуется эллиптическая кривая в $\mathbb{C}^2$ и в которой будет происходить построение приближения.

Предполагаем, что жорданова область D обладает следующими свойствами:

1) имеется конечное число точек $z_1, \ldots, z_m \in \Gamma \overset{\text{def}}{=} \partial D, m \geqslant 1$, и их окрестностей $\Omega_1, \ldots, \Omega_m, z_j \in \Omega_j$, таких, что $\overline{\Omega}_k \cap \overline{\Omega}_l = \varnothing$, $k \neq l$;

2) дуги $\Gamma_1, \ldots, \Gamma_m$ лежат на $\Gamma, \Gamma_j \subset \Gamma \setminus \bigcup\limits_{r=1}^{m} \Omega_r$, $\Gamma_k \bigcap \Gamma_l = \varnothing$, $k \neq l$, $\bigcup\limits_{j=1}^{m} \Gamma_j = \Gamma \setminus \bigcup\limits_{r=1}^{m} \Omega_r$ и концы дуг Γ_j – точки z^0_{2j-1} и z^0_{2j}, причем z^0_{2j-1}, z_j, z^0_{2j}, z_{j+1} следуют в порядке положительного обхода Γ, при этом существует постоянная $b > 0$, такая, что для любых ξ_1, ξ_2 на дуге Γ с концами z_j, z^0_{2j-2} или z_j, z^0_{2j+1} выполнено соотношение

$$|\Gamma(\xi_1, \xi_2)| \leqslant b|\xi_2 - \xi_1|, \tag{1}$$

в неравенстве (1) $\Gamma(\xi_1, \xi_2) \subset \Gamma$ – дуга с концами ξ_1, ξ_2, которая в первом случае не содержит точку z^0_{2j}, а во втором не содержит $z^0_{2j-1}, j \geqslant 2, |\Gamma(\ldots)|$ – длина дуги $\Gamma(\ldots)$. Полагаем при этом $z_{m+1} \overset{\text{def}}{=} z_1, z^0_{2m+1} \overset{\text{def}}{=} z^0_1, z^0_{2m+2} \overset{\text{def}}{=} z^0_2$.

Далее, предполагается, что дуги $\Gamma(z^0_{2j-1}, z_j) \subset \Omega_j$, $\Gamma(z_j, z^0_{2j}) \subset \Omega_j$ обладают следующим свойством: если $\Theta(\xi)$ – угол наклона ориентированной касательной к Γ в положительном направлении вещественной оси, то с некоторыми $b_1 > 0, \sigma > 0$ имеется соотношение

$$|\Theta(\xi_2) - \Theta(\xi_1)| \leqslant b_1|\xi_2 - \xi_1|^{\sigma}, \tag{2}$$

в случае, когда $\Gamma(\xi_1, \xi_2) \subset \Gamma(z^0_{2j-1}, z_j)$ или $\Gamma(\xi_1, \xi_2) \subset \Gamma(z_j, z^0_{2j})$.

Наконец, про внешний по отношению к D угол η_j^* между касательными к дугам $\Gamma(z_{2j-1}^0, z_j)$ и $\Gamma(z_j, z_{2j}^0)$ в точке z_j предполагается, что

$$\eta_j^* = 2\pi, \quad j = 1 \dots m. \tag{3}$$

Зададим веса приближений доказываемых теорем. Пусть Φ – конформное отображение множества $\mathbb{C} \setminus D$ на $\mathbb{C} \setminus \{|z| < 1\}$, где $\Phi(\infty) = \infty, \Phi'(\infty) > 0$, и пусть $\Psi = \Phi^{-1}$ – обратное отображение. Обозначим $L_{1+t} = \Psi(|z| = 1 + t)$, где $t > 0$, и пусть

$$\delta_n(z) = \operatorname{dist}(z, L_{1+1/n}), \quad z \in \Gamma. \tag{4}$$

Символом $\mathfrak{P}(z)$ обозначается двоякопериодическая функция Вейерштрасса с периодами $2\omega_1, 2\omega_2, \operatorname{Im}\frac{\omega_2}{\omega_1} > 0$. Известно, что функция $\zeta = \mathfrak{P}(z)$ должна удовлетворять следующему уравнению:

$$\left(\frac{d\zeta}{dz}\right)^2 = 4\zeta^3 - g_2\zeta - g_3.$$

Пусть $\omega(t)$ – модуль непрерывности, тогда мы предполагаем, что справедливо следующее неравенство:

$$\int\limits_0^x \frac{\omega(t)}{t} dt + x \int\limits_x^\infty \frac{\omega(t)}{t^2} dt \leqslant c\omega(x), \quad x > 0. \tag{4'}$$

Пусть $Q = \{z \in \mathbb{C} : z = 2\boldsymbol{\omega}_1\alpha_1 + 2\boldsymbol{\omega}_2\alpha_2, \alpha_1, \alpha_2 \in [0, 1)\}$ – параллелограмм периодов функции $\mathfrak{P}(z)$. Определим эллиптическую кривую, пусть $E = \{(\zeta, \eta) \in \mathbb{C}^2 : \eta^2 = 4\zeta^3 - g_2\zeta - g_3\}$. Тогда взаимно-однозначное отображение множества Q на E определим следующим образом:

$$T(z) = (\mathfrak{P}(z), \mathfrak{P}'(z)). \tag{5}$$

Обозначим

$$\delta_n(\zeta, \eta) = \delta_n(T^{-1}(\zeta, \eta)),$$

где $\delta_n(z)$ определено в (4). Будем считать, что $0 < \alpha < 1$.

По определению функция Y лежит в классе $H^{\boldsymbol{\omega}+r}(G)$ тогда и только тогда, когда $Y(T^{-1}(\zeta, \eta)) \in H^{\boldsymbol{\omega}+r}(D)$.

Сформулируем основные результаты данной работы.

