Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 527, 2023 г.

Д. В. Руцкий

ВАРИАНТЫ МЕТОДА БУРГЕЙНА ДЛЯ ПРОВЕРКИ K-ЗАМКНУТОСТИ НЕКОТОРЫХ ПОДПАР

В начале 90-х Ж. Бургейн доказал, что пара подпространств $(\mathrm{L}_1^P, \mathrm{L}_p^P)$, определённых соотношением $\{Pf = f\}$ с помощью проектора P, являющегося оператором Кальдерона–Зигмунда, K-замкнута в соответствующей паре $(\mathrm{L}_1, \mathrm{L}_p)$ при $1 < p < \infty$. K-замкнутость означает, что произвольные измеримые разбиения в $\mathrm{L}_1 + \mathrm{L}_p$ функций из $\mathrm{L}_1^P + \mathrm{L}_p^P$ можно исправлять до разбиений в $\mathrm{L}_1^P + \mathrm{L}_p^P$ с соответствующими оценками нормы (см. определение 1 ниже). В настоящей работе предлагается один вариант рассуждения Ж. Бургейна, который естественным образом приводит ко многим известным его обобщениям. В качестве иллюстрации этой техники доказывается следующее обобщение результата С. В. Кислякова и К. Шу о K-замкнутости пространств Харди на бидиске: пространства функций на $\mathbb{R}^2$, носитель преобразования Фурье которых лежит в заданном конечном объединении многоугольников, K-замкнуты в паре $(\mathrm{L}_1, \mathrm{L}_\infty)$. С другой стороны, некоторые контрпримеры в контексте этого подхода выявляют конкретные ограничения, с которыми подобные методы сталкиваются в более высоких размерностях и при рассмотрении более сложных пространств функций на прямой и на плоскости. Среди прочего показано, как недавний результат С. В. Кислякова и И. К. Злотникова о K-замкнутости коинвариантных пространств оператора сдвига $\mathcal{K}_\theta^p$ можно непосредственно вывести из результата Ж. Бургейна, причём для всей шкалы $(\mathcal{K}_\theta^1, \mathcal{K}_\theta^\infty)$.

§1. K-замкнутость спектральных подпространств

Сразу оговоримся, что настоящая заметка имеет несколько обзорный характер по отношению к замечательному результату Ж. Бургейна [5] о K-замкнутости пространств типа Харди (в некотором общем

Ключевые слова: вещественная интерполяция, K-замкнутость, пространства Харди, пространства Лоренца, проблема Сидона, массивные множества, коинвариантные подпространства оператора сдвига.

Исследования в разделе 5 выполнены за счет гранта Российского научного фонда No. 23-11-00171, `https://rscf.ru/project/23-11-00171/`.

смысле), получившему дальнейшее развитие в ряде статей, среди которых нас особо интересуют [24] и [21]. Её основная цель – попытаться выяснить, как работает этот метод в контексте имеющихся приложений и обобщений, и с какими сложностями он сталкивается при выходе за известные границы его применимости, которые мы несколько уточним. При этом мы постараемся ограничиться минимумом подробностей, разнообразные приложения упомянем лишь частично и поверхностно. Следует отметить, что предлагаемая техника даёт особо простые и лаконичные доказательства уже известных утверждений, которые, впрочем, опираются на менее элементарные инструменты вещественного гармонического анализа. Некоторые более интересные приложения ввиду их сложности будут рассмотрены в последующих работах. Мы также почти ничего не говорим о многих других интересных результатах, имеющих отношение к интерполяции пространств типа Харди; упомянём лишь обзор [10], содержащий в последнем разделе некоторое стандартное изложение метода Ж. Бургейна.

В следующем разделе 2 результат Ж. Бургейна выводится из интерполяционной теоремы, которую можно найти в известной монографии Г. Б. Фолланда и Е. М. Стейна [7]. Далее, в разделе 3 приводится некоторое абстрактное обобщение этого результата, позволяющее выводить K-замкнутость подпар пары $(\mathrm{L}_1, \mathrm{L}_p)$, $1 < p < \infty$, из K-замкнутости других подпар пары $(\mathrm{L}_r, \mathrm{L}_p)$, $0 < r < 1$, составляющих в сумме эту подпару в подходящем смысле, если исходная подпара разделяется подходящей системой операторов. Показывается, как это обобщение позволяет без особых затруднений получить некоторые результаты Д. С. Анисимова, С. В. Кислякова и И. К. Злотникова о K-замкнутости в некоторых парах, задающихся двойными сингулярными интегралами. Сейчас же мы вкратце опишем остальное содержание настоящей работы.

Свойство K-замкнутости было впервые явным образом введено и довольно подробно изучено Ж. Пизье в случае пар пространств Харди $\mathrm{H}_p(\mathbb{T})$ на окружности (в том числе некоммутативных и при $p < 1$) в работе [16]. Естественно, до этого оно присутствовало ещё в работах Ж. Петре и других исследователей вещественного метода интерполяции (см., например, [15]), а результат П. Джонса [9] (см. также [3, §5.10]), устанавливающий, кроме прочего, что $(\mathrm{H}_1, \mathrm{H}_\infty)$ является парой Кальдерона, фактически уже содержал в себе K-замкнутость пары $(\mathrm{H}_1(\mathbb{T}), \mathrm{H}_\infty(\mathbb{T}))$.

Определение 1. *Пусть дана совместимая пара квазинормированных пространств* (X, Y). *Её подпара* (E, F) *называется* K*-замкнутой в* (X, Y) *с константой* C, *если для всякого элемента* $h \in E + F$ *и его разложения* $h = f_0 + g_0$, $f_0 \in X$, $g_0 \in Y$, *также существует разложение* $h = f + g$, $f \in E$, $g \in F$, *удовлетворяющее оценкам* $\|f\|_X \leqslant C\|f_0\|_X$ *и* $\|g\|_Y \leqslant C\|g_0\|_Y$.

В конкретных приложениях возникают разнообразные и иногда довольно абстрактные пространства. Для простоты в настоящей работе мы будем рассматривать только пары пространств Лебега $(\mathrm{L}_p, \mathrm{L}_q)$, а наш основной иллюстративный пример подпар – это подходящим образом определённые спектральные подпространства

$$\mathcal{S}_S^p = \{f \in \mathrm{L}_p, \operatorname{supp}\widehat{f} \subset S\}$$

функций на торе $\mathbb{T}^n$ или на евклидовом пространстве $\mathbb{R}^n$, носитель преобразования Фурье которых лежит в заданном множестве S с точностью до каких-то пренебрежимых множеств. На торе и при $1 \leqslant p \leqslant \infty$ пространство $\mathcal{S}_S^p$ замкнуто при любых $S \subset \mathbb{Z}^n$, пренебрежимые множества отсутствуют. В евклидовых пространствах в качестве пренебрежимых множеств мы возьмём множества меры 0, что даёт замкнутость пространства $\mathcal{S}_S^p$ при $1 \leqslant p \leqslant 2$, а для $2 < p \leqslant \infty$ определим их по двойственности как аннуляторы $\mathcal{S}_S^p = (\mathcal{S}_{\mathbb{R}^n \setminus S}^{p'})^\perp$. Хотя многие нюансы, связанные с пространствами $\mathcal{S}_S^\infty$, теряются при таком способе определения, его достаточно для целей настоящей работы. Приводящиеся ниже основные приложения и контрпримеры связаны с окружностью и тором, и именно этот случай мы рассматриваем по умолчанию. Многие построения с мультипликаторами, вполне работающие и в случае тора, проще и естественнее, однако, проводить в евклидовом пространстве, поэтому наш основной результат о двумерных множествах (теорема 2) мы формулируем и доказываем именно в этом случае. Известно, что многие результаты можно так или иначе устанавливать в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^n$ и потом как-то переносить на $\mathbb{T}^n$ (см., например, [2]).

Особый интерес представляют пары $(\mathcal{S}_S^2, \mathcal{S}_S^\infty)$, поскольку их K-замкнутость (и многие более слабые свойства интерполяционного характера) влечёт (как следствие основного результата работы [23]; см. [13, теорема C]) так называемую *массивность* множества $S \subset \mathbb{Z}^n$: модули коэффициентов Фурье функций из $\mathcal{S}_S^\infty$ мажорируют произвольные последовательности $l^2(S)$. На окружности известно довольно много (см. [11]) массивных множеств помимо классического случая $S = \mathbb{Z}$ (проблема Сидона) и аналитического случая $S = \mathbb{Z}_+$ (проблема Сидона для диск-алгебры), однако среди таких множеств сложной структуры (т. е. не сводящихся непосредственно к K-замкнутости пространств Харди) соответствующая K-замкнутость была установлена лишь для “экспоненциальной гребёнки” $L = \bigcup_{j\geqslant 0}[2^{2j-1}, 2^{2(j+1)-1}) \cap \mathbb{Z}$ (см. [21, теорема 3]). Аналитический случай верен и в бидиске, когда $S = \mathbb{Z}_+ \times \mathbb{Z}_+$ (что было показано ещё в [23]), а случай полидиска $n \geqslant 3$ остаётся открытой проблемой. Другой интересный нерешённый случай “плоской экспоненциальной гребёнки” $S = L \times \mathbb{Z}_+$, по-видимому, по своей сложности ближе к трёхмерному поликругу. С другой стороны, известны множества (например, конечные объединения геометрических последовательностей), не являющиеся массивными, что сразу же даёт примеры таких пар без K-замкнутости.

