Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 527, 2023 г.

О. В. Сильванович, Н. А. Широков

ФУНКЦИЯ Б. Я. ЛЕВИНА ДЛЯ НЕКОТОРЫХ СОВОКУПНОСТЕЙ ПРОМЕЖУТКОВ

§1. Введение

В работах [1, 2] Б. Я. Левин определил несколько важных классов субгармонических на всей комплексной плоскости функций. Мажоранты в каждом таком классе обладают важными свойствами, их применение оказалось очень полезным в спектральной теории дифференциальных операторов ([3–5]).

В задачах приближения целыми функциями экспоненциального типа функций, определённых на счётном множестве дизъюнктных отрезков, мажоранта Б. Я. Левина использовалась в качестве шкалы скорости приближения в зависимости от типа функции ([6–8]). Поэтому в дальнейшем эту мажоранту будем называть функцией Б. Я. Левина для совокупности отрезков – определение ниже.

Теория Б. Я. Левина при её приложении без дополнительных рассуждений позволяла изучать задачу аппроксимации для соизмеримых по длине отрезков вещественной прямой с соизмеримыми расстояниями между соседними отрезками. Поскольку функция Б. Я. Левина существует для гораздо более широкого множества счётных совокупностей отрезков вещественной прямой, для задач аппроксимации существенно изучить её поведение в окрестностях отрезков из совокупностей, в которых отрезки не соизмеримы по длине. В данной работе мы предъявляем некоторые множества отрезков вещественной прямой, длина которых стремится к нулю при приближении отрезка к бесконечности, и для функции Б. Я. Левина, связанной с такой совокупностью отрезков, выясняем её поведение в окрестности каждого отрезка.

Ключевые слова: субгармонические функции, мажоранты, функция Б. Я. Левина.

Исследования второго автора выполнены за счёт гранта Российского научного фонда No. 23-11-00171 `https://rscf.ru/project/23-11-00171/`.

§2. Основные определения и формулировки

Пусть $a_k < b_k < a_{k+1},\ k \in \mathbb{Z},\ I_k \overset{\text{def}}{=} [a_k, b_k],\ J_k \overset{\text{def}}{=} [b_k, a_{k+1}],\ E = \bigcup\limits_{k\in\mathbb{Z}} J_k$. На числа a_k, b_k наложим следующие условия:

$$a)\ a_0 = -1,\ b_0 = 1,\ a_1 = 2^{n_o} \overset{\text{def}}{=} C,\ n_0 \geqslant 1,\ b_{-1} = -2^{n_0};$$

b) для всех $n \geqslant n_0$ существуют $k = k(n)$ такое, что $a_k = 2^n$, и $l = l(n)$, такое что $-2^n = b_l$;

c) если $[a_k, b_k] \subset [2^m, 2^{m+1}]$ или $[a_k, b_k] \subset [-2^{m+1}, -2^m]$, то $b_k - a_k = 2^{-m\alpha},\ \alpha > 0$;

d) существует постоянная $c_1 > 1$ такая, что, если $J_k \subset [2^m, 2^{m+1}]$ или $J_k \subset [-2^{m+1}, -2^m]$, то $C \cdot 2^{-m\alpha} \leqslant a_{k+1} - b_k \leqslant c_1 \cdot C \cdot 2^{-m\alpha}$.

Пусть $\sigma > 0$. В работах Б. Я. Левина (см. [1, 2]) с множеством E, на которое накладываются некоторые условия, связывается функция, которую мы далее обозначаем через $f_{E,\sigma}(z)$ и называем функцией Б. Я. Левина. Условия, накладываемые на промежутки I_k и J_k в настоящей работе, гарантируют существование функции $f_{E,\sigma}(z)$: см. [2], теорема 3.8.

Функция $f_{E,\sigma}(z)$ обладает следующими свойствами:

1. $f_{E,\sigma}(z)$ субгармонична на всей комплексной плоскости $\mathbb{C}$ и гармоническая в $\mathbb{C} \setminus E$;

2. $f_{E,\sigma}(z) = 0$, если $x \in E;\ f_{E,\sigma}(z) > 0,\ z \in \mathbb{C} \setminus E$;

3. $\varlimsup\limits_{z\to\infty} \dfrac{f_{E,\sigma}(z)}{|z|} = \sigma,\ f_{E,\sigma}(\overline{z}) = f_{E,\sigma}(z)$;

4. для любой функции g, субгармонической на всей комплексной плоскости $\mathbb{C}$, удовлетворяющей условиям $g(x) \leqslant 0,\ x \in E$, и $\varlimsup\limits_{z\to\infty} \dfrac{g(z)}{|z|} \leqslant \sigma$, справедливо соотношение $g(z) \leqslant f_{E,\sigma}(z),\ z \in \mathbb{C}$.

Пусть $M_k = \max\limits_{x\in I_k} f_{E,\sigma}(x),\ |I_k| = b_k - a_k,\ k \in \mathbb{Z}$.

Теорема 1. *Существует постоянная $c_0 = c_0(\alpha)$ такая, что при $C \geqslant c_0$ справедливо соотношение*

$$M_k \leqslant 6\sigma |I_k|,\ k \in \mathbb{Z}. \tag{1}$$

Для $t > 0$ положим $L_t \overset{\text{def}}{=} \{z \in \mathbb{C} : f_{E,1}(z) = t\},\ \rho_t(z) \overset{\text{def}}{=} \operatorname{dist}(z, L_t)$.

Пусть $\xi_k = \frac{1}{2}(b_k + a_{k+1}),\ |J_k| = a_{k+1} - b_k,\ l_k = \frac{1}{2}|J_k|,\ k \in \mathbb{Z}$.

Теорема 2. *Пусть C удовлетворяет условиям теоремы 1. Существуют постоянные $c_j, c_{j'}(j = 2, 3)$ и c_4^* такие что при $x \in J_k,\ 0 <$*

$t \leqslant c_4^*|I_k|,\ k \in \mathbb{Z}$, *имеются оценки*

$$c_2\left(\sqrt{l_k^2-(x-\xi_k)^2}+t\right)\cdot\frac{t}{|I_k|} \leqslant \rho_t(x) \leqslant c_3\left(\sqrt{l_k^2-(x-\xi_k)^2}+t\right)\cdot\frac{t}{|I_k|}, \tag{2}$$

а при $x \in J_k$ *и* $c_4^*|I_k| < t \leqslant 1$ *выполнено*

$$c_{2'}\cdot t \leqslant \rho_t(x) \leqslant c_{3'}\cdot t. \tag{2'}$$

§3. Доказательство теоремы 1

Обозначим через S_k окружность

$$S_k = \left\{ z : \left| z - \frac{a_k+b_k}{2} \right| = \frac{1}{2}|I_k| \right\},\ k \in \mathbb{Z}.$$

Положим

$$\varphi_k(z) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{\pi}\int\limits_{a_k}^{b_k} \frac{|y|}{(x-t)^2+y^2}dt,\ z = x+iy, \tag{3}$$

$$\varphi_{kn}(z) \stackrel{\text{def}}{=} \max_{z\in S_n}\varphi_k(z). \tag{4}$$

Лемма 1. *Можно выбрать постоянную* $c_0 = c_0(\alpha)$ *так, что при* $C \geqslant c_0$ *с некоторой постоянной* Q, $\frac{1}{2} < Q < 1$, *справедливы следующие соотношения:*

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} \varphi_{kn} \leqslant Q, \tag{5}$$

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} \varphi_{kn}|I_k| \leqslant Q|I_n|. \tag{6}$$

Лемму 1 докажем позднее с $Q = \frac{11}{12}$, а сейчас предположим, что оценки (5) и (6) выполнены.