Теорема 1. *Пусть D – односвязная область, $\overline{D} \subset \operatorname{Int} Q \subset \mathbb{C}$, и пусть $G = T(\overline{D}), G \subset E \subset \mathbb{C}^2$, где преобразование $T(z)$ определено в* (5)*. Если некоторая голоморфная в G функция $F : G \to \mathbb{C}$ может быть приближена последовательностью полиномов $P_n(\zeta, \eta), \deg P_n \leqslant n$, двух* *переменных так, что для некоторой постоянной $C(F,G)$ при произвольном $n \in \mathbb{N}$ выполняются неравенства*

$$|F(\zeta,\eta) - P_n(\zeta,\eta)| \leqslant C(F,G)\delta_n^r(\zeta,\eta)\omega(\delta_n(\zeta,\eta))$$

при $(\zeta,\eta) \in \partial G$, то $F \in H^{\omega+r}(G)$.

Теорема 1 получается из следующего результата.

Теорема 2. *Пусть D – ограниченная односвязная область с заострениями, $\overline{D} \subset \operatorname{Int} Q, \Gamma = \partial D$. Пусть $f : \overline{D} \to \mathbb{C}$. Если найдется такая последовательность полиномов двух переменных $P_n(\zeta,\eta), \deg P_n \leqslant n$, что для некоторой постоянной $C(F,D)$, не зависящей от n, выполняются неравенства*

$$|f(z) - P_n(\mathfrak{P}(z),\mathfrak{P}'(z))| \leqslant C(F,D)\delta_n^r(z)\omega(\delta_n(z)), \tag{5'}$$

при $z \in \Gamma$, то функция f принадлежит классу $H^{\omega+r}(\overline{D})$.

Доказательство теоремы 2 требует установить вариант неравенства Бернштейна.

Теорема 3. *Пусть D – описанная выше область, $\overline{D} \subset \operatorname{Int} Q, \Gamma = \partial D$. Для произвольного полинома двух переменных $q_n(\zeta,\eta), \deg q_n \leqslant n$, для которого выполнено неравенство*

$$|q_n(\mathfrak{P}(z),\mathfrak{P}'(z))| \leqslant \delta_n^r(z)\omega(\delta_n(z)),$$

при $z \in \Gamma$, справедливо также неравенство

$$|q_n'(\mathfrak{P}(z),\mathfrak{P}'(z))| \leqslant C(D)\delta_n^{r-1}(z)\omega(\delta_n(z)),$$

при $z \in \Gamma$.

Далее будем считать, что область D удовлетворяет условиям теоремы 2.

§2. Начальные построения

Пусть

$$\boldsymbol{\omega}^0 = 2\boldsymbol{\omega}_1 k_1^0/m + 2\boldsymbol{\omega}_2 k_2^0/m,$$

где $m, k_1^0, k_2^0 \in \mathbb{Z}$, – внутренняя точка области D. Рассмотрим сигма-функцию Вейерштрасса $\sigma(u)$, определяемую выражением

$$\log\frac{\sigma(z)}{z} = -\int\limits_0^z \left(\int\limits_0^v \left(\mathfrak{P}(\eta) - \frac{1}{\eta^2}\right)d\eta\right)dv$$

Согласно ([4], гл. 1), $\sigma(z)$ – целая функция, имеющая простые нули в вершинах сетки периодов (т.е. в точках $2\boldsymbol{\omega}_1 n_1 + 2\boldsymbol{\omega}_2 n_2$, где $n_1, n_2 \in \mathbb{Z}$). Также имеет место формула

$$\sigma(z + 2\boldsymbol{\omega}_i) = -e^{2\eta_i(z+\boldsymbol{\omega}_i)}\sigma(z), \quad i = 1, 2, \tag{6}$$

где величины $\eta_i, i = 1, 2,$ – параметры функции Вейерштрасса.

Рассмотрим функцию

$$\mathfrak{I}(z) = \frac{\sigma(z - \boldsymbol{\omega}^0)^m}{\sigma(z)^{m-1}\sigma(z + 2k_1^0\boldsymbol{\omega}_1 + 2k_2^0\boldsymbol{\omega}_2)}.$$

Заметим, что $\mathfrak{I}(z)$ имеет нуль кратности m в точке $\boldsymbol{\omega}^0$ и полюс порядка m в точке 0. Также из (6) следует, что

$$\mathfrak{I}(z + 2\boldsymbol{\omega}_i)) = \mathfrak{I}(z)e^{2\eta_i(m\boldsymbol{\omega}^0 - 2k_1^0\boldsymbol{\omega}_1 - 2k_2^0\boldsymbol{\omega}_2)} = \mathfrak{I}(z), \quad i = 1, 2,$$

т.е. $\mathfrak{I}(z)$ – двоякопериодическая функция с периодами $2\boldsymbol{\omega}_1, 2\boldsymbol{\omega}_2$.

Пусть множество $\Omega = \Omega(D)$ получается из области D преобразованиями $z \to z + 2\boldsymbol{\omega}_1 n_1 + 2\boldsymbol{\omega}_2 n_2$:

$$\Omega = \big\{z : z = 2\boldsymbol{\omega}_1 n_1 + 2\boldsymbol{\omega}_2 n_2 + z_D,\ z_D \in D,\ \ n_1, n_2 \in \mathbb{Z}\big\}.$$

Целью данного параграфа является построение гармонической в $\mathbb{C} \setminus \Omega$ функции $V(z)$, принимающей на $\partial\Omega$ значения, равные

$$V_{\mathfrak{I}}(z) = -\log|\mathfrak{I}(z)|. \tag{7}$$

Воспользуемся решением вспомогательной задачи Дирихле. При произвольном натуральном L рассмотрим параллелограмм

$$Q_L = \big\{z : z = 2\boldsymbol{\omega}_1 k_1 + 2\boldsymbol{\omega}_2 k_2,\ \ k_1, k_2 \in \mathbb{R},\ \ |k_1| \leqslant L,\ \ |k_2| \leqslant L\big\}.$$