Сформулируем основной иллюстративный результат настоящей работы, который говорит о том, что для множества на плоскости $S \subset \mathbb{R}^2$ пара $(\mathcal{S}^1_S, \mathcal{S}^\infty_S)$ K-замкнута в $(\mathrm{L}_1, \mathrm{L}_\infty)$, если его границу можно нарисовать линейкой за конечное число операций. Мы называем выпуклыми многоугольниками пересечение конечного числа замкнутых полуплоскостей, если это пересечение имеет непустую внутренность; таким образом, наши многоугольники и множества S могут уходить на бесконечность.

Теорема 2. *Пусть $S \subset \mathbb{R}^2$ – объединение конечного числа выпуклых многоугольников. Тогда пара $(\mathcal{S}^1_S, \mathcal{S}^\infty_S)$ K-замкнута в $(\mathrm{L}_1, \mathrm{L}_\infty)$.*

Доказательство этого результата приводится ниже в разделе 4. Отметим, что если заменить K-замкнутость на устойчивость вещественной интерполяции $\mathcal{S}^{1/(1-\theta),p}_S \subset (\mathcal{S}^1_S, \mathcal{S}^\infty_S)_{\theta,p}$, $0 < \theta < 1$, $0 < p \leqslant \infty$, то такую ослабленную (но достаточную, в частности, для проверки массивности множеств и многих других утверждений) версию теоремы 2 несложно теми же методами вывести из известных результатов, а именно, из K-замкнутости в случае, когда S – выпуклый угол (см. предложение 9 ниже). Из этой же K-замкнутости для углов выводится и теорема 2 благодаря новому способу проверки K-замкнутости путём разделения пространств в сочетании со стандартной техникой разделения их при помощи гладких мультипликаторов с компактным носителем. Это разделение получается как некоторое естественное обобщение метода Ж. Бургейна (см. теорему 10 в разделе 3 ниже), составляющее основную новизну настоящей работы. Отметим, что возможное наличие бесконечных компонент у множества S или его дополнения делает доказательство в целом довольно нетривиальным, в нём приходится задействовать K-замкнутость включений и различные приёмы разделения спектров при помощи подходящих мультипликаторов. Это, как представляется, неплохо иллюстрирует богатство уже имеющейся техники.

В работе [14] была показана K-замкнутость в $(\mathrm{L}_q, \mathrm{L}_\infty)$ пары $(\mathcal{K}^q_\theta, \mathcal{K}^\infty_\theta)$, $1 < q < \infty$, коинвариантных пространств оператора сдвига, соответствующих внутренней функции θ на окружности. Эти пространства задаются при помощи проектора $\mathbb{P}_\theta = \mathbb{P} - \theta\mathbb{P}\bar{\theta}$, где $\mathbb{P}$ – проектор Рисса. Сложность проверки этой K-замкнутости методом Ж. Бургейна связана с тем, что проектор $\mathbb{P}_\theta$, по существу, составлен из двух, вообще говоря, несовместимых друг с другом операторов Кальдерона–Зигмунда. Однако в разделе 5 мы покажем, что пространства $\mathcal{K}^p_\theta$ распадаются (некоторым, вообще говоря, неканоническим образом, зависящим от выбора унимодулярной функции ρ, такой, что $\rho^2 = \bar{z}\theta$) на вещественную прямую сумму некоторых пространств, задающихся подходящими операторами Кальдерона–Зигмунда, что позволяет распространить результат работы [14] на случай $q = 1$.

Теорема 3. *Пара* $(\mathcal{K}^1_\theta, \mathcal{K}^\infty_\theta)$ *K-замкнута в* $(\mathrm{L}_1, \mathrm{L}_\infty)$.

В заключительном разделе 6 мы обсудим некоторые трудности содержательного характера, которые возникают при попытках использования рассматриваемых методов для работы с более сложными пространствами, такими, как $\mathrm{H}_\infty\left(\mathbb{T}^3\right)$. В частности, с помощью некоторых методов из работы А. Б. Александрова [1] получается, что если множество $S \subset \mathbb{Z}^n$ содержит множество вида $\{a + jb \mid j \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}\}$, то замыкание пространств $\mathcal{S}^r_S$ в L_r, $r < 1$, и соответствующих пространств $\mathcal{S}^{1,q}_S$ в пространствах Лоренца $\mathrm{L}_{1,q}$, $q > 1$, содержит моном z^a. Это исключает K-замкнутость пар $(\mathcal{S}^r_S, \mathcal{S}^p_S)$, $p > 1$, со многими представляющими интерес множествами, такими, как дополнения $\mathbb{Z}^n \setminus \mathbb{Z}^n_+$ при $n > 1$, не только при $r < 1$, но и вообще для каких-либо перестановочно инвариантных пространств с несуммируемыми функциями X вместо L_r.

§2. Вариант метода Бургейна

Чтобы перейти от упомянутых выше примеров непосредственно к варианту метода Ж. Бургейна, заметим, что K-замкнутость подпар пары $(\mathrm{L}_2, \mathrm{L}_\infty)$ по двойственности эквивалентна K-замкнутости соответствующих аннуляторов в обычно более удобной для работы паре $(\mathrm{L}_1, \mathrm{L}_2)$ (см., например, [8, теорема 6.1]). В случае пространств Харди на окружности и на прямой их аннуляторами также являются (с точностью до сомножителя z) пространства Харди, что позволило Ж. Пизье свести при помощи факторизации K-замкнутость пары $(\mathrm{H}_r, \mathrm{H}_p)$, $1/2 < r \leqslant 1 < p < \infty$, к тривиальной (из-за дополняемости) K-замкнутости пары $(\mathrm{H}_{2r}, \mathrm{H}_{2p})$, и далее получить её при всех $0 < r, p < \infty$.

Теорема 4 ([16]; см. также [10, §2.4])**.** *Пара* $(\mathrm{H}_r, \mathrm{H}_p)$ *K-замкнута в* $(\mathrm{L}_r, \mathrm{L}_p)$ *при* $0 < r, p < \infty$.

Вскоре после этого С. В. Кисляков и К. Шу нашли очень простое, и при этом значительно более сильное рассуждение, в частности, сразу же дающее случай $p = \infty$ (см. [10, §2.5]), в котором факторизация и дополняемость присутствует уже неявно.

Метод Ж. Бургейна работает лишь при $p = 1$, однако кроме пространств Харди на окружности (определяемых через проектор Рисса $\mathbb{P}$) он даёт K-замкнутость для широкого класса пространств $X^P = \{f \in X \mid Pf = f\}$, которые определяются произвольными проекторами Кальдерона–Зигмунда P (действующими на подходящих пространствах однородного типа, таких как $\mathbb{T}^n$ или $\mathbb{R}^n$; см., например, [10, §4]), среди которых особый интерес представляют пространства Соболева. Основной результат можно сформулировать следующим образом.

Теорема 5 ([5, лемма 2.4])**.** *Предположим, что проектор* P *является оператором Кальдерона–Зигмунда. Пара* $(\mathrm{L}_1^P, \mathrm{L}_p^P)$ *K-замкнута в паре* $(\mathrm{L}_1, \mathrm{L}_p)$ *при* $1 < p < \infty$.

Многие упомянутые выше и другие результаты о различных свойствах интересных подпространств в L_∞ так или иначе основаны на использовании слабого типа $(1,1)$ двойственных проекторов в подходящем смысле, из которого иногда даже удаётся извлечь всю необходимую информацию, как, например, в абстрактной теореме об исправлении из работы [12]. Теорема 5 – не исключение из этого общего принципа: она основана на стандартном разложении Кальдерона–Зигмунда, которое, среди прочего, используется для проверки слабого типа операторов Кальдерона–Зигмунда. Отправной точкой настоящей работы можно считать сравнение теоремы 5 со следующим результатом, связывающим наличие слабого типа с действием операторов в подходящим образом определённом атомном вещественном[1] пространстве Харди H_r.