Обозначим для краткости $f(z) = f_{E,\sigma}(z)$. Как следует из теоремы 1.6 в [1], для функции f справедливо представление

$$f(z) = \frac{1}{\pi}\int\limits_{\mathbb{R}} \frac{|y|f(t)}{(t-x)^2+y^2}dt + \sigma|y|,\ z = x+iy,\ y \neq 0. \tag{7}$$

Определим функцию f_* следующим образом:

$$f_*(x) = \begin{cases} M_k, & x \in I_k \setminus E,\ k \in \mathbb{Z}, \\ 0, & x \in E. \end{cases} \tag{8}$$

Положим также

$$F(z) = \frac{1}{\pi} \int\limits_{\mathbb{R}} \frac{|y| f_*(t)}{(t-x)^2 + y^2} dt, \;\; z = x + iy, \;\; y \neq 0. \tag{9}$$

$$\chi_{I_k}(x) = \begin{cases} 1, & x \in I_k, \\ 0, & x \in \mathbb{R} \setminus I_k, \end{cases} \tag{10}$$

$$\chi(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \chi_{I_k}(x). \tag{11}$$

Из (10) и (3) находим, что

$$\varphi_k(z) = \frac{1}{\pi} \int\limits_{\mathbb{R}} \frac{|y| \chi_{I_k}(t)}{(t-x)^2 + y^2} dt. \tag{12}$$

Формулы (7), (8), (9) влекут соотношение

$$f(z) \leqslant F(z) + \sigma|y|, \;\; z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}. \tag{13}$$

Пусть точка $x_n^* \in (a_n, b_n)$ такая, что $f(x_n^*) = M_n$. Функция f непрерывна в $\mathbb{C}$ (см. [2]) и гармонична в $\mathbb{C} \setminus E$ (см. [1]), поэтому в круге, ограниченном окружностью S_n, к функции f можно применить формулу Пуассона. Положим $x_n = \frac{a_n + b_n}{2}$, $r_n = \frac{1}{2}|I_n|$. Тогда

$$f(x_n^*) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x_n + r_n e^{i\theta}) \frac{(r_n^2 - (x_n^* - x_n)^2)}{r_n^2 \pm 2r_n |x_n^* - x_n| \cos\theta + (x_n^* - x_n)^2} d\theta, \tag{14}$$

где в (14) выбираем знак $+$, если $x_n^* < x_n$, и знак $-$, если $x_n^* \geqslant x_n$.

Пусть $z \notin \mathbb{R}$. Тогда $\varphi_k(z) = \frac{1}{\pi} \cdot$(угол в точке z треугольника с вершинами z, a_k, b_k), поэтому при $z \in S_n \setminus \mathbb{R}$ имеем $\varphi_n(z) = \frac{1}{\pi} \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{1}{2}$.

Определим функцию F_n из равенства

$$F(z) = M_n \varphi_n(z) + F_n(z), \;\; z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}. \tag{15}$$

Тогда имеем соотношения

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} F(x_n+r_ne^{i\theta})\frac{r_n^2-(x_n^*-x_n)^2}{r_n^2\pm 2r_n|x_n^*-x_n|\cos\theta+(x_n^*-x_n)^2}d\theta \\
&\quad=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} M_n\varphi_n(x_n+r_ne^{i\theta})\frac{r_n^2-(x_n^*-x_n)^2}{r_n^2\pm 2r_n|x_n^*-x_n|\cos\theta+(x_n^*-x_n)^2}d\theta \\
&\qquad+\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} F_n(x_n+r_ne^{i\theta})\frac{r_n^2-(x_n^*-x_n)^2}{r_n^2\pm 2r_n|x_n^*-x_n|\cos\theta+(x_n^*-x_n)^2}d\theta \\
&=\frac{1}{2}M_n+\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} F_n(x_n+r_ne^{i\theta})\frac{r_n^2-(x_n^*-x_n)^2}{r_n^2\pm 2r_n|x_n^*-x_n|\cos\theta+(x_n^*-x_n)^2}d\theta.
\end{aligned} \tag{16}$$

Из определений (8), (9), (10), (15) получаем соотношение

$$F_n(z)=\sum_{k\neq n}M_k\varphi_k(z), \tag{17}$$

тогда при $z\in S_n$ из (15), (16), (17) находим, что

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} F(x_n+r_ne^{i\theta})\frac{r_n^2-(x_n^*-x_n)^2}{r_n^2\pm 2r_n|x_n^*-x_n|\cos\theta+(x_n^*-x_n)^2}d\theta \\
&\qquad\qquad\leqslant\frac{1}{2}M_n+\sum_{k\neq n}\varphi_{kn}M_k.
\end{aligned} \tag{18}$$

Так как

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\sigma r_n|\sin\theta|\cdot\frac{r_n^2-(x_n^*-x_n)^2}{r_n^2\pm 2r_n|x_n^*-x_n|\cos\theta+(x_n^*-x_n)^2}d\theta\leqslant\sigma r_n=\frac{1}{2}\sigma|I_n|, \tag{19}$$

то (13), (14), (18) и (19) влекут неравенство

$$M_n\leqslant\frac{1}{2}M_n+\sum_{k\neq n}\varphi_{kn}M_k+\frac{1}{2}\sigma|I_n|. \tag{20}$$

Положим $M = \{M_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$, имеем $\varphi_{nn} = \frac{1}{2}$, пусть

$$\Sigma = \left\{\frac{1}{2}\sigma|I_n|\right\}_{n\in\mathbb{Z}}, \ BM = \{(BM)_n\}_{n\in\mathbb{Z}}, \ (BM)_n = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \varphi_{kn} M_k. \quad (21)$$

Будем считать, что для последовательностей $\Gamma = \{\gamma_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ и $\Delta = \{\delta_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ соотношение $\Gamma \leqslant \Delta$ означает, что $\gamma_n \leqslant \delta_n$ для любого $n \in \mathbb{Z}$. Тогда соотношения (20) и (21) можно переписать в виде

$$M \leqslant BM + \Sigma. \quad (22)$$

Поскольку $\varphi_{kn} > 0, \ k, n \in \mathbb{Z}$, соотношение (22) можно итерировать. Получаем следующее:

$$M \leqslant B^L M + B^{L-1}\Sigma + ... + B\Sigma + \Sigma, \ L \in \mathbb{N}. \quad (23)$$

Положим

$$B^L \stackrel{\text{def}}{=} \left\{\varphi_{kn}^{(L)}\right\}_{k,n\in\mathbb{Z}}, \ L \geqslant 2. \quad (24)$$

Вычисляя $B^2M = B(BM)$, находим, что

$$\varphi_{kn}^{(2)} = \sum_{\nu\in\mathbb{Z}} \varphi_{k\nu}\varphi_{\nu n}; \quad (25)$$

$$\begin{aligned}(B^{L+1}M)_n = (B(B^L M))_n &= \sum_{\nu\in\mathbb{Z}} \varphi_{\nu n}(B^L M)_\nu = \sum_{\nu\in\mathbb{Z}} \varphi_{\nu n} \sum_{k\in\mathbb{Z}} \varphi_{k\nu}^{(L)} M_k \\ &= \sum_{k\in\mathbb{Z}} M_k \sum_{\nu\in\mathbb{Z}} \varphi_{\nu n}\varphi_{kn}^{(L)} = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \varphi_{kn}^{(L+1)} M_k,\end{aligned}$$

тогда

$$\varphi_{kn}^{(L+1)} = \sum_{\nu\in\mathbb{Z}} \varphi_{k\nu}^{(L)} \varphi_{\nu n}. \quad (26)$$

По лемме 1 для любого $n \in \mathbb{Z}$ имеем

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} \varphi_{kn} \leqslant Q, \ Q < 1,$$

поэтому при любом n из (25) получаем

$$\begin{aligned}\sum_{k\in\mathbb{Z}} \varphi_{kn}^{(2)} &= \sum_k \sum_\nu \varphi_{k\nu}\varphi_{\nu n} = \sum_\nu \sum_k \varphi_{k\nu}\varphi_{\nu n} \\ &= \sum_\nu \varphi_{\nu n} \sum_k \varphi_{k\nu} \leqslant \sum_\nu \varphi_{\nu n} \cdot Q \leqslant Q^2. \quad (27')\end{aligned}$$