Далее рассмотрим функцию $\mathrm{w}_L(z)$, гармоническую в области $Q_L \setminus \overline{\Omega}$ и непрерывную вплоть до ее границы, удовлетворяющую следующим граничным условиям:

$$\mathrm{w}_L(z) = \begin{cases} 1, & \mathrm{z} \in \partial Q_L, \\ 0, & \mathrm{z} \in \partial\Omega \bigcap Q_L. \end{cases}$$

Нижеследующие леммы 1, 2 и 4 были сформулированы и доказаны в [2] для областей с границами, удовлетворяющими условиям Лаврентьева (общепринятым является также термин жордановы кривые с chord-arc условием). В настоящей работе допускаются области D с конечным числом внешних по отношению к ним углов на границе, равных 2π. Оказывается, что доказательства лемм из работы [2] проходят и для таких областей более общего вида. В силу важности этих утверждений и для удобства читателей мы проводим рассуждения из [2] для рассматриемого класса областей.

Лемма 1. *В произвольной ограниченной области* $\tilde{\Omega}, \tilde{\Omega} \subset \mathbb{C} \setminus \Omega$, *имеем:*

$$\mathrm{w}_L(z) \rightrightarrows 0, L \to \infty.$$

Доказательство. Выберем постоянную $L_0 > 1$ так, чтобы для произвольного $z = 2\boldsymbol{\omega}_1 s_1 + 2\boldsymbol{\omega}_2 s_2 \in \tilde{\Omega}$ выполнялись неравенства $|s_1| \leqslant L_0 - 1, |s_2| \leqslant L_0 - 1$. Положим

$$\varepsilon = \max_{u \in \partial Q_{L_0 - 1}} \mathrm{w}_{L_0}(u).$$

Далее применим принцип максимума модуля ([1]): поскольку $\mathrm{w}_{L_0}(z) \leqslant 1$ при $z \in \partial(Q_{L_0} \setminus \Omega)$ и $\mathrm{w}_{L_0}(z) \neq 1$, то из принципа максимума вытекает

$$\mathrm{w}_{L_0}(z) \leqslant \varepsilon < 1, \quad z \in \overline{Q}_{L_0 - 1} \setminus \Omega. \tag{8}$$

Заметим, что множество $\overline{Q}_{L_0-1} \setminus \Omega$ представляет собой множество $\overline{Q}_{L_0} \setminus \Omega$, из которого удалены параллелограммы со сторонами той же длины, что и у параллелограмма Q, какая-либо сторона которых принадлежит границе области Q_{L_0}. Покажем, что

$$\mathrm{w}_{2L_0}(z) \leqslant \varepsilon \mathrm{w}_{L_0}(z), \quad z \in \partial Q_{L_0}.$$

Пусть при произвольном натуральном k параллелограмм $\tilde{Q}_k$ представляет собой сдвиг параллелограмма Q_k на половину “размера” параллелограмма $Q_{2L_0} : \tilde{Q}_k = Q_k + 2\boldsymbol{\omega}_1 L_0 + 2\boldsymbol{\omega}_2 L_0$. Функция

$$\tilde{\mathrm{w}}_{L_0}(z) = \mathrm{w}_{L_0}(z - 2\boldsymbol{\omega}_1 L_0 - 2\boldsymbol{\omega}_2 L_0)$$

является гармонической в $\tilde{Q}_{L_0} \setminus \Omega$. В соответствии с (8), везде в $\tilde{Q}_{L_0-1} \setminus \Omega$, следовательно, и на участке границы переллелограмма Q_{L_0}, лежащем в $\tilde{Q}_{L_0-1} \setminus \Omega$, эта функция удовлетворяет неравенству

$$\tilde{\mathrm{w}}_{L_0}(z) < \varepsilon.$$

Кроме того, в силу выбора функций $\mathrm{w}_{2L_0}(z)$ и $\tilde{\mathrm{w}}_{L_0}(z)$, неравенство

$$\mathrm{w}_{2L_0}(z) \leqslant \tilde{\mathrm{w}}_{L_0}(z)$$

справедливо на $\partial(\tilde{Q}_{L_0} \setminus \Omega)$. По принципу максимума, оно справедливо и в $\tilde{Q}_{L_0} \setminus \Omega$. Таким образом,

$$\mathrm{w}_{2L_0}(z) < \varepsilon = \varepsilon \mathrm{w}_{L_0}(z), \quad z \in \partial Q_{L_o} \bigcap (\tilde{Q}_{L_0-1} \setminus \Omega).$$

Последовательно двигая параллелограмм $\tilde{Q}_{L_0}$ вдоль всех четырех границ паралеллограмма Q_{2L_0} на целые кратные величин $2\boldsymbol{\omega}_1$ или $2\boldsymbol{\omega}_2$, мы получим, что последнее неравенство справедливо везде на ∂Q_{L_0}. Еще раз применяя принцип максимума для функций $\mathrm{w}_{2L_0}(z)$ и $\varepsilon \mathrm{w}_{L_0}(z)$ в области $Q_{L_0} \setminus \overline{\Omega}$ и пользуясь неравенствами (8), заключаем, что

$$\mathrm{w}_{2L_0}(z) \leqslant \varepsilon \mathrm{w}_{L_0}(z) \leqslant \varepsilon^2, \quad z \in Q_{L_0-1} \setminus \Omega.$$

Повторяя эту процедуру N раз, получим, что

$$\mathrm{w}_{NL_0}(z) \leqslant \varepsilon^N, \quad z \in Q_{L_0-1} \setminus \Omega.$$

Из принципа максимума легко следует, что $\mathrm{w}_{L_2}(z) < \mathrm{w}_{L_1}(z)$ при $L_1 < L_2$, откуда и вытекает утверждение леммы. □