Теорема 6 ([7, теорема 3.37])**.** *Пусть $0 < r < 1 < p < \infty$ и P – субаддитивный оператор, заданный на L_1. Предположим, что при некоторой постоянной C для всех $f \in \mathrm{L}_1 \cap \mathrm{H}_r$ выполнена оценка $\|Pf\|_{\mathrm{L}_r} \leqslant C\|f\|_{\mathrm{H}_r}$, и для всех $f \in \mathrm{L}_p \cap \mathrm{L}_1$ выполнена оценка $\|Pf\|_{\mathrm{L}_p} \leqslant C\|f\|_{\mathrm{L}_p}$. Тогда оператор P имеет слабый тип $(1,1)$.*

Доказательство теоремы 6 содержит в себе следующее соотношение, являющееся прямым следствием разложения Кальдерона–Зигмунда:

$$\mathrm{L}_1 \subset (\mathrm{H}_r, \mathrm{L}_p)_{\theta,\infty}, \quad 0 < r < 1 < p < \infty, \quad \frac{1-\theta}{r} + \frac{\theta}{p} = 1. \tag{1}$$

В правой части включения (1) стоит вещественное интерполяционное пространство для пары $(\mathrm{H}_r, \mathrm{L}_p)$ (см., например, [4]), и заключение теоремы 6 сразу получается из (1) по интерполяции, поскольку $(\mathrm{L}_r, \mathrm{L}_p)_{\theta,\infty} = \mathrm{L}_{1,\infty}$.

Отметим, что пространство в правой части включения (1) является некоторым вещественным пространством Харди–Лоренца $\mathrm{H}_{1,\infty}$ (см., например, [6]), и включение (1) нужно понимать в смысле обобщённых функций. Кроме L_1 в этом пространстве также содержится довольно много умеренно сингулярных распределений, таких, например, как дельта-функция δ в случае прямой $\mathbb{R}$, и её преобразование Гильберта $H\delta(x) = 1/\pi x$, $x \in \mathbb{R}$. При этом в разложении Кальдерона–Зигмунда, на котором основано доказательство формулы (1), обе части

[1]Традиционно, эти пространства обозначаются так же, как и граничные аналитические классы Харди из теоремы 4. Автор надеется, что в дальнейшем смысл этого символа каждый раз будет ясен из контекста.

остаются в пространстве L_1 с оценкой нормы через исходную функцию. Примечательно, что и общие разложения в сумме $\mathrm{H}_r + \mathrm{L}_p$, возникающие во включении (1), всегда дают части с нормой в L_1, равномерно оценивающиеся через норму раскладываемой функции, причём естественный метод проверки этого утверждения, по существу, уже содержит в себе основные черты доказательства теоремы 5.

Предложение 7. *Включение* (1) *эквивалентно тому, что при некотором значении константы c для произвольной функции $f \in \mathrm{L}_1$ и $0 < t < \infty$ найдётся разложение $f = h + g$, $h \in \mathrm{H}_r$, $g \in \mathrm{L}_p$, такое, что $\|h\|_{\mathrm{H}_r} \leqslant ct^\theta \|f\|_{\mathrm{L}_1}$ и $\|g\|_{\mathrm{L}_p} \leqslant ct^{\theta-1}\|f\|_{\mathrm{L}_1}$, причём $\|h\|_{\mathrm{L}_1} \leqslant c\|f\|_{\mathrm{L}_1}$ и $\|g\|_{\mathrm{L}_1} \leqslant c\|f\|_{\mathrm{L}_1}$.*

Эквивалентное условие без оценок функций h и g в L_1 – это просто определение вещественного интерполяционного пространства в правой части формулы (1). Поскольку $h = f - g$, функция h является регулярным распределением из H_r, полностью определяемым своими граничными значениями $h \in \mathrm{L}_r$, $\|h\|_{\mathrm{L}_r} \leqslant c_1\|h\|_{\mathrm{H}_r}$ с подходящим значением константы c_1. С другой стороны, как хорошо известно, аналогичное включение $\mathrm{L}_1 \subset (\mathrm{L}_r, \mathrm{L}_p)_{\theta,\infty}$ обеспечивается просто разрезанием функции по некоторому уровню, поэтому найдётся разложение $f = h_0 + g_0$, такое, что $\|h_0\|_{\mathrm{L}_r} \leqslant c_2 t^\theta \|f\|_{\mathrm{L}_1}$ и $\|g_0\|_{\mathrm{L}_p} \leqslant c_2 t^{\theta-1}\|f\|_{\mathrm{L}_1}$ с подходящим значением константы c_2, причём $\|h_0\|_{\mathrm{L}_1} \leqslant \|f\|_{\mathrm{L}_1}$ и $\|g_0\|_{\mathrm{L}_1} \leqslant \|f\|_{\mathrm{L}_1}$. Чтобы получить требуемую оценку в L_1 для функции h (из которой сразу вытекает оценка и для $g = f - h$), достаточно оценить норму функции $h_1 = h_0 - h = -(g_0 - g)$, что сразу получается из интерполяционного неравенства $\|h_1\|_{\mathrm{L}_1} \leqslant \|h_1\|_{\mathrm{L}_r}^{1-\theta}\|h_1\|_{\mathrm{L}_p}^{\theta} \leqslant c\|f\|_{\mathrm{L}_1}$ с подходящим значением константы c.

Легко проверить, что предположения теоремы 6 также дают аналог теоремы 5, причём всё выводится из включения (1). Отметим, что теорема 6, в частности, обеспечивает корректность определения пространства L_1^P.

Теорема 8. *Предположим, что* (*линейный*) *проектор P удовлетворяет условиям теоремы* 6. *Тогда пара* $(\mathrm{L}_1^P, \mathrm{L}_p^P)$ *K-замкнута в паре* $(\mathrm{L}_1, \mathrm{L}_p)$.

Действительно, мы фактически можем брать те же разложения, соответствующие включению (1), что и в оригинальном результате, но оценивать их следующим, как представляется, несколько более естественным образом. Проводящиеся при доказательстве теоремы 5 оценки в L_1 отдельно вблизи носителя “плохой” части проекции разложения Кальдерона–Зигмунда и вне его в этом случае оказываются полностью абстрагированы в предположении ограниченности оператора P на H_r. В отличие от всех аналогичных рассуждений, излагавшихся до этого в литературе, для его понимания ничего не нужно знать про разложения Кальдерона–Зигмунда (но зато что-то нужно знать про вещественные пространства Харди).

Пусть заданы функция $H \in \mathrm{L}_1^P + \mathrm{L}_p^P$ и измеримое разложение $H = f + g \in \mathrm{L}_1 + \mathrm{L}_p$. Применяя формулу (1) к функции f и выбирая значение t так, чтобы выполнялось соотношение $t^{\theta-1}\|f\|_{\mathrm{L}_1} = \|g\|_{\mathrm{L}_p}$, откуда $t^{\theta}\|f\|_{\mathrm{L}_1} = t\|g\|_{\mathrm{L}_p}$ и $t^{1-\theta}\|g\|_{\mathrm{L}_p} = \|f\|_{\mathrm{L}_1}$, получаем разложение $f = f_0 + f_1$, $\|f_0\|_{\mathrm{H}_r} \leqslant ct\|g\|_{\mathrm{L}_p}$, $\|f_1\|_{\mathrm{L}_p} \leqslant c\|g\|_{\mathrm{L}_p}$. Проверим, что разложение $H = F + G$, $F = Pf_0$, $G = P(f_1 + g)$ обеспечивает требуемую K-замкнутость. Для “хорошей” части оценка сразу получается из ограниченности проектора P: $\|G\|_{\mathrm{L}_p} \leqslant C(c+1)\|g\|_p$. Чтобы оценить “плохую” часть F, в силу предложения 7 достаточно оценить норму функции $f_2 = f_0 - F = (I-P)f_0 = (I-P)(H - f_1 - g) = -(I-P)(f_1+g)$ в пространстве L_1, что мы опять сделаем при помощи интерполяционного неравенства

$$\|f_2\|_{\mathrm{L}_1} \leqslant \|f_2\|_{\mathrm{L}_r}^{1-\theta}\|f_2\|_{\mathrm{L}_p}^{\theta}. \tag{2}$$

С одной стороны, $\|(I-P)f_0\|_{\mathrm{L}_r} \leqslant (1+C)\|f_0\|_{\mathrm{H}_r} \leqslant (1+C)ct\|g\|_{\mathrm{L}_p}$. С другой стороны, как и при оценке “хорошей” части G, $\|(I-P)(f_1+g)\|_{\mathrm{L}_p} \leqslant (1+C)\|f_1+g\|_{\mathrm{L}_p} \leqslant (1+C)(c+1)\|g\|_{\mathrm{L}_p}$. Вместе это как раз и даёт $\|f_2\|_{\mathrm{L}_1} \leqslant c_1 t^{1-\theta}\|g\|_{\mathrm{L}_p} = c_1\|f\|_{\mathrm{L}_1}$ при подходящем значении константы c_1. Теорема 8 доказана.