Предположим, что $\sum\limits_k \varphi_{kn}^{(L)} \leqslant Q^L$ для любого $n \in \mathbb{Z}$. Тогда равенство (26) влечёт

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} \varphi_{kn}^{(L+1)} = \sum_k \sum_\nu \varphi_{k\nu}^{(L)} \varphi_{\nu n} = \sum_\nu \sum_k \varphi_{k\nu}^{(L)} \varphi_{\nu n}$$
$$= \sum_\nu \varphi_{\nu n} \sum_k \varphi_{k\nu}^{(L)} \leqslant \sum_\nu \varphi_{\nu n} \cdot Q^L \leqslant Q^{L+1}. \quad (27)$$

Множество E, построенное в данной работе, удовлетворяет условиям теоремы 3.8 из [2], поэтому существует постоянная $\widetilde{M} = \widetilde{M}(C, c_1, \alpha)$ такая, что $M_k \leqslant \widetilde{M}\sigma$ для $k \in \mathbb{Z}$. Тогда соотношение (27) влечёт оценку

$$(B^{L+1}M)_n = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \varphi_{kn}^{(L+1)} M_k \leqslant \widetilde{M}\sigma \sum_{k\in\mathbb{Z}} \varphi_{kn}^{(L+1)} \leqslant \widetilde{M}\sigma Q^{L+1}. \quad (28)$$

Тогда (23) и (28) влекут соотношение

$$M \leqslant \Sigma + \sum_{L=1}^{\infty} B^L \Sigma. \quad (29)$$

Применим формулу (6) леммы 1. Тогда находим, что

$$(B\Sigma)_n = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \varphi_{kn} \cdot \frac{1}{2}\sigma |I_k| \leqslant \frac{1}{2}\sigma Q |I_n|. \quad (30)$$

Учитывая (26), (27′) и (27) получаем, что при $L > 1$ верны равенства

$$(B^L\Sigma)_n = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \varphi_{kn}^{(L)} \cdot \frac{1}{2}\sigma|I_k| = \sum_k (\sum_\nu \varphi_{k\nu}^{(L-1)} \varphi_{\nu n}) \cdot \frac{1}{2}\sigma |I_k|$$
$$= \sum_\nu \sum_k \varphi_{k\nu}^{(L-1)} \varphi_{\nu n} \cdot \frac{1}{2}\sigma|I_k|$$
$$= \sum_\nu \varphi_{\nu n} \sum_k \varphi_{k\nu}^{(L-1)} \frac{1}{2}\sigma |I_k|. \quad (31)$$

Предположим по индукции, что

$$\sum_k \varphi_{k\nu}^{(L-1)} |I_k| \leqslant Q^{L-1} |I_\nu| \quad (32)$$

для любого $\nu \in \mathbb{Z}$, тогда формулы (31) и (32) влекут

$$(B^L\Sigma)_n \leqslant \sum_{\nu\in\mathbb{Z}} \varphi_{\nu n} \cdot Q^{L-1} \cdot \frac{1}{2}\sigma|I_\nu| \leqslant \frac{1}{2}\sigma Q^L |I_n|. \quad (33)$$

Проведем индуктивный шаг для соотношения (32). Применяя неравенства (27) и (6), получаем

$$\sum_k \varphi_{k\nu}^{(L)}|I_k| = \sum_k |I_k| \sum_n \varphi_{kn}^{(L-1)}\varphi_{n\nu} = \sum_n \varphi_{n\nu} \sum_k \varphi_{kn}^{(L-1)}|I_k| \leqslant \sum_n \varphi_{n\nu} Q^{L-1}|I_n| \leqslant Q^L|I_\nu|.$$

Индукционный переход установлен.
Соотношения (30) и (33) могут быть записаны в виде

$$B^L\Sigma \leqslant Q^L\Sigma,\ L \geqslant 1. \tag{34}$$

Теперь формулы (29) и (34) влекут

$$M \leqslant \left(\sum_{L=0}^{\infty} Q^L\right)\Sigma = \frac{1}{1-Q}\Sigma. \tag{35}$$

Соотношение (35) доказывает теорему 1.

§4. Доказательство леммы 1

Прежде всего заметим, что при $B < A < -h < 0,\ h \leqslant \frac{1}{2}(1 - \frac{1}{\sqrt{2}})|A|,\ 0 < x < \pi$ имеем

$$\frac{1}{\pi}\int_B^A \frac{h\sin x}{(t-h\cos x)^2 + h^2\sin^2 x}dt < \frac{1}{\pi}(A-B)h\sin x \frac{1}{(A+h|\cos x|)^2 + h^2\sin^2 x} < \frac{1}{\pi}\frac{|A-B|h}{(|A|-h)^2} \leqslant \frac{2}{\pi}\frac{|A-B|h}{A^2}. \tag{36$'$}$$

Производя в (36′) замену $t_1 = \pm t + x_k$, получаем оценки для функции $\varphi_k(z)$ при $z \in S_n,\ k \neq n$, которые будем использовать далее, полагая $h_k = |I_k|$:

$$\varphi_{kn} < \frac{1}{\pi}\frac{h_k h_n}{(|x_k - x_n| - h_k - h_n)^2} < \frac{2}{\pi}\frac{h_k h_n}{(x_k - x_n)^2}. \tag{36}$$

Выберем $q_0 < \frac{1}{24}$ и будем рассматривать вначале частные случаи оценок (5) и (6).

4.1. Оценка для $\varphi_{01}|I_0|$. Имеем $|I_0| = 2, |I_1| = 2^{-n_0\alpha} = C^{-\alpha}$.

Дальнейшие требования покажут, что $n_0 \geqslant 2$. Применение неравенства (36) даёт соотношение

$$\varphi_{01}|I_0| < \frac{2}{\pi} \cdot 2 \cdot 2^{-n_0\alpha} \cdot \frac{2}{(2^{n_0}-1)^2} = \frac{8}{\pi(C-1)^2} \cdot \frac{1}{C^\alpha}.$$

Выберем C из условия

$$\frac{8}{\pi}\frac{1}{(C-1)^2}\frac{1}{C^\alpha} \leqslant q_0\frac{1}{C^\alpha}, \ \frac{8}{\pi}\frac{1}{(C-1)^2} \leqslant q_0,$$

тогда $\varphi_{01}|I_0| \leqslant q_0|I_1|$.

4.2. Оценка для $\varphi_{1k}, \ \varphi_{k1}, \ I_k \subset [2^{n_0}, 2^{n_0+1}], \ k > 1$. По построению множества E получаем соотношение $x_k - x_1 \geqslant (k-1)Ch_1 + 2h_1$, поэтому неравенство (36) влечёт оценку

$$\varphi_{1k} < \frac{2}{\pi}\frac{h_1^2}{((k-1)Ch_1)^2} = \frac{2}{\pi}\frac{1}{(k-1)^2C^2}.$$

Наложим на C ограничение

$$\frac{2}{\pi}\sum_{k=2}^{\infty}\frac{1}{(k-1)^2C^2} = \frac{2}{\pi}\cdot\frac{\pi^2}{6}\cdot\frac{1}{C^2} = \frac{\pi}{3}\cdot\frac{1}{C^2} \leqslant q_0,$$

тогда

$$\sum_{k>1, \ I_k\subset[2^{n_0},2^{n_0+1}]} \varphi_{1k} < q_0.$$

В условиях п. 4.2 имеем $\varphi_{1k} = \varphi_{k1}, \ k > 1$, поэтому

$$\sum_{k>1, \ I_k\subset[2^{n_0},2^{n_0+1}]} \varphi_{k1} < q_0.$$

4.3. Оценка для $\varphi_{k1}, \ I_k \subset [2^{n_0+1}, 2^{n_0+l+1}], \ l \geqslant 1$.