Пусть, по-прежнему, функция $V_{\mathfrak{J}}$ определена в (7). Положим

$$V_{\min} = \min_{z \in \partial D} V_{\mathfrak{J}}(z), \quad V_{\max} = \max_{z \in \partial D} V_{\mathfrak{J}}(z).$$

Пусть $V_L^+(z), V_L^-(z)$ – решения задачи Дирихле в области $Q_L \setminus \overline{\Omega}$ со следующими граничными условиями:

$$V_L^+(z) = \begin{cases} V_{\max}, & z \in \partial Q_L, \\ V_{\mathfrak{J}}(z), & z \in \partial\Omega, \end{cases}$$

$$V_L^-(z) = \begin{cases} V_{\min}, & z \in \partial Q_L, \\ V_{\mathfrak{J}}(z), & z \in \partial\Omega. \end{cases}$$

Из принципа максимума вытекает, что при $L \to \infty$ последовательность функций $V_L^+(z)$ – убывающая, а последовательность функций $V_L^-(z)$ – возрастающая.

Кроме того,

$$V_L^+(z) - V_L^-(z) = (V_{\max} - V_{\min}) \mathrm{w}_L(z).$$

Применяя лемму 1, заключаем, что существуют пределы

$$\lim_{L \to \infty} V_L^+(z) = \lim_{L \to \infty} V_L^-(z) = V(z),$$

и функция $V(z)$ – гармоническая в $\mathbb{C} \setminus \Omega$. Далее мы установим некоторые ограничения на рост полиномов от $\mathfrak{P}, \mathfrak{P}'$ вблизи полюсов функций $\mathfrak{P}, \mathfrak{P}'$.

§3. Оценка сверху для полиномов

Пусть функция $\delta_n(z)$ определена в (4) и функция $\mathrm{w}(z) : \Gamma \to \mathbb{R}$ удовлетворяет следующим условиям.

1. $\mathrm{w}(z) > A_1 n^{-A_2}$, $A_1 = A_1(D) > 0$, $A_2 = A_2(D) > 0$.

2. Для точек $z_1, z_2 \in \Gamma$, где $|z_1 - z_2| \leqslant \delta_n(z_1)$, справедливо соотношение $\mathrm{w}(z_2) \asymp \mathrm{w}(z_1)$, причем постоянные соизмеримости зависят только от области D, но не от точек z_1, z_2;

3. Для некоторых положительных постоянных $k_1 = k_1(D)$, $C_1 = C_1(D)$ и $z_1, z_2 \in \Gamma$ справедливо неравенство

$$\mathrm{w}(z_2) \leqslant C_1 \mathrm{w}(z_1) \left(\frac{|z_2 - z_1|}{\delta_n(z_1)} + 1 \right)^{k_1}.$$

Замечание 2. В основном нас будет интересовать случай $\mathrm{w}(z) = \delta_n^r(z)\omega(\delta_n(z))$. Неравенства (1)–(3) в таком случае вытекают из геометрических свойств отображения области с заострениями на внешность единичного круга, полученными в [3].

Лемма 2. *Пусть функция* $\mathrm{w}(z)$ *удовлетворяет условиям* (1)–(3). *Тогда найдется некоторое число* $\varepsilon_0 > 0$ *такое, что для произвольного многочлена двух переменных* $q_n(\zeta, \eta), \deg q_n \leqslant n$, *удовлетворяющего неравенству*

$$|q_n(\mathfrak{P}(z), \mathfrak{P}'(z))| \leqslant \mathrm{w}(z),$$

при $z \in \Gamma$ *будет справедливо неравенство*

$$|q_n(\mathfrak{P}(z), \mathfrak{P}'(z))| \leqslant C_2 e^{C_3 n},$$

при $z \in Q_{\varepsilon_0}$, *где* $Q_{\varepsilon_0} = \mathbb{C} \setminus (\Omega \cup \bigcup\limits_{n_1, n_2 \in \mathbb{Z}} \{|z - 2\boldsymbol{\omega}_1 n_1 - 2\boldsymbol{\omega}_2 n_2| < \varepsilon_0\})$, $C_2 = C_2(D)$, $C_3 = C_3(D)$.

Доказательство. Воспользуемся обозначениями из п. 2. Рассмотрим функцию

$$\mathfrak{m}(z) = \log |\mathfrak{I}(z)| + V(z),$$

гармоническую в области $\mathbb{C} \setminus (\overline{\Omega} \bigcup \{2n_1\boldsymbol{\omega}_1 + 2n_2\boldsymbol{\omega}_2, n_1, n_2 \in \mathbb{Z}\})$. Как нетрудно видеть, $\mathfrak{m} = 0$ при $z \in \partial\Omega$.

Проведя процедуру, аналогичную построению функции $V(z)$, построим гармоническую в $\mathbb{C} \setminus \Omega$ функцию $U(z)$, удовлетворяющую следующему граничному условию:

$$U(z) = \log \mathrm{w}(z),$$

при $z \in \partial\Omega$.

Рассмотрим, наконец, функцию

$$\chi(z) = U(z) + 3n\mathfrak{m}(z).$$

Выберем ε так, чтобы $\overline{\Omega} \cap \bigcup_{n_1,n_2\in\mathbb{Z}}\{|z - 2\boldsymbol{\omega}_1 n_1 - 2\boldsymbol{\omega}_2 n_2| \leqslant \varepsilon\} = \varnothing$.

Покажем, что найдется $\varepsilon_n \leqslant \varepsilon$ такое, что при

$$z \in \mathbb{C} \setminus \Big(\Omega \cup \bigcup_{n_1,n_2\in\mathbb{Z}} \{|z - 2\boldsymbol{\omega}_1 n_1 - 2\boldsymbol{\omega}_2 n_2| \leqslant \varepsilon_n\}\Big)$$

выполняется неравенство

$$\chi(z) > \log|q_n(\mathfrak{P}(z), \mathfrak{P}'(z))|. \tag{9}$$

В самом деле, на границе множества Ω это неравенство принимает вид

$$\log \mathrm{w}(z) > \log|q_n(\mathfrak{P}(z), \mathfrak{P}'(z))|,$$

при $z \in \partial\Omega$. Последнее неравенство непосредственно вытекает из предположений относительно функций $q_n(\mathfrak{P}(z), \mathfrak{P}'(z))$.