Помимо некоторого интересного обобщения, которое будет представлено в следующем разделе 3 и далее развито при доказательстве теоремы 2 в разделе 4, теорема 8 несколько более явно указывает на то, что без дополнительных приёмов подобное рассуждение, по-видимому, можно провести, только если проектор P имеет слабый тип $(1, 1)$, что следует из включения (1). Это является серьёзным препятствием во многих ситуациях (например, для аналитических пространств Харди на поликругах), где естественные проекторы обладают повышенной сингулярностью. Также теорема 8 говорит о том, что в весовых и векторных обобщениях метода Бургейна (о которых будет идти речь в других работах) вместо непосредственных аналогов разложений Кальдерона–Зигмунда можно обойтись подходящими аналогами включения (1).

§3. Вариант метода Бургейна–Кислякова–Шу

С. В. Кислякову и К. Шу в работе [24] впервые удалось получить K-замкнутость пары $(\mathrm{H}_p(\mathbb{T}^2), \mathrm{H}_\infty(\mathbb{T}^2))$ в $(\mathrm{L}_p, \mathrm{L}_\infty)$ при всех $p > 0$, совместив рассуждение Ж. Бургейна и некоторые уже хорошо развитые к тому моменту инструменты для исследования K-замкнутости аналитических пространств Харди. Кроме того, для проверки этого результата был получен аналог теоремы Т. Вольфа о склейке интерполяционных шкал [19] для K-замкнутости, и при $p \leqslant 1$ используется то, что случай $p < 1$ с конечным вторым показателем до этого был установлен в [20, предложение 14], причём для поликругов произвольной размерности. Более подробное доказательство весового обобщения результата из [20] можно найти в [22]. Тем же способом можно получить его и для аналитических пространств Харди на полиполуплоскости $\mathbb{C}_+^n$, которые в терминах граничных значений во введённых ранее обозначениях имеют вид $\mathcal{S}^p_{\mathbb{R}^n_+}$. Для простоты мы ограничимся случаем биполуплоскости $n = 2$. Применение модуляции (т.е. сдвига спектра на $v \in \mathbb{R}^2$ путём умножения на функции вида $t \mapsto e^{i\langle v,t\rangle}$) и невырожденных линейных преобразований (с помощью которых произвольные углы раствора менее π переводятся друг в друга) даёт следующую формулировку результата работы [20].

Предложение 9. *Предположим, что S – некоторый угол раствора менее π на плоскости $\mathbb{R}^2$. Тогда пара $(\mathcal{S}^r_S, \mathcal{S}^p_S)$ K-замкнута в $(\mathrm{L}_r, \mathrm{L}_p)$ при всех значениях $0 < r, p < \infty$.*

Впоследствии в [13, теорема 1] рассуждение для проверки K-замкнутости пары $(\mathrm{H}_p(\mathbb{T}^2), \mathrm{H}_\infty(\mathbb{T}^2))$ было, среди прочего, обобщено на более абстрактный случай подходящим образом определённых пар вида $(X_A(\mathrm{L}^P_p), Y_A(\mathrm{L}^P_\infty))$, $1 < p < \infty$, где X_A и Y_A – это пространства типа Харди для пар BMO-реглурярных решёток измеримых функций (X, Y) на окружности, а P – оператор Кальдерона–Зигмунда, являющийся проектором. Аналогичные рассуждения далее применялись и обобщались на весовые случаи в различных ситуациях в работах [21, 22] и [14].

В основе всех этих рассуждений лежит естественная идея: каким-то образом разбить заданную функцию из аннуляторов исследуемой пары и её измеримое разложение на аналитические части при помощи подходящего оператора и разложения Кальдерона–Зигмунда, для которых K-замкнутость известна. Достигается это, однако, довольно непрямым способом с помощью построения некоторых специальных “подкручивающих” слагаемых, причём пространства в разложении, по-видимому, могут быть только какими-то пространствами Харди от одной переменной. Исходя из изложенного выше доказательства теоремы 8, мы можем реализовать эту идею более непосредственно, и при этом у нас не появляются какие-либо явные ограничения на тип пространств в разложении.

Теорема 10. *Пусть* $0 < r < 1 < p < \infty$, *при* $1 \leqslant j \leqslant m < \infty$ *заданы некоторые (не обязательно замкнутые) подпространства* $\mathcal{S}^1 \subset \mathrm{L}_1$, $\mathcal{S}^p \subset \mathrm{L}_p$, $\mathcal{S}^q_j \subset \mathrm{L}_q$, $q \in \{r, p\}$, *и линейные операторы* P_j, *удовлетворяющие условиям теоремы* 6. *Предположим, что* $P = \sum_{j=1}^m P_j$, $\mathcal{S}^q = \sum_{j=1}^m \mathcal{S}^q_j$, $q \in \{r, p\}$, $\mathcal{S}^r \cap \mathrm{L}_1 \subset \mathcal{S}^1$, *и выполнены следующие условия*:

(i) $P_j : (\mathrm{H}_r + \mathrm{L}_p) \cap (\mathcal{S}^1 + \mathcal{S}^p) \to \mathcal{S}^r_j + \mathcal{S}^p_j$.
(ii) $(I - P) : \mathcal{S}^1 + \mathcal{S}^p \to \{0\}$.
(iii) *Пары* $(\mathcal{S}^r_j, \mathcal{S}^p_j)$ *K-замкнуты в* $(\mathrm{L}_r, \mathrm{L}_p)$.

Тогда пара $(\mathcal{S}^1, \mathcal{S}^p)$ *K-замкнута в* $(\mathrm{L}_1, \mathrm{L}_p)$.

Действительно, пусть $H \in \mathcal{S}^1 + \mathcal{S}^p$ и $H = f + g$, $f \in \mathrm{L}_1$, $g \in \mathrm{L}_p$. Возьмём такое же разложение $f = f_0 + f_1$ как и при доказательстве теоремы 8. Далее, функции $u_j = P_j f_0$ и $v_j = P_j(f_1 + g)$ имеют такие же (с точностью до константы) оценки норм в L_r и L_p, что и у функций f_0 и g, соответственно. По предположению (i) $H_j = u_j + v_j \in \mathcal{S}^r_j + \mathcal{S}^p_j$, и из предположения (iii) найдутся некоторые разложения $H_j = U_j + V_j$ с $U_j \in \mathcal{S}^r_j$ и $V_j \in \mathcal{S}^p_j$, удовлетворяющие тем же (с точностью до константы) оценкам норм в L_r и L_p, что и функции f_0 и g.

Проверим, что функции $F = \sum_{j=1}^m U_j \in \sum_{j=1}^m \mathcal{S}^r_j \subset \mathcal{S}^r$ и $G = \sum_{j=1}^m V_j \in \mathcal{S}^p$ обеспечивают требуемую K-замкнутость. В силу предположения (ii) имеем $F + G = \sum_{j=1}^m H_j = \sum_{j=1}^m P_j H = PH = H$. Функция G уже обладает подходящей оценкой нормы в L_p, а для оценки функции F достаточно оценить норму в L_1 функции $f_0 - F =$

$(f_0 - Pf_0) + (Pf_0 - F)$. Первое слагаемое $f_0 - Pf_0$ с учётом предположения (ii) оценивается точно так же, как и при доказательстве теоремы 8. Для второго слагаемого $f_2 = Pf_0 - F = \sum_{j=1}^{m}(P_j f_0 - U_j) = \sum_{j=1}^{m}(u_j - U_j) = -\sum_{j=1}^{m}(v_j - V_j)$ требуемая оценка в L_1 получается из того же самого интерполяционного неравенства (2). В частности, $F \in \mathcal{S}^r \cap \mathrm{L}_1 \subset \mathcal{S}^1$. Теорема 10 доказана.

Далее мы рассмотрим некоторые приложения теоремы 10 к уже известным результатам, в которых разделение происходит на несколько пространств, каждое из которых является пространством Харди от одной переменной. Более интересные приложения возникают при доказательстве теоремы 2 в разделе 4 ниже.