Для $I_m \subset [2^{n_0+l}, 2^{n_0+l+1}], \ I_k \subset [2^{n_0+l}, 2^{n_0+l+1}]$ имеем по построению множества E соотношение $h_m = |I_m| = |I_k| = h_k = 2^{-(n_0+l)\alpha}$. Фиксируем какое-нибудь m для обозначения через h_m длины каждого из промежутков I_k. Пусть N_{l+n_0} – количество промежутков I_k. Так как справа от каждого I_k находится промежуток J_k длины не менее $C|I_k|$, то $N_{l+n_0} \leqslant \dfrac{2^{n_0+l}}{(C+1)h_m}$. Далее, неравенство $x_k - x_1 \geqslant 2^{n_0+l} - \frac{1}{2}h_1$ и оценка (36) влекут

$$\varphi_{k1} \leqslant \frac{2}{\pi}\frac{h_1 h_m}{(2^{n_0+l}-\frac{1}{2}h_1)^2}, \qquad \sum_{I_k\subset[2^{n_0+l},2^{n_0+l+1}]} \varphi_{k1} < \frac{2}{\pi}\frac{h_1 h_m}{(2^{n_0+l}-\frac{1}{2}h_1)^2}N_l$$

$$< \frac{2}{\pi}\frac{2^{n_0+l}}{(C+1)h_m}\cdot\frac{h_1 h_m}{(2^{n_0+l}-\frac{1}{2}h_1)^2} = \frac{2}{\pi}\frac{1}{C^\alpha(C+1)}\cdot\frac{2^{n_0+l}}{(2^{n_0+l}-\frac{1}{2}h_1)^2},$$

отсюда получаем оценку

$$\sum_{l=1}^{\infty}\sum_{I_k\subset[2^{n_0+l},2^{n_0+l+1}]}\varphi_{k1} < \frac{2}{\pi}\frac{1}{C^\alpha(C+1)}\cdot\sum_{l=1}^{\infty}\frac{2^{n_0+l}}{(2^{n_0+l}-\frac{1}{2}h_1)^2}.$$

Наложим на C условие

$$\frac{2}{\pi}\frac{1}{C^\alpha(C+1)}\cdot\sum_{l=1}^{\infty}\frac{2^l C}{(2^l C-\frac{1}{2}h_1)^2} \leqslant q_0,$$

тогда

$$\sum_{a_k\geqslant 2^{n_0+l+1}}\varphi_{k1} \leqslant q_0.$$

4.4. Пусть $a_m = 2^{n_0+l},\ l\geqslant 1$.

Оценим величину

$$\varphi_{km}|I_k|,\ I_k\subset[2^{n_0+l-1},2^{n_0+l}],\ k=m-1,\dots,m-N_{l-1};$$

$$h_k = 2^{-(n_0+l-1)\alpha} = 2^\alpha 2^{-(n_0+l)\alpha} = 2^\alpha h_m:$$

$$N_{l-1} \leqslant \frac{2^{n_0+l-1}}{(C+1)h_k} = \frac{2^{n_0+l-1-\alpha}}{(C+1)h_m},$$

$$x_m - x_k \geqslant (m-k)Ch_k - \frac{1}{2}h_k = (m-k)2^\alpha Ch_m - \frac{1}{2}\cdot 2^\alpha h_m,$$

из (36) находим, что

$$\varphi_{km}|I_k| < \frac{2}{\pi}\frac{h_k h_m\cdot h_k}{((m-k)2^\alpha Ch_m - \frac{1}{2}2^\alpha h_m)^2} = \frac{2^{1-\alpha}}{\pi}\frac{h_m\cdot 2^\alpha}{((m-k)C-\frac{1}{2})^2},$$

поэтому

$$\sum_{I_k\subset[2^{n_0+l-1},2^{n_0+l}]}\varphi_{km}|I_k| < h_m\cdot\frac{2}{\pi}\cdot\sum_{k=m-1}^{m-l-1}\frac{1}{((m-k)C-\frac{1}{2})^2}.$$

Выберем C так, чтобы выполнялось соотношение

$$\frac{2}{\pi}\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{1}{(C\nu-\frac{1}{2})^2}\leqslant q_0,$$

тогда

$$\sum_{I_k\subset[2^{n_0+l-1},2^{n_0+l}]}\varphi_{km}|I_k|<q_0|I_m|.$$

4.5. Пусть $a_m=2^{n_0+l},\ l\geqslant 2,\ I_k\subset[2^{n-1},2^n]$, тогда

$$h_k=2^{-(n-1)\alpha}=2^{-(n_0+l)\alpha}\cdot 2^{(n_0+l-n+1)\alpha}=h_m\cdot 2^{(n_0+l-n+1)\alpha},$$

$$x_m-x_k\geqslant\frac{1}{2}\cdot 2^{n_0+l},\ \varphi_{km}|I_k|\leqslant\frac{2}{\pi}\cdot\frac{h_m^2\cdot 2^{(n_0+l-n+1)\alpha}}{(\frac{1}{2}\cdot 2^{n_0+l})^2}\cdot h_m\cdot 2^{(n_0+l-n+1)\alpha},$$

$$N_{n-1}\leqslant\frac{2^{n-1}}{(C+1)h_k}=\frac{2^{n-1}}{(C+1)h_m\cdot 2^{(n_0+l-n+1)\alpha}},$$

$$\begin{aligned}\sum_{I_k\subset[2^{n-1},2^n]}\varphi_{km}|I_k|&\leqslant\frac{8}{\pi}\cdot\frac{h_m^2}{C+1}\cdot 2^{n-1}\cdot\frac{2^{(n_0+l-n+1)\alpha}}{2^{2(n_0+l)}}\\&=\frac{8}{\pi}\cdot\frac{h_m}{C+1}\cdot\frac{2^{(n-1)(1-\alpha)}}{2^{2(n_0+\alpha)}},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{n_0+l-1}\sum_{I_k\subset[2^{n-1},2^n]}\varphi_{km}|I_k|&\leqslant\frac{8}{\pi}\cdot\frac{h_m}{C+1}\cdot\frac{1}{2^{2(n_0+l)}}\sum_{n=1}^{n_0+l-1}2^{(n-1)(1-\alpha)}\\&\leqslant\frac{8}{\pi}\cdot\frac{h_m}{C+1}\cdot\frac{1}{2^{2(n_0+\alpha)}}\cdot b(n_0+l,\alpha),\end{aligned}\qquad(37)$$

где для выражения $b(n_0+l,\alpha)$ в (37) получается выражение

$$b(n_0+l,\alpha)=\begin{cases}2^{2(n_0+l-\alpha)}=2^{2(l-2)(1-\alpha)}C^{1-\alpha},\text{если } 0<\alpha<1,\\ n_0+l-2=\frac{\log C}{\log 2}+l-2,\text{если } \alpha=1,\\ \dfrac{1}{1-2^{1-\alpha}},\quad\text{если } \alpha>1.\end{cases}\qquad(38)$$

Соотношения (37) и (38) показывают, что можно выбрать $C\geqslant c_0$ так, чтобы выполнилось соотношение

$$\frac{8}{\pi}\frac{1}{C+1}\cdot\frac{1}{2^{(n_0+l)}}b(n_0+l,\alpha)=\frac{8}{\pi}\frac{1}{(C+1)C^2}\cdot\frac{b(n_0+l,\alpha)}{2^{2l}}\leqslant q_0,$$

тогда

$$\sum_{n=1}^{n_0+l-1} \sum_{I_k \subset [2^{n-1},2^n]} \varphi_{km}|I_k| \leqslant q_0|I_m|. \tag{39}$$

4.6. Случай $a_m = 2^{n_0+l}$, $l \geqslant 0$, $I_k \subset [2^{n-l}, 2^n]$, $n-1 \geqslant n_0+l+1$.