Точки $2n_1\boldsymbol{\omega}_1 + 2n_2\boldsymbol{\omega}_2$ при $n_1, n_2 \in \mathbb{Z}$ являются полюсами порядка 2 функции Вейерштрасса $\mathfrak{P}$ и полюсами порядка 3 функции $\mathfrak{P}'$. Следовательно, субгармоническая двоякопериодическая функция в правой части неревенства (9) имеет в этих точках логарифмический полюс порядка не выше $3n$.

Так как $U(z)$ и $V(z)$ – гармонические в $\mathbb{C} \setminus \Omega$ функции, а $\mathfrak{I}(z)$, по построению, имеет полюсы порядка m в точках $2n_1\boldsymbol{\omega}_1 + 2n_2\boldsymbol{\omega}_2$ при $n_1, n_2 \in \mathbb{Z}$, то функция $\chi(z)$ имеет в этих точках логарифмический полюс порядка $3mn, m > 1$.

Таким образом, выбирая ε_n достаточно малым, можно добиться, чтобы неравенство (9) выполнялось на окружностях $\{|z - 2n_1\boldsymbol{\omega}_1 - 2n_2\boldsymbol{\omega}_2| < \varepsilon_n\}$, $n_1, n_2 \in \mathbb{Z}$. Согласно принципу максимума, получаем искомое неравенство.

Из доказанного вытекает, что неравенство (9) во всяком случае справедливо на множестве Q_ε при произвольном n. Преобразуя неравенство (9), получаем

$$\log|q_n(\mathfrak{P}(z), \mathfrak{P}'(z))| < 2\max_{Q_\varepsilon} U(z) + n \cdot 3\max_{Q_\varepsilon} \mathfrak{m}(z), z \in Q_\varepsilon,$$

что с учетом гармоничности функций $U(z)$ и $\mathfrak{m}(z)$ на множестве Q_ε доказывает лемму 2. □

§4. Неравенство типа Бернштейна

Для продолжения доказательства введем следующие леммы.

Лемма 3. (П. М. Тамразов [5]) *Пусть задана ограниченная область с заострениями $J \subseteq D$. Тогда найдется постоянная $C_4 = C_4(J)$ такая, что для произвольных положительных постоянных k, a, b и для произвольной субгармонической в области J функции $h(z)$, удовлетворяющей неравенству*

$$h(\zeta) \leqslant k \log(a|\zeta - z_0| + b), \zeta \in \partial J,$$

справедливо неравенство

$$h(\zeta) \leqslant k[\log(a|\zeta - z_0| + b) + C_4], \zeta \in J.$$

Лемма 4. *Пусть функция $\mathrm{w}(z)$ удовлетворяет условиям 1–3 п. 3, а многочлен $q_n(\zeta, \eta)$ удовлетворяет условиям леммы 2. Тогда существует постоянная $C_5 = C_5(D)$ такая, что для произвольной точки $z_0 \in \Gamma$ справедливо неравенство*

$$|q_n(\mathfrak{P}(\zeta), \mathfrak{P}'(\zeta))| \leqslant C_5 \mathrm{w}(z_0),$$

если $|\zeta - z_0| = \delta_n(z_0)$.

Доказательство. Зафиксируем некоторую точку $z_0 \in \Gamma$.

1) Рассмотрим сперва случай $\zeta \in D$. В силу условий на полиномы $q_n(\zeta, \eta)$ и функцию w, имеем

$$\log |q_n(\mathfrak{P}(\zeta), \mathfrak{P}'(\zeta))| \leqslant \log \mathrm{w}(\zeta) \leqslant \log(C_1 \mathrm{w}(z_0)) + k_1 \log\left(\frac{|\zeta - z_0|}{\delta_n(z_0)} + 1\right)$$

при $\zeta \in \Gamma$.

Применяя лемму 3 к области $J = D$ и субгармонической в области J функции $\log |q_n(\mathfrak{P}(\zeta), \mathfrak{P}'(\zeta))| - \log(C_1 \mathrm{w}(z_0))$, заключаем, что справедливо следующее неравенство:

$$\log |q_n(\mathfrak{P}(\zeta), \mathfrak{P}'(\zeta))| - \log(C_1 \mathrm{w}(z_0)) \leqslant k_1 \left[\log\left(\frac{|\zeta - z_0|}{\delta_n(z_0)} + 1\right) + C_4\right],$$

при $\zeta \in D$.

Если теперь $|\zeta - z_0| = \delta_n(z_0), \zeta \in D$, то

$$\log |q_n(\mathfrak{P}(\zeta), \mathfrak{P}'(\zeta))| \leqslant \log(C_1 \mathrm{w}(z_0)) + k_1[\log 2 + C_4]$$

при $\zeta \in D$, и мы заключаем, что искомое неравенство справедливо на части окружности $|z - z_0| = \delta_n(z_0)$, лежащей в D.