Вероятно, самым простым содержательным приложением теоремы 10 является K-замкнутость на правой части шкалы в теореме 3. Подробнее об этом будет сказано в разделе 5 ниже. Здесь же мы просто коротко отметим, что (в безвесовом случае) двойственная формулировка имеет дело с пространствами $K'_p = \overline{z\mathrm{H}_p} + \theta\mathrm{H}_p$, $1 \leqslant p < \infty$. Легко видеть, что условия теоремы 10 выполнены для пространств $\mathcal{S}_1^s = \theta\mathrm{H}_p$, $\mathcal{S}_2^s = \overline{z\mathrm{H}_p}$, $0 < s < \infty$, и операторов $P_1 = \mathbb{P}$, $P_2 = I - P_1$ (тем самым, $P = I$). Предположение (iii) получается из теоремы 4, поскольку умножение на $\bar{\theta}$ устанавливает эквивалентность между пространствами $\mathcal{S}_1^s$ и H_s, а умножение на z и комплексное сопряжение – между $\mathcal{S}_2^s$ и H_s. Элементарные утверждения об эквивалентности для K-замкнутости и транзитивности K-замкнутости мы для ясности сформулируем ниже в предложениях 11 и 12. Таким образом, условия теоремы 10 выполнены, и пара (K'_1, K'_p) K-замкнута в $(\mathrm{L}_1, \mathrm{L}_p)$. Проверка этого утверждения в [14, лемма 2.2] занимает четыре страницы.

Предложение 11. *Пусть (E_j, F_j) – подпары пар (X_j, Y_j), $j \in \{0, 1\}$. Предположим, что U и V – операторы, действующие ограниченно как $U : X_0 \to X_1$, $U : Y_0 \to Y_1$, $V : E_1 \to E_0$, $V : F_1 \to F_0$ и такие, что $(I - VU) : E_0 + E_1 \to \{0\}$. Если пара (E_1, F_1) K-замкнута в (X_1, Y_1), то пара (E_0, F_0) K-замкнута в (X_0, Y_0).*

Предложение 12. *Пусть (X_0, Y_0) – подпара пары (X_1, Y_1), которая сама является подпарой пары (X_2, Y_2). Если пара (X_0, Y_0) K-замкнута в (X_1, Y_1) и пара (X_1, Y_1) K-замкнута в (X_2, Y_2), то пара (X_0, Y_0) K-замкнута в (X_2, Y_2).*

Практически так же выглядит естественное приложение теоремы 10 к проверке K-замкнутости пары $(\mathcal{S}_L^1, \mathcal{S}_L^\infty)$, где L – определённая в разделе 1 “экспоненциальная гребёнка” на окружности, установленной в [21, теорема 3] (впрочем, доказательство там приведено лишь схематически). В двойственных терминах правая часть шкалы соответствует пространствам $\mathcal{S}^p_{\mathbb{Z}\setminus L}$, $1 \leqslant p < \infty$. Мы можем взять операторы P_j и пространства $\mathcal{S}^s_2$ из предыдущего примера, а пространства $\mathcal{S}^s_1 = \mathcal{S}^s_{\mathbb{Z}_+\cap(\mathbb{Z}\setminus L)}$ имеют структуру, вполне аналогичную пространствам $\mathcal{S}^s_L$. В частности, условие (iii) для них получается так же, как и K-замкнутость в левой части шкалы $(\mathcal{S}^r_L, \mathcal{S}^q_L)$, $1 < q < \infty$, при $r = 1$: соответствующее рассуждение в [21, §5] работает и при $r < 1$.

Несколько сложнее применить теорему 10 к доказательству основного результата работы [21] об исправлении для квадратичных функций. Там всё сводится к проверке в [21, лемма 3] K-замкнутости пар пространств $(\mathcal{S}^1, \mathcal{S}^p)$, $1 < p < \infty$, следующего вида:

$$\mathcal{S}^q = \left\{\{f_k\}_{k=0}^{\infty} \in \mathrm{L}_s\left(l^2\right) \mid M_k f_k = -M_k f_0, k \geqslant 1\right\}, \quad 1 \leqslant q < \infty,$$

где M_k – ортогональные проекторы на пространства $\mathcal{S}^2_{[2^{k-1}-1,2^k-1)}$, $k \geqslant 1$, вместе составляющие стандартное разложение Литлвуда–Пэли для пространств Харди H_2.

Прежде всего, определим действующие на l^2-значных функциях мультипликаторы Фурье $\mathcal{M}_1 = \{\mathcal{M}_{1,k}\}_{k=1}^{\infty}$ и $\mathcal{M}_2 = \{\mathcal{M}_{2,k}\}_{k=1}^{\infty}$, первый из которых соответствует последовательностям $\alpha_k(n)$, равным 0 при $n < 2^{k-1} - 1$, линейно возрастающим от 0 до 1 при $2^{k-1} - 1 \leqslant n \leqslant 2^k - 2$, и равным 1 при $n \geqslant 2^k - 1$; второй мультипликатор соответствует последовательностям $1 - \alpha_k$. Такие мультипликаторы являются операторами Кальдерона–Зигмунда и обладают требуемой ограниченностью (см., например, [21, приложение]).

Мы будем применять теорему 10 при $m = 3$. Операторы P_j, $j \in \{1, 2\}$, определим так: на нулевой компоненте они действуют как $\mathbb{P}f_0/2$, а на остальные действуют как мультипликаторы $\mathcal{M}_j$. Оператор P_3 на нулевой компоненте действует как $(I - \mathbb{P})f_0$, а остальные компоненты переводит в 0. Это обеспечивает выполнение предположения (ii). Определим при $0 < s < \infty$ пространства

$$\mathcal{S}^s_0 = \left\{\{f_k\}_{k=0}^{\infty} \in \mathrm{L}_s\left(l^2\right) \mid f_0 \in \mathrm{H}_s\right\},$$

$$\mathcal{S}^s_1 = \left\{\{f_k\}_{k=0}^{\infty} \in \mathcal{S}^s_0 \mid M_k f_k = -2\mathcal{M}_{1,k} M_k f_0, \widehat{f}_k(n) = 0, n < 2^{k-1} - 1, k \geqslant 1\right\},$$

$$\mathcal{S}^s_2 = \left\{\{f_k\}_{k=0}^{\infty} \in \mathcal{S}^s_0 \mid M_k f_k = -2\mathcal{M}_{2,k} M_k f_0, \widehat{f}_k(n) = 0, n \geqslant 2^k - 1, k \geqslant 1\right\},$$

$$\mathcal{S}^s_3 = \left\{\{f_k\}_{k=0}^{\infty} \in \mathrm{L}_s\left(l^2\right) \mid f_0 \in \overline{z\mathrm{H}_s}, f_k = 0, k \geqslant 1\right\}.$$

Легко видеть, что предположение (i) выполнено. Проверим предположение (iii) при $j = 1$. Заметим, что функции из $\mathcal{S}_1^s$ лежат в векторнозначных аналитических пространствах Харди $\mathrm{H}_s\left(l^2\right)$. Поскольку по векторнозначному варианту теоремы 4 (см., например, [10, §3.6]; это утверждение уже использовалось в предыдущем примере при проверке условия (iii) для $\mathcal{S}_1^s$) пара $(\mathrm{H}_r\left(l^2\right),\mathrm{H}_p\left(l^2\right))$ K-замкнута в $(\mathrm{L}_r\left(l^2\right),\mathrm{L}_p\left(l^2\right))$, по предложению 12 достаточно установить K-замкнутость пары $(\mathcal{S}_1^r,\mathcal{S}_1^p)$ в этой паре. Определим мультипликаторы $\mathcal{N}_k$, соответствующие последовательностям $\beta_k = \alpha_k - \alpha_{k+1}$, $k \geqslant 1$, $\mathcal{N}_0 = 0$, и составленный из них оператор $\mathcal{N}\{f_k\}_{k=0}^\infty = \{\mathcal{N}_k f_0\}_{k=0}^\infty$. Он также является оператором Кальдерона–Зигмунда. Определим ещё оператор $\mathcal{Z}$, который нулевую компоненту оставляет на месте, а остальные умножает на функции $\left\{\bar{z}^{2^k-1}\right\}_{k=1}^\infty$. Легко видеть, что оператор $\mathcal{Z}(I + 2\mathcal{N})$ вместе с обратным к нему оператором $(I-2\mathcal{N})\bar{\mathcal{Z}}$ устанавливают эквивалентность между пространствами $\mathcal{S}_1^s$ и $\mathrm{H}_s\left(l^2\right)$, так что требуемая K-замкнутость получается из предложения 11. Предположение (iii) при $j = 2$ проверяется аналогично, а при $j = 3$ оно вытекает из теоремы 4.