Тогда

$$h_k = h_m \cdot 2^{(n_0+l-n+1)\alpha}, \ x_n - x_m \geqslant 2^{n-2}-1,$$

$$\varphi_{km} \leqslant \frac{2}{\pi} \cdot \frac{h_m^2 \cdot 2^{(n_0+l-n+1)\alpha}}{(2^{n-2}-1)^2},$$

$$N_{n-1} \leqslant \frac{2^{n-1}}{(C+1)h_k} = \frac{2^{n-1}}{(C+1)h_m \cdot 2^{(n_0+l-n+1)\alpha}},$$

$$\sum_{I_k \subset [2^{n-1},2^n]} \varphi_{km} \leqslant \frac{h_m^2 \cdot 2^{(n_0+l-n+1)\alpha}}{(2^{n-2}-1)^2} \cdot \frac{2^{n-1}}{(C+1)h_m \cdot 2^{(n_0+l-n+1)\alpha}}$$

$$= \frac{2}{\pi} \frac{h_m}{C+1} \cdot \frac{2^{n-1}}{(2^{n-2}-1)^2} = \frac{2}{\pi} \frac{2^{-l\alpha}}{C^\alpha(C+1)} \cdot \frac{2^{n-1}}{(2^{n-2}-1)^2},$$

$$\sum_{n=n_0+l+2}^{\infty} \sum_{I_k \subset [2^{n-1},2^n]} \varphi_{km} \leqslant \frac{2}{\pi} \frac{2^{-l\alpha}}{C^\alpha(C+1)} \sum_{n=n_0+l+2}^{\infty} \frac{2^{n-1}}{(2^{n-2}-1)^2}. \tag{40}$$

Наложим на C условие

$$\frac{2}{\pi} \frac{1}{C^\alpha(C+1)} \sum_{n=n_0+l+2}^{\infty} \frac{2^{n-1}}{(2^{n-2}-1)^2} \leqslant q_0,$$

в этом случае формула (40) влечет, что при любом $l \geqslant 0$, $a_m = 2^{n_0+l}$ выполняется соотношение

$$\sum_{k:\ a_k \geqslant 2^{n_0+l+1}} \varphi_{km} \leqslant q_0.$$

4.7. Случай $a_{m+1} = 2^{n_0+l}$, $l \leqslant 1$, $I_k \subset [2^{n_0+l}, 2^{n_0+l+1}]$.

Тогда

$$h_m = 2^{-\alpha(n_0+l-1)}, \ h_k = 2^{-\alpha(n_0+l)} = 2^{-\alpha}h_m,$$

$$x_k - x_m \geqslant Ch_m + (k-m-1)C2^\alpha h_m + \frac{1}{2}2^{-\alpha}h_m,$$

$$\varphi_{km} \leqslant \frac{2}{\pi} \cdot \frac{h_m^2 2^{-\alpha}}{h_m^2(C(1+(k-m-1)2^{-\alpha})+2^{\alpha-1})^2}$$
$$= \frac{2}{\pi} \cdot \frac{2^{-\alpha}}{(C(1+(k-m-1)2^{-\alpha})+2^{\alpha-1})^2},$$
$$\sum_{I_k \subset [2^{n_0+l}, 2^{n_0+l+1}]} \varphi_{km} < \frac{2^{1-\alpha}}{\pi} \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{1}{(C\nu 2^{-\alpha}+2^{\alpha-1})^2}.$$

Накладываем на C условие
$$\frac{2^{1-\alpha}}{\pi} \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{1}{(C\nu 2^{-\alpha}+2^{\alpha-1})^2} \leqslant q_0,$$
тогда
$$\sum_{I_k \subset [2^{n_0+l}, 2^{n_0+l+1}]} \varphi_{km} \leqslant q_0.$$
Рассуждая аналогично п. 4.6, при уже наложенных на C ранее ограничениях, получим оценку
$$\sum_{a_k \geqslant 2^{n_0+l+1}} \varphi_{km} \leqslant q_0.$$

4.8. Окончание доказательства леммы 1. Не умаляя общности, полагаем $n \geqslant 0$ в (5) и (6) . Рассуждая как при оценках в п. 4.2 и 4.3, получим соотношения
$$\sum_{I_k \subset [2^{n_0}, 2^{n_0+1}]} \varphi_{k0} \leqslant q_0, \qquad \sum_{I_k \subset [2^{n_0+1}, \infty)} \varphi_{k0} \leqslant q_0,$$
аналогично находим, что
$$\sum_{I_k \subset [-2^{n_0+1}, -2^{n_0}]} \varphi_{k0} \leqslant q_0, \qquad \sum_{I_k \subset (-\infty, -2^{n_0+1}]} \varphi_{k0} \leqslant q_0.$$
Поскольку $\varphi_{00} = \frac{1}{2}$, имеем оценку
$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} \varphi_{k0} \leqslant \frac{1}{2} + 4q_0 < \frac{1}{2} + \frac{1}{6} < \frac{11}{12}. \tag{41}$$
Соотношение (41) даёт соотношение (5) для $n = 0$. Так как при $k \neq 0$ имеем $|I_k| < |I_0|$, то (41) влечёт (6) для $n = 0$.

Пусть теперь $n \geqslant 1$. Построение множества E показывает, что при $m > n \geqslant 1$ выполнено соотношение $|I_n| \geqslant |I_m|$, поэтому оценки в пп. 4.4, 4.5 влекут аналогичные неравенства для $\sum\limits_{k \geqslant 0} \varphi_{kn}$ (A), а оценки в пп. 4.2, 4.3, 4.6 дают соответствующие оценки для $\sum\limits_{k\geqslant 0}\varphi_{kn}|I_k|$ (B). В суммах (A) и (B) имеются в виду те индексы k, которые фигурировали в соответствующих пунктах. Далее, если в каком-то пункте рассматривалась сумма $\sum\limits_{I_k\subset[2^m,2^{m+1}]}\varphi_{kn}|I_k|$ (C) или $\sum\limits_{I_k\subset[2^m,2^{m+1}]}\varphi_{kn}$ (D), то при $n\geqslant 1$ оценка (36), применяемая в п. 4.1–4.7, показывает, что для сумм $\sum\limits_{I_k\subset[-2^{m+1},-2^m]}\varphi_{kn}|I_k|$ (C_1) или $\sum\limits_{I_k\subset[-2^{m+1},-2^m]}\varphi_{kn}$ (D_1) справедливы те же оценки, что соответственно для сумм (C) и (D). Отметим также, что при $a_n=2^m,\ m>n_0$, сумма $\sum\limits_{I_k\subset[2^m,2^{m+1}]}\varphi_{kn}$ оценивается так, как в п. 4.2 оценивалась величина $\sum\limits_{I_k\subset[2^{n_0},2^{n_0+1}]}\varphi_{k1}$.

Пусть теперь $a_n=2^m,\ m\geqslant n_0$. В соответствии с п. 4.1–4.6 и приведёнными выше замечаниями, получаем оценки

$$\begin{aligned}\sum_{k\in\mathbb{Z}}\varphi_{kn}=\varphi_{nn}&+\sum_{I_k\subset[2^m,2^{m+1}],\ k\neq n}\varphi_{kn}+\sum_{I_k\subset[2^{m+1},\infty)}\varphi_{kn}\\&+\sum_{I_k\subset[2^{m-1},2^m]}\varphi_{kn}+\sum_{I_k\subset[-1,2^{m-1}]}\varphi_{kn}\\&+\sum_{I_k\subset[-2^{m+1},-2^m]}\varphi_{kn}+\sum_{I_k\subset[-\infty,-2^{m+1}]}\varphi_{kn}\\&+\sum_{I_k\subset[-2^m,-2^{m-1}]}\varphi_{kn}+\sum_{I_k\subset[-2^{m-1},-1]}\varphi_{kn}\\&\leqslant\frac{1}{2}+8q_0<\frac{1}{2}+\frac{1}{3}<\frac{11}{12}.\end{aligned}\tag{42}$$

Разбивая сумму по всем $k\in\mathbb{Z}$ так же, как в (42), получим соотношение

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}}\varphi_{kn}|I_k|\leqslant\frac{5}{6}|I_n|.\tag{43}$$