2) Докажем искомое неравенство при $\zeta \in Q_\varepsilon$, где множество Q_ε определено в лемме 2, $|\zeta - z_0| = \delta_n(z_0)$. На границе множества Q_ε справедливы неравенства

$$\log|q_n(\mathfrak{P}(\zeta), \mathfrak{P}'(\zeta))| \leqslant \begin{cases} \log(C_1 \mathrm{w}(z_0)) + k_1 \log(|\zeta - z_0|/\delta_n(z_0) + 1), & \zeta \in \Gamma \\ C_3 n + \log C_2, & \zeta \in \partial Q_\varepsilon \setminus \Gamma, \end{cases}$$

где постоянная C_1 фигурирует в условии 3) на функцию $\mathrm{w}(z)$, а постоянные C_3, C_2 определены в лемме 2. Из условий на функцию $\mathrm{w}(z)$ вытекает, что

$$\log \mathrm{w}(z_0) \geqslant \log A_1 - A_2 \log n,$$

значит, для некоторой постоянной $C_6 = C_6(D)$ имеем

$$\log(C_1 \mathrm{w}(z_0)) + C_6 n \geqslant 0.$$

Отсюда вытекает, что на границе множества Q_ε справедливо неравенство

$$\log|q_n(\mathfrak{P}(\zeta), \mathfrak{P}'(\zeta))| \leqslant \log(C_1 \mathrm{w}(z_0)) + k_1 \log\left(\frac{|\zeta - z_0|}{\delta_n(z_0)} + 1\right) + (C_6 + C_3)n + \log C_2.$$

Рассмотрим гармоническую в области $\operatorname{Int} Q_\varepsilon$ функцию $g(z)$, принимающую на ее границе следующие значения:

$$g(z) = \begin{cases} 0, & z \in \Gamma, \\ 1, & z \in \partial Q_\varepsilon \setminus \Gamma. \end{cases}$$

Тогда предыдущее неравенство можно переписать в виде

$$\log|q_n(\mathfrak{P}(\zeta), \mathfrak{P}'(\zeta))| \leqslant \log(C_1 \mathrm{w}(z_0)) + k_1 \log\left(\frac{|\zeta - z_0|}{\delta_n(z_0)} + 1\right) + ((C_3 + C_6)n + \log C_2) g(\zeta)$$

при $\zeta \in \partial Q_\varepsilon$.

Применяя еще раз лемму 3 к области $J = Q_\varepsilon$ и субгармонической в J функции $\log|q_n(\mathfrak{P}(\zeta), \mathfrak{P}'(\zeta))| - ((C_3 + C_6)n + \log C_2) g(\zeta) - \log(C_1 \mathrm{w}(z_0))$, приходим к неравенству:

$$\log|q_n(\mathfrak{P}(\zeta), \mathfrak{P}'(\zeta))| - ((C_3 + C_6)n + \log C_2) g(\zeta) - \log(C_1 \mathrm{w}(z_0))$$

$$\leqslant k_1 \left[\log\left(\frac{|\zeta - z_0|}{\delta_n(z_0)} + 1\right) + C_4\right] \tag{10}$$

при $\zeta \in Q_\varepsilon$.

В силу рассуждений, аналогичных приведенным при доказательстве леммы 4 в [1], справедливо соотношение

$$\delta_n(z_0) \asymp \operatorname{dist}\left(z_0, \{\zeta \in Q_\varepsilon : |g(\zeta)| = \frac{1}{n}\}\right),$$

значит, для некоторой постоянной $C_7 = C_7(D)$ верна оценка

$$|g(z)| \leqslant \frac{C_7}{n}$$

при $|z - z_0| = \delta_n(z_0)$.

Окончательно, (10) принимает следующий вид:

$$\log |q_n(\mathfrak{P}(\zeta), \mathfrak{P}'(\zeta))| \leqslant C_8 + \log(C_1 \mathrm{w}(z_0))$$

при $\zeta \in Q_\varepsilon, |\zeta - z_0| = \delta_n(z_0)$, где $C_8 = C_8(D)$. Лемма доказана. □

Далее перейдем к доказательству основного результата данного параграфа.

Теорема 3′. *Пусть D – область, определенная в п.* 1, *функция* $\mathrm{w}(z)$ *удовлетворяет условиям* 1)–3) *п.* 3. *Для произвольного полинома двух переменных $q_n(\zeta, \eta), \deg q_n \leqslant n$, для которого выполнено неравенство*

$$|q_n(\mathfrak{P}(z), \mathfrak{P}'(z))| \leqslant \mathrm{w}(z) \tag{11}$$

при $z \in \Gamma$, справедливо также неравенство

$$|q_n^{(k)}(\mathfrak{P}(z), \mathfrak{P}'(z))| \leqslant C_k \frac{\mathrm{w}(z)}{\delta_n^k(z)}$$

при $z \in \Gamma$.

Доказательство. Пользуясь леммой 4, оценим производную полинома q_n для произвольного $z_0 \in \Gamma$:

$$|q_n^{(k)}(\mathfrak{P}(z_0), \mathfrak{P}'(z_0))| = \left| \frac{k!}{2\pi i} \int\limits_{|z-z_0|=\delta_n(z_0)} \frac{q_n(\mathfrak{P}(z), \mathfrak{P}'(z))}{(z-z_0)^{k+1}} dz \right|$$
$$\leqslant \frac{C_k}{2\pi} \int\limits_{|z-z_0|=\delta_n(z_0)} \frac{\mathrm{w}(z_0)}{|z-z_0|^{k+1}} |dz| = C_k \frac{\mathrm{w}(z_0)}{\delta_n^k(z_0)}.$$

С учетом замечания 2 п. 3 из данной теоремы следует теорема 3, сформулированная в п. 1. □

§5. Заключительная часть доказательства

Используя результаты предыдущих параграфов, докажем основную теорему, сформулированную во введении.

В соответствии с теоремой Тамразова [5] достаточно доказать неравенство

$$|f^{(r)}(z_1) - f^{(r)}(z_2)| \leqslant C_f \omega(|z_1 - z_2|),$$

для $z_1, z_2 \in \Gamma$.

Для доказательства данного неравенства построим некоторое разложение функции f в ряд.