§4. Доказательство теоремы 2

Если не принимать во внимание бесконечные компоненты многоугольников, то основную сложность при доказательстве теоремы 2 представляет следующее утверждение, частным случаем которого (для одного угла с раствором $3\pi/2$) является аналог на плоскости результата о K-замкнутости аналитических пространств Харди на бидиске [24, §3]. У автора не получилось проверить его стандартным методом Бургейна–Кислякова–Шу даже в случае объединения первого и третьего координатных углов. Теорема 10, однако, легко сводит всё к предложению 9.

Предложение 13. *Пусть $S = \bigcup_{j=1}^m S_j$, где $S_j \subset \mathbb{R}^2$ – замкнутые углы с вершиной в точке a. Тогда пара $(\mathcal{S}_S^1, \mathcal{S}_S^p)$ K-замкнута в $(\mathrm{L}_1, \mathrm{L}_p)$, $1 < p < \infty$.*

Действительно, применяя модуляцию, можно считать, что $a = 0$. Далее, можно считать, что все углы без вершины $S_j \setminus \{0\}$ дизьюнктные и невырожденные (т. е. раствора больше 0). Если какой-то угол имеет раствор больше либо равный π, разобъём его на два перекрывающихся угла раствора меньше π, которые для определённости будем считать углами S_1 и S_2. Нетрудно стандартным образом определить гладкие функции φ_j на окружности $\mathbb{T}$ так, чтобы φ_j были равны 0 на $S_k \cap \mathbb{T}$, $k \neq j$, и 1 на $S_j \cap \mathbb{T}$, если перекрывающихся углов нет или $j > 2$, а для пары перекрывающихся углов (если они есть) потребовать чтобы сумма $\varphi_1 + \varphi_2$ была равна 1 на $(S_1 \cup S_2) \cap \mathbb{T}$, и при этом функция φ_1 равна 0 на $(S_2 \setminus S_1) \cap \mathbb{T}$ и функция φ_2 равна 0 на $(S_1 \setminus S_2) \cap \mathbb{T}$. Продолжение функций φ_j до однородных степени 0 на $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ делает из них мультипликаторы P_j, являющиеся операторами Кальдерона–Зигмунда (см., например, [17, §VI.4.4]), которые удовлетворяют условиям теоремы 6 при $r > 2/3$ (см., например, [17, §III.3.2]). Определим пространства $\mathcal{S}^s_j = \mathcal{S}^s_{S_j}$. Легко видеть, что условия теоремы 10 выполнены.

Отметим, что в этом рассуждении, если углы S_1 и S_2 перекрываются, то можно считать, что они оба являются полупространствами, и тогда предположение (iii) вытекает из значительно более простой K-замкнутости одномерных пространств Харди с дополнительной переменной (см., например, [10]). Поэтому в частном случае, когда имеется лишь один угол раствора больше π, например, если $S = \mathbb{R}^2 \setminus \mathbb{R}^2_+$ (дискретный аналог чего соответствует аннуляторам пространств Харди $\mathrm{H}_q\left(\mathbb{T}^2\right)$, то есть оригинальному воплощению метода Бургейна–Кислякова–Шу [24, §3]), предложение 13 также является примером уже известных результатов, которые, наряду с рассмотренными в разделе 3, получаются из K-замкнутости двух пар пространств Харди от одной переменной. Подобное рассуждение также можно провести и с более простыми разделяющими операторами, беря (как и в [24]) в качестве них проектор на $\mathcal{S}^2_{S_1}$ и его дополнение, который с точностью до поворота является одномерным проектором Рисса по одной из переменных, а затем используя подходящий аналог формулы (1)

$$\mathrm{L}_1\left(\mathrm{L}_1\right) \subset \left(\mathrm{L}_r\left(\mathrm{H}_r\right), \mathrm{L}_p\left(\mathrm{L}_p\right)\right)_{\theta,\infty}, \quad \frac{1-\theta}{r} + \frac{\theta}{p} = 1,$$

естественным образом получающийся из неё же подходящим выбором параметра t разложений в зависимости от второй (внешней) переменной.

Во многих ситуациях удобно работать с K-замкнутостью включений, обобщающей определение 1.

Определение 14. *Пусть дана совместимая пара квазинормированных пространств (X, Y). Включение её подпар $(E_0, F_0) \subset (E_1, F_1)$ называется K-замкнутым в (X, Y) с константой C, если для всякого* *элемента* $h \in E_0 + F_0$ *и его разложения* $h = f_0 + g_0$, $f \in X$, $g \in Y$, *также существует разложение* $h = f + g$, $f \in E_1$, $g \in F_1$, *удовлетворяющее оценкам* $\|f\|_X \leqslant C\|f_0\|_X$ *и* $\|g\|_Y \leqslant C\|g_0\|_Y$.

Легко видеть, что K-замкнутость включений вытекает из K-замкнутости какой-то промежуточной подпары, и, в частности, из K-замкнутости пары (E_0, F_0), или из K-замкнутости пары (E_1, F_1).

Предложение 15. *Пусть дана пара квазинормированных пространств* (X, Y) *и её подпары* (E_0, F_0), (E_1, F_1). *Если какая-то подпара* (E, F) *K-замкнута в* (X, Y) *и выполнены включения* $(E_0, F_0) \subset (E, F) \subset (E_1, F_1)$, *то включение* $(E_0, F_0) \subset (E_1, F_1)$ *K-замкнуто в* (X, Y).

Хорошо известно, что пространства вида $\mathcal{S}^s_S$ можно разделять при помощи гладких мультипликаторов с компактным носителем при всех $1 \leqslant s \leqslant \infty$ (см., например, [4, лемма 6.1.5]). Соответствующее интуитивно ясное утверждение для K-замкнутости можно сформулировать следующим несколько громоздким образом.

Предложение 16. *Предположим, что* (E_k, F_k), $(E_{k,j}, F_{k,j})$, $k \in \{0, 1\}$, $1 \leqslant j \leqslant m$, *– подпары совместимой пары квазибанаховых пространств* (X, Y), *причём включения* $(E_{0,j}, F_{0,j}) \subset (E_{1,j}, F_{1,j})$ *K-замкнуты в* (X, Y). *Пусть операторы* P_j *ограничены в* X *и* Y, *операторы* Q_j *действуют ограниченно как* $Q_j : E_{1,j} \to E_1$, $Q_j : F_{1,j} \to F_1$, *и пусть* $P_j : E_0 + F_0 \to E_{0,j} + F_{0,j}$ *и* $\left(I - \sum_{j=1}^m Q_j P_j\right) : E_0 + F_0 \to \{0\}$. *Тогда включение* $(E_0, F_0) \subset (E_1, F_1)$ *K-замкнуто в* (X, Y).

Для проверки достаточно взять $H \in E_0 + F_0$, $H = f + g \in X + Y$, применить предполагаемую K-замкнутость к разложениям $H_j = P_j H = P_j f + P_j g$, которая даёт $H_j = F_j + G_j \in E_{1,j} + F_{1,j}$ с подходящими оценками. После этого можно положить $F = \sum_{j=1}^m Q_j F_j$ и $G = \sum_{j=1}^m Q_j G_j$, что даёт подходящее разложение $H = F + G \in E_1 + F_1$.

Предложение 17. *Пусть множество* S *покрыто* (*т.е.* $S \subset \bigcup_{j=1}^m \Omega_j$) *конечным объединением областей* $\Omega_j \subset \mathbb{R}^n$ *с гладкими компактными границами, причём при* $n = 1$ *дополнительно предполагаем, что множества* Ω_j *могут содержать бесконечные лучи* $(-\infty, -R)$ *и* (R, ∞) *лишь одновременно при достаточно больших значениях* $R > 0$. *Допустим, что включения*

$$\left(\mathcal{S}^1_{S\cap\Omega_j}, \mathcal{S}^p_{S\cap\Omega_j}\right) \subset \left(\mathcal{S}^1_{(S\cap\Omega_j)\cup(\mathbb{R}^n\setminus\Omega_j)}, \mathcal{S}^p_{(S\cap\Omega_j)\cup(\mathbb{R}^n\setminus\Omega_j)}\right)$$

K-замкнуты при некотором $1 < p \leqslant \infty$. *Тогда пара* $(\mathcal{S}^1_S, \mathcal{S}^p_S)$ *K-замкнута в* $(\mathrm{L}_1, \mathrm{L}_p)$.