Оценки (42) и (43) дают (5) и (6) для рассматриваемого n. Предположим теперь, что $a_n\neq 2^m,\ m\in\mathbb{N}$, пусть $2^m<a_n<2^{m+1}$. Разобъём суммы $\sum\limits_{k\in\mathbb{Z}}\varphi_{kn}$ и $\sum\limits_{k\in\mathbb{Z}}\varphi_{kn}|I_k|$ так же, как в (42). Единственными изменениями в проводимых оценках будут неравенства для $\sum\limits_{I_k\subset[2^m,2^{m+1}]}$ и

$\sum\limits_{I_k\subset[-2^{m+1},-2^m]}$. Именно, аналогично п. 4.2 найдём, что

$$\sum_{I_k\subset[2^m,2^{m+1}],\ k\neq n}\varphi_{kn}=\sum_{I_k\subset[2^m,2^{m+1}],\ k<n}\varphi_{kn}+\sum_{I_k\subset[2^m,2^{m+1}],\ k>n}\varphi_{kn}\leqslant 2q_0, \tag{44}$$

$$\sum_{I_k\subset[-2^{m+1},-2^m],\ k\neq n}\varphi_{kn}\leqslant 2q_0. \tag{45}$$

Так как при $I_k\subset[2^m,2^{m+1}]$ или $I_k\subset[-2^{m+1},-2^m]$ имеем $|I_k|=|I_n|$, то (44) и (45) дают соответствующие оценки для $\sum\varphi_{kn}|I_k|$. С учётом формул (42)–(45) находим, что

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}}\varphi_{kn}<\frac{1}{2}+\frac{10}{24}=\frac{11}{12},$$

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}}\varphi_{kn}|I_k|<\left(\frac{1}{2}+\frac{10}{24}\right)|I_n|=\frac{11}{12}|I_n|.$$

Лемма 1 доказана.

§5. Доказательство теоремы 2

Пусть $h_0=h_k^0=\frac{1}{2}\min(h_k,h_{k+1}),\ h_k=|I_k|,\ T_k$ – эллипс с фокусами в точках b_k и a_{k+1}, проходящий через точки b_k-h_0 и $a_{k+1}+h_0$.

Лемма 2. *Существуют постоянные* $c_4=c_4(C,c_1,\alpha)>0$ *и* $c_5=c_5(C,c_1,\alpha)>0$ *такие, что при* $z\in T_k$ *выполняются соотношения*

$$c_4h_k\leqslant f_{E,1}(z)\leqslant c_5h_k. \tag{46}$$

Доказательство леммы 2. Пусть s_k^+ – окружность $\{z:|z-b_k+h_0|=\frac{1}{2}h_0\}$, s_{k+1}^- – окружность $\{z:|z-a_{k+1}-h_0|=\frac{1}{2}h_0\}$, точки z'_{k+},z''_{k+} – точки пересечения s_k^+ и T_k, точки $z'_{k+1,-},z''_{k+1,-}$ – точки пересечения окружности s_{k+1}^- и эллипса T_k, $\mathrm{Im}z'_{k+}>0,\ \mathrm{Im}z'_{k+1,-}>0$,

$$z'_{k+}=x'_{k+}+iy'_{k+},\quad z''_{k+}=x'_{k+}-iy'_{k+},$$

$$z'_{k+1,-}=x'_{k+1,-}+iy'_{k+1,-},\quad z''_{k+1,-}=x'_{k+1,-}-iy'_{k+1,-}.$$

Применение аналитической геометрии показывает, что

$$y'_{k+},\ y'_{k+1,-}>0,146\min(h_k,h_{k+1})\geqslant 0,146\cdot\frac{1}{2^\alpha}h_k. \tag{47}$$

Обозначим через $\overline{b}_k^+$, $\overline{b}_{k+1}^-$ замкнутые круги, ограниченные окружностями s_k^+ и s_{k+1}^-, и пусть B_k^+ и B_{k+1}^- – открытые концентрические с $\overline{b}_k^+$, $\overline{b}_{k+1}^-$ круги радиуса h_0.

Имеем $B_k^+,\ B_{k+1}^- \subset \mathbb{C}\setminus E,\ f_{E,1}(z) > 0$ при $z \in B_k^+, z \in B_{k+1}^-$. По теореме Гарнака имеем соотношение

$$f_{E,1}(z) \geqslant \frac{1}{3} f_{E,1}(z'_{k+}),\ z \in \overline{b}_k^+, \tag{47$'$}$$

$$f_{E,1}(z) \geqslant \frac{1}{3} f_{E,1}(z'_{k+1,-}),\ z \in \overline{b}_{k+1}^-. \tag{47$''$}$$

Из (47) и (47$'$) находим, что

$$f_{E,1}(z) \geqslant \frac{1}{3}\cdot 0,146\cdot \frac{1}{2^\alpha} h_k,\ z \in \overline{b}_k^+ \cap T_k, \tag{48$'$}$$

$$f_{E,1}(z) \geqslant \frac{1}{3}\cdot 0,146\cdot \frac{1}{2^\alpha} h_k,\ z \in \overline{b}_{k+1}^- \cap T_k. \tag{48$''$}$$

Из формулы (7) получается соотношение $f_{E,1}(z) > |\mathrm{Im} z|$, поэтому при $z = x+iy \in T_k,\ |y| \geqslant 0,146\cdot\frac{1}{2^\alpha} h_k$ получаем оценку $f_{E,1}(z) \geqslant 0,146\cdot\frac{1}{2^\alpha} h_k$. Принимая во внимание неравенства (48$'$) и (48$''$), получаем левое неравенство в (46) с $c_4 = \frac{1}{3}\cdot 0,146\cdot\frac{1}{2^\alpha}$. Для получения правого неравенства в (46) считаем, что $x \in [2^n, 2^{n+1}],\ z = x+iy \in T_k,\ n \geqslant n_0$. Случай $x \leqslant 2^{n_0}$ рассматривается аналогично. По теореме 1 справедливы оценки

$$0 \leqslant f_{E,1}(x) \leqslant 6\cdot 2^{-n\alpha}, \quad \text{если } x \geqslant 2^n,$$

$$0 \leqslant f_{E,1}(x) \leqslant 6\cdot 2^\alpha \cdot 2^{-n\alpha},\ \text{если } x \in [2^{n-1}, 2^n],$$

$$0 \leqslant f_{E,1}(x) \leqslant 6,\ \text{если } x < 2^{n-1}.$$

Поэтому при $z = x+iy,\ 0 < y \leqslant 1$, используя соотношение (7), находим, что

$$f_{E,1}(z) \leqslant \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{2^{n-1}} \frac{6y}{(t-x)^2+y^2}dt + \frac{1}{\pi}\int\limits_{2^{n-1}}^{2^n} \frac{6\cdot 2^\alpha\cdot 2^{-n\alpha} y}{(t-x)^2+y^2}dt$$

$$+\frac{1}{\pi}\int\limits_{2^n}^{\infty} \frac{6\cdot 2^{-n\alpha} y}{(t-x)^2+y^2}dt + y < \frac{6y}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{2^{n-1}} \frac{dt}{(t-2^n)^2} + \frac{1}{\pi}\int\limits_{2^{n-1}}^{\infty} \frac{6\cdot 2^\alpha\cdot 2^{-n\alpha} y}{(t-x)^2+y^2}dt + y$$

$$< \frac{12}{\pi}\cdot\frac{y}{2^n} + 6\cdot 2^\alpha\cdot 2^{-n\alpha} + y < 3y + 6\cdot 2^\alpha \cdot 2^{-n\alpha}. \tag{49}$$

При $z \in T_k,\ z = x + iy$, имеем оценку

$$|y| \leqslant \sqrt{2h_k^0 l_k + (h_k^0)^2} \leqslant \sqrt{c_1 C + \frac{1}{4}} h_k. \tag{50}$$