Для весов $\delta_t(z)$, связанных с рассматриваемыми областями, справедливы следующие неравенства:

$$C_9 \left(\frac{t_1}{t_2}\right)^{k_2} \geqslant \frac{\delta_{t_2}(z)}{\delta_{t_1}(z)} \geqslant C_{10} \left(\frac{t_1}{t_2}\right)^{k_3}, \quad z \in \Gamma.$$

Здесь $C_9 = C_9(D)$, $C_{10} = C_{10}(D)$, $k_2 = k_2(D)$, $k_3 = k_3(D)$. Отсюда заключаем, что для произвольного $L > 0$ справедливы неравенства

$$C_9 L^{k_2} \geqslant \frac{\delta_{L^{n-1}}(z)}{\delta_{L^n}(z)} \geqslant C_{10} L^{k_3}, \quad z \in \Gamma.$$

Фиксируя L так, чтобы выполнялось условие

$$r_0 = C_{10} L^{k_3} > 1, \tag{12}$$

и полагая $R = C_9 L^{k_2}$, получим неравенства

$$R \geqslant \frac{\delta_{L^{n-1}}(z)}{\delta_{L^n}(z)} \geqslant r_0 > 1 \tag{13}$$

при $z \in \Gamma$, где $R = R(D)$, $r_0 = r_0(D)$, $L = L(D)$.

Обозначим

$$P_n(z) = P_n(\mathfrak{P}(\zeta), \mathfrak{P}'(\zeta)), \quad \Delta_n(z) = P_{L^{n+1}}(z) - P_{L^n}(z).$$

На границе области D в силу условия $(5')$ теоремы 2, получаем при $z \in \Gamma$:

$$\begin{aligned} |\Delta_n(z)| &\leqslant |P_{L^n}(z) - f(z)| + |P_{L^{n+1}}(z) - f(z)| \\ &\leqslant 2C(F, D)\delta^r_{L_n}(z)\omega(\delta_{L^n}(z)). \end{aligned} \tag{14}$$

Пользуясь результатами теоремы $3'$ для произвольного $z \in \Gamma$, мы получаем

$$|\Delta_n^{(r)}(z)| \leqslant C'_{10} \frac{\delta^r_{L^n}(z)\omega(\delta_{L^n}(z))}{\delta^r_{L^n}(z)} = C'_{10}\omega(\delta_{L^n}(z)).$$

Известно, что можно выбрать постоянные $C_{11}=C_{11}(D)$, $k_4=k_4(D)>0$ таким образом, чтобы при произвольных $n \in \mathbb{N}$ и $z \in \Gamma$ выполнялось неравеснтво

$$\delta_n(z) \leqslant \frac{C_{11}}{n^{k_4}}. \tag{15}$$

Известно, что функция $\omega(\delta)$, которая удовлетворяет условию $(4')$, может быть представлена как

$$\omega(t) \leqslant Ct^{\varepsilon_0}$$

с некоторым $\varepsilon_0 > 0$ при $t < 1$.

Применяя теорему $3'$ и указанные оценки, мы получим неравенство

$$\omega(\delta_{L_n}(z)) \leqslant \frac{C_{12}}{L^{k_5 n}},$$

при $z \in \partial\Gamma$, поэтому соотношение (14) показывает, что функция

$$f^{(r)}(z) = P_L^{(r)}(z) + \sum_{n=1}^{\infty} \Delta_n^{(r)}(z),$$

непрерывна.

Пусть $z_1, z_2 \in \Gamma$. Имеем

$$|f^{(r)}(z_1) - f^{(r)}(z_2)| \leqslant |P_L^{(r)}(z_1) - P_L^{(r)}(z_2)| + \left|\sum_{n=1}^{\infty} (\Delta_n^{(r)}(z_1) - \Delta_n^{(r)}(z_2))\right|. \tag{16}$$

Поскольку по построению функция $P_L(z)$ представляет собой полином степени L от функций $\mathfrak{P}, \mathfrak{P}'$, аналитических внутри параллелограмма периодов, для некоторых постоянных $C'_{13} = C'_{13}(D)$, $C_{13} = C_{13}(D)$ получаем

$$|P_L^{(r)}(z_1) - P_L^{(r)}(z_2)| \leqslant C'_{13}|z_1 - z_2| \leqslant C_{13}\omega(|z_1 - z_2|). \tag{17}$$

Оценим теперь второе слагаемое в правой части формулы (16). Для этого разделим его на две части. Выберем число $N_0 = N_0(z_1, |z_1 - z_2|)$ таким образом, чтобы выполнялись неравенства

$$\delta_{L^{N_0+1}}(z_1) \leqslant |z_1 - z_2| < \delta_{L^{N_0}}(z_1). \tag{18}$$

При $n \leqslant N_0$ имеем

$$\left|\Delta_n^{(r)}(z_1) - \Delta_n^{(r)}(z_2)\right| = \left|\int\limits_{\Gamma_{z_1,z_2}} \Delta_n^{(r+1)}(z)dz\right|,$$

где Γ_{z_1,z_2} – дуга минимальной длины из всех дуг, лежащих в замкнутой области $\overline{D}$ и соединяющих точки z_1 и z_2. Пользуясь теоремой $3'$ для $z \in \Gamma_{z_1,z_2}$, находим, что справедливо неравенство

$$\left|\Delta_n^{(r+1)}(z)\right| \leqslant C_{14}(D)\frac{\omega(\delta_{L^n}(z_1))}{\delta_{L^n}(z_1)}.$$

Из последних соотношений вытекает оценка

$$\begin{aligned}\left|\Delta_n^{(r)}(z_1) - \Delta_n^{(r)}(z_2)\right| &\leqslant C_{14}(D)\int\limits_{\Gamma_{z_1,z_2}} \frac{\omega(\delta_{L^n}(z_1))}{\delta_{L^n}(z_1)}|dz| \\ &\leqslant C_{14}(D)|\Gamma_{z_1,z_2}|\frac{\omega(\delta_{L^n}(z_1))}{\delta_{L^n}(z_1)}.\end{aligned}$$