Действительно, можно стандартным образом определить гладкое неотрицательное разложение единицы $\{\varphi_j\}_{j=1}^m$, $\chi_S\left(1 - \sum_{j=1}^m \varphi_j\right) = 0$, $\operatorname{supp}\varphi_j \subset \Omega_j$, для рассматриваемого покрытия. Далее, зададим мультипликаторы $P_j = Q_j$, соответствующие функциям $\varphi_j^{1/2}$. Некоторые из функций φ_j могут иметь неограниченный носитель, но тогда носитель разности $1-\varphi_j$ ограничен, и эти мультипликаторы также ограничены в L_q при всех $1 \leqslant q \leqslant \infty$. Применяя предложение 16 при $X = \mathrm{L}_1$, $Y = \mathrm{L}_p$, $E_{0,j} = \mathcal{S}^1_{S\cap\Omega_j}$, $F_{0,j} = \mathcal{S}^p_{S\cap\Omega_j}$, $E_{1,j} = \mathcal{S}^1_{(S\cap\Omega_j)\cup(\mathbb{R}^n\setminus\Omega_j)}$, $F_{1,j} = \mathcal{S}^p_{(S\cap\Omega_j)\cup(\mathbb{R}^n\setminus\Omega_j)}$, получаем требуемую K-замкнутость.

Нам также понадобится следующее естественное обобщение предложения 17.

Предложение 18. *Пусть* $\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^{n'} \times \mathbb{R}^{n''}$, *проекция* S' *множества* $S \subset \mathbb{R}^n$ *на* $\mathbb{R}^{n'}$ *покрыта (т.е.* $S' \subset \bigcup_{j=1}^m \Omega'_j$*) конечным объединением областей* $\Omega'_j \subset \mathbb{R}^{n'}$ *с гладкими компактными границами, и* $\Omega_j = \Omega'_j \times \mathbb{R}^{n''}$. *При* $n' = 1$ *дополнительно предполагаем, что множества* Ω'_j *могут содержать бесконечные лучи* $(-\infty, -R)$ *и* (R, ∞) *лишь одновременно при достаточно больших значениях* $R > 0$. *Допустим, что включения*

$$\left(\mathcal{S}^1_{S\cap\Omega_j}, \mathcal{S}^p_{S\cap\Omega_j}\right) \subset \left(\mathcal{S}^1_{(S\cap\Omega_j)\cup(\mathbb{R}^n\setminus\Omega_j)}, \mathcal{S}^p_{(S\cap\Omega_j)\cup(\mathbb{R}^n\setminus\Omega_j)}\right)$$

K-замкнуты при некотором $1 < p \leqslant \infty$. *Тогда пара* $(\mathcal{S}^1_S, \mathcal{S}^p_S)$ *K-замкнута в* $(\mathrm{L}_1, \mathrm{L}_p)$.

Его доказательство проводится построением – таким же, что и в предложении 17, мультипликаторов для областей Ω'_j, действующих на $\mathrm{L}_q\left(\mathbb{R}^{n'}\right)$, $1 \leqslant q \leqslant \infty$, естественным их распространением на пространства $\mathrm{L}_q\left(\mathbb{R}^{n'} \times \mathbb{R}^{n''}\right)$, и применением предложения 16.

По-видимому, без K-замкнутости включений так или иначе не обойтись при проверке теоремы 8, если бесконечная компонента множества S или его дополнения нетривиальна и невыпукла. Для этого нам понадобится следующее очень простое обобщение теоремы 10.

Теорема 19. *Пусть* $0 < r < 1 < p < \infty$, *при* $1 \leqslant j \leqslant m < \infty$ *заданы некоторые подпространства* $\mathcal{S}^1 \subset \mathcal{S}'^1 \subset \mathrm{L}_1$, $\mathcal{S}^p \subset \mathcal{S}'^p \subset \mathrm{L}_p$, $\mathcal{S}^q_j \subset \mathcal{S}'^q_j \subset$

L_q, $q \in \{r,p\}$, *и линейные операторы* P_j, *удовлетворяющие условиям теоремы* 6. *Предположим, что* $P = \sum_{j=1}^m P_j$, $\mathcal{S}'^q = \sum_{j=1}^m \mathcal{S}_j'^q$, $q \in \{r,p\}$, $\mathcal{S}'^r \cap \mathrm{L}_1 \subset \mathcal{S}'^1$, *и выполнены следующие условия.*

(i) $P_j : (\mathrm{H}_r + \mathrm{L}_p) \cap (\mathcal{S}^1 + \mathcal{S}^p) \to \mathcal{S}_j^r + \mathcal{S}_j^p$.

(ii) $(I - P) : \mathcal{S}^1 + \mathcal{S}^p \to \{0\}$.

(iii) *Включения* $(\mathcal{S}_j^r, \mathcal{S}_j^p) \subset (\mathcal{S}_j'^r, \mathcal{S}_j'^p)$ *K-замкнуты в* $(\mathrm{L}_r, \mathrm{L}_p)$.

Тогда включение $(\mathcal{S}^1, \mathcal{S}^p) \subset (\mathcal{S}'^1, \mathcal{S}'^p)$ *K-замкнуто в* $(\mathrm{L}_1, \mathrm{L}_p)$.

Мы говорим, что множество $S \subset \mathbb{R}^2$ имеет *щель*

$$\sigma = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid \alpha \leqslant \langle x, b\rangle \leqslant \beta, \langle x, b'\rangle \geqslant \gamma\}, b, b' \in \mathbb{R}^2, \langle b, b'\rangle = 0, \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}, \tag{3}$$

если множество $S \cap \sigma$ состоит из двух параллельных лучей. Хотя наличие щелей мешает разделять части множества двумерными мультипликаторами, как мы увидим ниже, K-замкнутость для множеств со щелями при помощи предложения 18 нетрудно свести к K-замкнутости для множеств без щелей.

Предложение 20. *Если множество* σ *вида* (3) *имеет непустую внутренность, то пара* $(\mathcal{S}_\sigma^r, \mathcal{S}_\sigma^p)$ *K-замкнута в* $(\mathrm{L}_r, \mathrm{L}_p)$ *при всех* $0 < r < 1 < p < \infty$.

Действительно, при помощи модуляции и поворота можно считать, что $\sigma = [0, a] \times \mathbb{R}_+$. По предложениям 12 и 9 достаточно проверить K-замкнутость этой пары в $(\mathrm{H}_r(\mathbb{C}_+ \times \mathbb{C}_+), \mathrm{H}_p(\mathbb{C}_+ \times \mathbb{C}_+))$. Эта K-замкнутость легко получается из предложения 9 разделением (как в предложении 18) отрезка $[0, a]$ на две части гладкими мультипликаторами с компактным носителем, которые ограничены в кратных пространствах Харди $\mathrm{H}_q(\mathbb{C}_+ \times \mathbb{C}_+)$, $0 < q < \infty$.

Если S – острый угол, то мы обозначаем через $\mathrm{trunc}_d S$ его симметричное усечение длины $d > 0$ от основания, то есть пересечение с замкнутой полуплоскостью, расположенной перпендикулярно биссектрисе на расстоянии d от его вершины в сторону угла.

Предложение 21. *Пусть* $S_j \subset \mathbb{R}^2$, $1 \leqslant j \leqslant m$, *– углы раствора менее* π, σ_j, $m < j \leqslant m'$, *– множества вида* (3) *с непустой внутренностью, а* S_0 *– либо пустое множество, либо угол раствора больше либо равного* π *с вершиной в начале координат, причём все множества* S_0, $\mathrm{trunc}_{d_j} S_j$, $1 \leqslant j \leqslant m$, *и* σ_j, $m < j \leqslant m'$, *попарно дизъюнктны, а* *множество*

$$S = S_0 \cup \left(\bigcup_{j=1}^{m} \operatorname{trunc}_{d_j} S_j \right) \cup \left(\bigcup_{j=m+1}^{m'} \sigma_j \right)$$

не имеет щелей. Предположим, что $d'_j < d_j$, *и объединение*

$$S' = S_0 \cup \left(\bigcup_{j=1}^{m} \operatorname{trunc}_{d'_j} S_j \right) \cup \left(\bigcup_{j=m+1}^{m'} \sigma_j \right)$$

также дизъюнктно. Тогда включение $(\mathcal{S}^1_S, \mathcal{S}^p_S) \subset (\mathcal{S}^1_{S'}, \mathcal{S}^p_{S'})$ *K-замкнуто в* $(\mathrm{L}_1, \mathrm{L}_p)$ *при* $1 < p < \infty$.