Из (49) и (50) получаем,что правое неравенство в (46) выполняется с

$$c_5 = 3 \cdot \sqrt{c_1 C + \frac{1}{4}} + 6 \cdot 2^{-\alpha}.$$

□

Закончим доказательство теоремы 2. Обозначим через D_k область, граничными континуумами которой являются эллипс T_k и отрезок J_k. Преобразование $\zeta = \frac{2}{|J_k|}(z - \xi_k)$ переводит отрезок J_k в отрезок $[-1, 1]$, эллипс T_k в эллипс $\widetilde{T_k}$ с фокусами в точках -1 и 1 и проходящий через точки $-1 - \frac{2h_k^0}{|J_k|} = -1 - \frac{h_k^0}{l_k}$ и $1 + \frac{h_k^0}{l_k}$. Отображение $\omega = \zeta + \sqrt{\zeta^2 - 1}$ переводит $\mathbb{C} \setminus [-1, 1]$ во внешность единичного круга $\mathbb{D}$, при этом отрезок $[-1, 1]$ переходит в единичную окружность $\partial\mathbb{D}$, а эллипс $\widetilde{T_k}$ переходит в окружность $R_k \cdot \partial\mathbb{D}$, где

$$R_k = 1 + \frac{h_k^0}{l_k} + \sqrt{2 \cdot \frac{h_k^0}{l_k} + \left(\frac{h_k^0}{l_k}\right)^2}. \tag{51}$$

Обозначим через $\widetilde{D_k}$ кольцо, ограниченное окружностями $\partial\mathbb{D}$ и $R_k \cdot \partial\mathbb{D}$. Отображение $\varphi(z) = \omega(\zeta(z))$ переводит двусвязную область D_k на кольцо $\widetilde{D_k}$.

Пусть $v_-(z)$ – гармоническая в D_k функция, равная 0 при $z \in J_k$ и равная $c_4 h_k$ при $z \in T_k,\ v_+(z)$ – гармоническая в D_k функция, равная 0 при $z \in J_k$ и равная $c_5 h_k$ при $z \in T_k,\ V_\pm(\omega) = v_\pm(\varphi^{-1}(\omega)),\ \omega \in \widetilde{D_k}$. Тогда $V_+(\omega)$ – гармоническая в кольце $\widetilde{D_k}$ функция, равная 0 при $\omega \in \partial\mathbb{D}$ и равная $c_5 h_k$ при $\omega \in R_k \cdot \partial\mathbb{D}$, $V_-(\omega)$ – гармоническая в кольце $\widetilde{D_k}$ функция, равная 0 при $\omega \in \partial\mathbb{D}$ и равная $c_4 h_k$ при $\omega \in R_k \cdot \partial\mathbb{D}$, поэтому

$$V_+(\omega) = \frac{\log|\omega|}{\log R_k} \cdot c_5 h_k,\ V_-(\omega) = \frac{\log|\omega|}{\log R_k} \cdot c_4 h_k. \tag{52}$$

Для $t \in (0, c_5 h_k)$ положим $L_k^+(t) \stackrel{\text{def}}{=} \{z \in D_k : v_+(z) = t\}$, для $t \in (0, c_4 h_k)$ пусть $L_k^-(t) \stackrel{\text{def}}{=} \{z \in D_k : v_-(z) = t\}$. Из леммы 2 и определения функций $v_\pm(z)$ следует соотношение $v_-(z) \leqslant f_{E,1}(z) \leqslant v_+(z),\ z \in D_k$, поэтому в случае $L_t \cap D_k \neq \varnothing$ получаем, что $L_t \cap D_k$ лежит в двусвязной области, ограниченной континуумами $L_k^-(t)$ и J_k, и двусвязная область, ограниченная континуумами $L_t \cap D_k$ и J_k, содержит $L_k^+(t)$. Соотношение $L_t \cap D_k \neq \varnothing$ следует при этом из соотношения $t < c_4 h_k$.

Пусть
$$\rho_k^{\pm}(x,t) \overset{\text{def}}{=} \operatorname{dist}(x, L_k^{\pm}(t)),\ x \in J_k. \tag{53}$$
Из вышесказанного следует, что при $L_t \cap D_k \neq \varnothing$ выполняются неравенства
$$\rho_k^+(x,t) \leqslant \rho_t(x) \leqslant \rho_k^-(x,t),\ x \in J_k. \tag{54}$$
Из определения функций $V_\pm(\omega)$ следует, что $v_\pm(z) = t$ эквивалентно равенству $V_\pm(\omega) = t$, где $\omega = \varphi(z)$. Из формул (52) получаем соотношения
$$V_+(\omega) = t \Leftrightarrow \log|\omega| = \frac{t \log R_k}{c_5 h_k}, \tag{54$'$}$$
$$V_-(\omega) = t \Leftrightarrow \log|\omega| = \frac{t \log R_k}{c_4 h_k}. \tag{54$''$}$$
Положим
$$\log r_k^+(t) \overset{\text{def}}{=} \frac{t \log R_k}{c_5 h_k},\ \log r_k^-(t) \overset{\text{def}}{=} \frac{t \log R_k}{c_4 h_k},$$
$$\Lambda_k^+(t) = \{\omega : |\omega| = r_k^+(t)\},\ \Lambda_k^-(t) = \{\omega : |\omega| = r_k^-(t)\}.$$
В таком случае $L_k^+(t) = \varphi^{-1}(\Lambda_k^+(t)),\ L_k^-(t) = \varphi^{-1}(\Lambda_k^-(t))$.

Далее, $\zeta = \frac{1}{2}(\omega + \frac{1}{\omega})$, $z = l_k \zeta + \xi_k$.

Окружности $\Lambda_k^{\pm}(t)$ переходят на ζ-плоскости в эллипсы $\widetilde{T}_k^{\pm}(t)$ с фокусами в точках -1 и 1. Из (51) следует, что
$$R_k \leqslant 1 + \frac{\frac{h_k}{2}}{Ch_k} + \sqrt{\frac{2 \cdot \frac{h_k}{2}}{Ch_k} + \left(\frac{\frac{h_k}{2}}{Ch_k}\right)^2} = 1 + \frac{1}{2C} + \sqrt{\frac{1}{C} + \frac{1}{4C^2}}, \tag{55$'$}$$
$$\begin{aligned} R_k &\geqslant 1 + \frac{\frac{1}{2^\alpha}\frac{h_k}{2}}{Cc_1 h_k} + \sqrt{\frac{2 \cdot \frac{1}{2^\alpha}\frac{h_k}{2}}{Cc_1 h_k} + \left(\frac{\frac{1}{2^\alpha}\frac{h_k}{2}}{Cc_1 h_k}\right)^2} \\ &= 1 + \frac{1}{2^{\alpha+1}Cc_1} + \sqrt{\frac{1}{Cc_1} + \frac{1}{2^{2+2\alpha}C^2 c_1^2}}. \end{aligned} \tag{55$''$}$$
Эллипс $\widetilde{T}_k^+(t)$ проходит через точки $\pm\operatorname{ch}(\log r_k^+(t))$, эллипс $\widetilde{T}_k^-(t)$ проходит через точки $\pm\operatorname{ch}(\log r_k^-(t))$. Учтём, что при $0 < x \leqslant 1$ имеем

$1+\frac{x^2}{2} < \mathrm{ch}x < 1+\frac{1}{2}\mathrm{ch}\frac{1}{4}x^2$, поэтому при $0 < t \leqslant c_4 h_k$, где в силу формулы $(55')$ получаем соотношения

$$\frac{c_4^* \log\left(1+\frac{1}{2C}+\sqrt{\frac{1}{C}+\frac{1}{4C^2}}\right)}{c_4} = 1, \tag{56}$$

$$1+\frac{1}{2}\left(\log r_k^{\pm}(t)\right)^2 < \mathrm{ch}\left(\log r_k^{\pm}(t)\right) < 1+\frac{1}{2}\mathrm{ch}\frac{1}{4}\cdot\left(\log r_k^{\pm}(t)\right)^2. \tag{57}$$