Геометрические свойства рассмотренных областей влекут следующее неравенство:

$$|\Gamma_{z_1,z_2}| \leqslant C|z_1 - z_2|. \tag{19}$$

В таком случае, получаем

$$\sum_{n=1}^{N_0}|\Delta_n^{(r)}(z_1) - \Delta_n^{(r)}(z_2)| \leqslant C_{15}|z_1 - z_2|\sum_{n=0}^{N_0}\frac{\omega(\delta_{L^n}(z_1))}{\delta_{L^n}(z_1)}. \tag{19$'$}$$

Для модулей непрерывности $\omega(t)$, удовлетворяющих условию $(4')$, справедливо соотношение: при $0 < x < y$ выполнено неравенство:

$$\frac{\omega(y)}{y} \leqslant A\left(\frac{x}{y}\right)^{\varkappa}\frac{\omega(x)}{x}, A = A(\omega), 0 < \varkappa < 1.$$

Учитывая это неравенство и неравенства для $\delta_{L^k}(z)$, получим оценки

$$\frac{\omega(\delta_{L^n}(z_1))}{\delta_{L^n}(z_1)} \leqslant AL^{-k_6(N_0-n)}\frac{\omega(\delta_{L^{N_0}}(z_1))}{\delta_{L^{N_0}(z_1)}}, 0 \leqslant n \leqslant N_0 - 1,$$

с некоторой $k_6 > 0$, поэтому соотношения (19) и (19′) влекут оценки

$$\left|\sum_{n=0}^{N_0}(\Delta_n^{(r)}(z_1) - \Delta_n^{(r)}(z_2))\right| \leqslant C_{16}\frac{\omega(\delta_{L^{N_0}}(z_1))}{\delta_{L^{N_0}}(z_1)}|z_1 - z_2| \leqslant C_{16}\omega(|z_1 - z_2|), \tag{20}$$

где $C_{16} = C_{16}(D)$. Оценим теперь оставшуюся часть суммы в (16).

Пользуясь неравенствами (14), имеем

$$\left|\sum_{n=N_0+1}^{\infty}(\Delta_n^{(r)}(z_1) - \Delta_n^{(r)}(z_2))\right| \leqslant \sum_{n=N_0+1}^{\infty}(|\Delta_n^{(r)}(z_1)| + |\Delta_n^{(r)}(z_2)|) \leqslant C\sum_{n=N_0+1}^{\infty}(\omega(\delta_{L^n}(z_1)) + \omega(\delta_{L^n}(z_2))).$$

Пользуясь соотношениями (19), (13), (18), получим

$$\left|\sum_{n=N_0+1}^{\infty}(\Delta_n^{(r)}(z_1) - \Delta_n^{(r)}(z_2))\right| \leqslant C_{17}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{r_0^{n\varepsilon_0}}\omega(\delta_L^{N_0+1}(z_1)) \leqslant C_{18}\omega(\delta_L^{N_0+1}(z_1)) \leqslant C_{19}\omega(|z_1 - z_2|). \tag{21}$$

Используя неравенства (17), (20), (21), приходим к доказательству теоремы 2.

Список литературы

1. А. В. Хаустов, Н. А. Широков, *Полиномиальные приближения на замкнутых подмножествах эллиптических кривых.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **302** (2003), 178–187.
2. А. В. Хаустов, Н. А. Широков, *Обратная теорема приближения на подмножествах эллиптических кривых.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **314** (2004), 257–271.
3. К. А. Синцова, Н. А. Широков, *Приближения полиномами от двоякопериодических функций Вейерштрасса.* — Вест. СПбГУ. Математика. Механика. Астрономия **10(68)**, Вып. 1 (2023).
4. Н. И. Ахиезер, *Элементы теории эллиптических функций*, Наука, Главная редакция физико-математической литературы, Москва, 1970.
5. П. М. Тамразов, *Гладкие и полиномиальные приближения.* Киев, “Наукова думка”, 1975.

Sintsova K. A. Inverse theorem for approximation on subsets of a domain with cups.

Let $\mathfrak{P}(z)$ be a doubly periodic Weierstrass function with periods $2\boldsymbol{\omega}_1$, $2\boldsymbol{\omega}_2$, and let Q be the parallelogramm of periods, $Q = \{z \in \mathbb{C} : z =$

$2\alpha_1\boldsymbol{\omega}_1 + 2\alpha_2\boldsymbol{\omega}_2, \alpha_1, \alpha_2 \in [0, 1)\}$. We consider a simply connected domain $D, \overline{D} \subset Q$, such that its boundary ∂D contains cusps, and a function f that is analytic in D and continuous on ∂D. We assume that the modulus of continuity $\omega(t)$ satisfyes the relation

$$\int\limits_0^x \frac{\omega(t)}{t} dt + x \int\limits_x^\infty \frac{\omega(t)}{t^2} dt \leqslant c\omega(x).$$

Let a function Φ map conformally the domain $\mathbb{C} \setminus D$ onto $\mathbb{C} \setminus \mathbb{D}$ with the normalization $\Phi(\infty) = \infty, \Phi'(\infty) > 0$. We put $L_{1+t} = \{z \in \mathbb{C} \setminus D : |\Phi(z)| = 1 + t\}, \delta_n(z) = \operatorname{dist}(z, L_{1+\frac{1}{n}}), z \in \partial D$. The main result of the paper is the following statement.

Theorem 1. *Assume that there exists a sequence of polynomials $P_n(u, v)$, $\deg P_n \leqslant n$, such that*

$$|f(z) - P_n(\mathfrak{P}(z), \mathfrak{P}'(z))| \leqslant C\delta_n^r(z)\omega(\delta_n(z)), \quad z \in \partial D.$$

C is independent on n and z. Then $f \in H^{r+\omega}(D)$.

Национальный исследовательский
университет Высшая школа экономики,
Кантемировская ул., 3,
194100 Санкт-Петербург, Россия
E-mail: kseniasintlead@gmail.com

Поступило 11 июля 2023 г.