При отображении на z-плоскость с помощью преобразования $z = l_k\zeta+\xi_k$ эллипсы $\widetilde{T}_k^{\pm}(t)$ переходят в эллипсы $T_k^{\pm}(t)$ с фокусами в точках b_k и a_{k+1}, проходящие через точки

$$\zeta_k - l_k\mathrm{ch}(\log r_k^{\pm}(t)), \quad \zeta_k + l_k\mathrm{ch}(\log r_k^{\pm}(t)).$$

Пусть R_+ – правая часть в $(55')$, R_- – правая часть в $(55'')$, $\widehat{T}_k^{+}(t)$ – эллипс с фокусами в точках b_k и a_{k+1}, проходящий через точки $b_k-\frac{1}{2}l_k\left(\frac{t\log R_-}{c_5h_k}\right)^2$, $a_{k+1}+\frac{1}{2}l_k\left(\frac{t\log R_-}{c_5h_k}\right)^2$; $\widehat{T}_k^{-}(t)$ – эллипс с фокусами в точках b_k и a_{k+1}, проходящий через точки $b_k-\frac{1}{2}\mathrm{ch}\frac{1}{4}l_k\left(\frac{t\log R_+}{c_5h_k}\right)^2$, $a_{k+1}+\frac{1}{2}\mathrm{ch}\frac{1}{4}l_k\left(\frac{t\log R_+}{c_5h_k}\right)^2$. При $0 < t \leqslant c_4^* h_k$ получаем, что эллипс $\widehat{T}_k^{-}(t)$ содержит внутри эллипс $T_k^{-}(t)$, а эллипс $\widehat{T}_k^{+}(t)$ содержится внутри эллипса $T_k^{+}(t)$. Тогда получаем соотношения

$$\rho_k^-(x,t) \leqslant \mathrm{dist}(x,\widehat{T}_k^{-}(t)),\ \rho_k^+(x,t) \geqslant \mathrm{dist}(x,\widehat{T}_k^{+}(t)),\ x\in J_k. \tag{58}$$

Применяя аналитическую геометрию, находим, что существуют постоянные c_2 и c_3 такие, что

$$\mathrm{dist}(x,\widehat{T}_k^{+}(t)) \geqslant c_2\left(\sqrt{l_k^2-(x-\xi_k)^2}+t\right)\cdot\frac{t}{h_k},\ x\in J_k, \tag{59}$$

$$\mathrm{dist}(x,\widehat{T}_k^{-}(t)) \leqslant c_3\left(\sqrt{l_k^2-(x-\xi_k)^2}+t\right)\cdot\frac{t}{h_k},\ x\in J_k. \tag{60}$$

Из соотношений (49) и (50) следует, что при $z = x+iy$, $x\in[b_k-1, a_{k+1}+1]$, $|y|\leqslant 1$ справедлива оценка $f_{E,1}(z)\leqslant 2^\alpha\cdot c_5\max\left(|y|,|I_k|\right)$. Поскольку $f_{E,1}(z) > |\mathrm{Im}z|$, получаем, что существуют постоянные c_2' и c_3' такие, что при $x\in J_k$ и $1\geqslant t\geqslant c_4^*h_k$ справедливы неравенства

$$c_2't \leqslant \rho_t(x) \leqslant c_3't. \tag{61}$$

Соотношения (53), (58)–(61) доказывают теорему 2.

Список литературы

1. Б. Я. Левин, *Мажоранты в классах субгармонических функций I.*— Теория функций, функциональный анализ и их приложения **51** (1989), 3–17.
2. Б. Я. Левин, *Мажоранты в классах субгармонических функций II.* — Теория функций, функциональный анализ и их приложения **52** (1989), 3–33.
3. В. А. Марченко, И. В. Островский, *Характеристика спектра оператора Хилла.* — Матем. сборник **97**, No. 4 (1975), 540–606.
4. P. Kargaev, E. Korotyaev, *Effective masses and conformal mappings.* — Comm. Math. Phys. **169**, No. 3 (1995), 597–625.
5. Е. Л. Коротяев, *Распространение волн в одномерной неоднородной среде.* — Докл. РАН **336**, No. 2 (1994), 171–174.
6. O. V. Silvanovich, N. A. Shirokov, *Approximation by entire functions on a countable union of segments of the real axis.* — Vestnik St.Petersburg Univ., Mathematics **49**, No. 4 (2016), 373–376.
7. O. V. Silvanovich, N. A. Shirokov, *Approximation by entire functions on a countable union of segments of the real axis. 3. Futher generalization.* — Vestnik St.Petersburg Univ., Mathematics **51**, No. 2 (2018), 164–168.
8. O. V. Silvanovich, N. A. Shirokov, *Approximation by entire functions in a countable union of segments of the real axis.* 4. *Inverse theorem.* — Vestnik St.Petersburg Univ., Mathematics **51**, No. 3 (2018), 267–275.

Silvanovich O. V., Shirokov N. A. B. Ya. Levin function for some sets of segments.

Let $\{I_k\}_{k\in\mathbb{Z}}$, $I_k = [a_k, b_k]$, $b_k < a_{k+1}$, $a_k \to -\infty$ $(k \to -\infty)$, $a_k \to +\infty$ $(k \to +\infty)$ be a set of disjoint segments of the real axis $\mathbb{R}$. $J_k = [b_k, a_{k+1}]$, $E = \bigcup\limits_{k\in\mathbb{Z}} J_k$. We assume that $a_0 = -1$, $b_0 = 1$, $a_1 = 2^{n_0} \stackrel{\text{def}}{=} C$, $b_{-1} = -2^{n_0}$, $|I_k| = 2^{-m\alpha}$, $\alpha > 0$ in case $I_k \subset [2^m, 2^{m+1}]$ or $I_k \subset [-2^{m+1}, -2^m]$, $m \geqslant n_0$. We assume further that there exist k and l such that $a_k = 2^n$ and $b_l = -2^n$, for any $n \geqslant n_0$. The B. Ya. Levin function $f_{E,\sigma}(z)$, $\sigma > 0$, is defined to be a function satisfying the following conditions:

1. $f_{E,\sigma}(z)$ is subharmonic on the complex plane $\mathbb{C}$ and harmonic on $\mathbb{C} \setminus E$;
2. $f_{E,\sigma}(z) = 0,\ x \in E;\ f_{E,\sigma}(z) > 0,\ z \in \mathbb{C} \setminus E$;
3. $\overline{\lim\limits_{z\to\infty}} \dfrac{f_{E,\sigma}(z)}{|z|} = \sigma,\ f_{E,\sigma}(\overline{z}) = f_{E,\sigma}(z)$;
4. if g is subharmonic on $\mathbb{C}$, $g(x) \leqslant 0,\ x \in E$, and $\overline{\lim\limits_{z\to\infty}} \dfrac{g(z)}{|z|} \leqslant \sigma$, then

$$g(z) \leqslant f_{E,\sigma}(z),\ z \in \mathbb{C}.$$

The B. Ya. Levin function $f_{E,\sigma}(z)$ exists if $C_1|I_l| \geqslant |J_k| \geqslant C|I_l|$, J_k, $I_l \subset [2^n, 2^{n+1}]$ or J_k, $I_l \subset [-2^{n+1}, -2^n]$, $n \geqslant n_0$. We prove that if $C \geqslant c_0(\alpha)$, then $\max\limits_{x \in I_k} f_{E,\sigma}(x) \leqslant 6\sigma|I_k|$ and describe the behavior of $f_{E,1}(z)$ in a neighborhood of J_k, $k \in \mathbb{Z}$.

С.-Петербургский горный университет,
В.О., 21-я линия, д.2,
С.-Петербург, Россия
E-mail: olamamik@gmail.com

Поступило 23 сентября 2023 г.

С.-Петербургское отделение
Математического института им. В. А. Стеклова РАН,
наб. р. Фонтанки, 27,
191023 Санкт-Петербург, Россия
E-mail: nikolai.shirokov@gmail.com