Угол S_0, если он есть, разобъём на два перекрывающихся угла S'_0, S''_0 и построим для них такие же дизъюнктные с остальными частями множества S мультипликаторы P'_0, P''_0, как в предложении 13. Если этого угла нет, то при помощи модуляции можно считать, что $0 \notin S'$. Множества σ_j мы впишем в подходящие усечённые углы $\operatorname{trunc}_{d'_j} S_j$, $m < j \leqslant m'$, таким образом, чтобы все множества S_0 и $\operatorname{trunc}_{d'_j} S_j$, $1 \leqslant j \leqslant m'$, были попарно дизъюнктны. Множества $\operatorname{trunc}_{d_j} S_j$, $1 \leqslant j \leqslant m$, мы покроем конечным числом углов $S_{j,k}$ того же раствора что и S_j таким образом, чтобы $\operatorname{trunc}_{d_j} S_j \subset \bigcup_k S_{j,k} \subset \operatorname{trunc}_{d'_j} S_j$, а множества $\operatorname{trunc}_{d'_j} S_j$, $m < j \leqslant m'$, покроем ими самими: $S_{j,1} = \operatorname{trunc}_{d'_j} S_j$. Пусть $\psi : \mathbb{R} \to [0,1]$ – гладкая функция, такая, что $\psi : (-\infty, 0] \to \{0\}$ и $\psi : [1, \infty) \to \{1\}$. Для введённых покрытий усечённых углов $\operatorname{trunc}_{d_j} S_j$ и множеств σ_j можно при $\delta > 0$ стандартным образом задать гладкие разбиения единицы $\psi_{j,k}(x) = \psi\left(1 - \frac{\operatorname{dist}(x, S_{j,k})}{\delta |x|}\right)$, $\psi_j(x) = \psi\left(1 - \frac{\operatorname{dist}(x, \bigcup_k S_{j,k})}{\delta |x|}\right)$, $x \in \mathbb{R}^2$, $\varphi_{j,k} = \psi_j \left(\sum_l \psi_{j,l}\right)^{-1} \psi_{j,k}$, и соответствующие мультипликаторы $P_{j,k}$. В качестве пространств $\mathcal{S}^q_{j,k}$, $1 \leqslant j \leqslant m$, мы возьмём спектральные пространства для углов $S_{j,k}$, сдвинутых на расстояние $d_j - d'_j$ в сторону вершины угла S_j таким образом, чтобы они содержали $S_{j,k}$ и при этом оставались внутри множества S', причём углы $S_{j,k}$, лежащие во внутренности $\operatorname{trunc}_{d'_j} S_j$, мы сдвигаем так, чтобы внутренность сдвигов содержала $S_{j,k}$. При $m < j \leqslant m'$ положим $\mathcal{S}^q_{j,1} = \mathcal{S}^q_{\sigma_j}$. Используя предложения 9 и 20, а также подходящие теоремы о мультипликаторах, несложно проверить, что для достаточно малых значений δ условия теоремы 19 выполнены, и она даёт требуемую K-замкнутость включений.

Теперь всё готово для доказательства теоремы 2. Заметим, что замыкания дополнений множеств S также являются объединениями конечного числа многоугольников. Используя такие же построения с разделяющими мультипликаторами, как и при проводящемся далее доказательстве K-замкнутости в $(\mathrm{L}_1, \mathrm{L}_p)$, $1 < p < \infty$, либо же просто триангулируя подходящим образом множество S, нетрудно убедиться, что пространства $\mathcal{S}_S^q$ дополняемы в L_q при $1 < q < \infty$, и пары $(\mathcal{S}_S^p, \mathcal{S}_S^q)$ K-замкнуты в $(\mathrm{L}_p, \mathrm{L}_q)$ при всех $1 < p < q < \infty$. С учётом двойственности и аналога [24, теорема 2] теоремы Т. Вольфа о склейке шкал для K-замкнутости, достаточно проверить, что пара $(\mathcal{S}_S^1, \mathcal{S}_S^p)$ K-замкнута в $(\mathrm{L}_1, \mathrm{L}_p)$ при некотором $1 < p < \infty$.

Прежде всего, допустим что множество S имеет щель σ. С помощью поворота и модуляции можно считать, что она перпендикулярна первой координатной оси и лежит в множестве $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+$. Отрезок I_0, внутренность которого содержит проекции всех параллельных σ щелей множества S на эту ось, можно покрыть конечным числом интервалов $\Omega'_k \subset \mathbb{R}$ таким образом, чтобы каждый из них содержал не более одной стороны этих щелей, или одну сторону пары противоположных щелей. Дополним эти интервалы парой открытых лучей Ω'_0 до покрытия всей оси $\mathbb{R}$ так, чтобы $\Omega'_0 \cap I_0 = \varnothing$. Заметим, что замыкания множеств $S_k = S \cap (\Omega'_k \times \mathbb{R})$, $k \neq 0$, не имеют никаких щелей, а замыкание множества $S_0 = [S \cap (\Omega'_0 \times \mathbb{R})] \cup [(\mathbb{R} \setminus \Omega'_0) \times \mathbb{R}]$ имеет те же щели, что и у множества S, за исключением всех его щелей, параллельных σ. По предложению 18 K-замкнутость для S сводится к K-замкнутости для множеств S_k. Повторяя для них и всех оставшихся щелей эту конструкцию, убеждаемся, что таким образом можно свести требуемое утверждение к случаю множества S без щелей. В этом случае, покрывая плоскость $\mathbb{R}^2$ дополнением Ω_2 подходящего выпуклого многоугольника M и гомотетическим с центром в 0 расширением Ω_1 внутренности M, с помощью предложения 17 сводим всё к предложению 21 и ситуации множества S_0, являющегося объединением конечного числа ограниченных выпуклых многоугольников M_k. Но его можно покрыть конечным набором открытых кругов Ω_j таким образом, что замыкание каждого из множеств Ω_j содержит не более одной точки пересечения границ полуплоскостей, пересечение которых образует многоугольники M_k. Поэтому предложение 17 сводит требуемую K-замкнутость с множеством S_0 к предложению 13.

Отметим, что теми же методами несложно получить некоторые многомерные аналоги предложения 13, в которых множество $S \subset \mathbb{R}^n$ составлено из конечного объединения замкнутых выпуклых конусов K_j с вершиной в 0 и многогранными основаниями, если множества $K_j \setminus \{0\}$ попарно дизъюнктны. Однако, как уже упоминалось, на данный момент ничего не известно про случай $S = \mathbb{R}^3 \setminus \mathbb{R}^3_+$.

§5. Доказательство теоремы 3

Перед тем как перейти к доказательству теоремы 3, сделаем пару замечаний общего характера. Пространства $\mathcal{K}^p_\theta$ имеют отношение к более общей ситуации пространств, определяемых проекторами вида $P = \sum_j a_j P_j b_j$, где a_j и b_j – измеримые функции, а P_j – некоторые операторы Кальдерона–Зигмунда. Если эта сумма конечна и функции a_j и b_j ограничены, то P является почти настолько же хорошим оператором, как и P_j: он ограничен в тех же решётках измеримых функций и имеет слабый тип $(1, 1)$. Однако пока не удалось выяснить, при каких условиях в этой общей ситуации пара $(\mathrm{L}_1^P, \mathrm{L}_p^P)$ будет K-замкнута в $(\mathrm{L}_1, \mathrm{L}_p)$, $1 < p < \infty$, или обладает какими-то более хорошими интерполяционными свойствами, чем то, что следует из слабого типа оператора P. Полезно отметить, что устойчивость вещественной интерполяции $(\mathrm{L}_q^P, \mathrm{L}_\infty^P)_{\theta,p} = \mathrm{L}^P_{q/(1-\theta),p}$, $1 < q < \infty$, $0 < p \leqslant \infty$, $0 < \theta < 1$, можно естественным образом получить уже из слабого типа и ограниченности оператора P, рассмотрев сопряжённые пространства как факторпространства вида $\mathrm{L}_s/\mathrm{L}_s^{I-P^*}$. Отметим также, что несложно построить примеры проекторов на пространства коразмерности 1, у которых сопряжённый оператор имеет слабый тип, а сильного не имеет, и потому соответствующая пара не обладает K-замкнутостью.

Одним из возможных путей получения каких-то результатов для пространств, определяемых проекторами P такого типа, может быть рассмотрение некоторых максимальных функций Стрёмберга–Торчинского (local sharp maximal function) [18, глава 3] для соответствующих систем функций $\mathcal{P}$, являющихся линейными оболочками “коэффициентов” a_j. Однако в этой теории на пространство $\mathcal{P}$, кроме прочего, накладывается следующее ограничение:

$$\mu\left(x \in B \mid |p(x)| > s_1 \sup_{y\in B} |p(y)|\right) \geqslant s_2 \mu(B), \quad p \in \mathcal{P}, \tag{4}$$

при некоторых $0 < s_1, s_2 < 1$ на каждом шаре B рассматриваемого пространства однородного типа с мерой μ. На евклидовых пространствах оно выполнено в основной для теории вещественных пространств Харди ситуации, когда $\mathcal{P}$ – полиномы степени не выше заданной. Легко, однако, убедиться в том, что на окружности для пространства $\mathcal{P}$, натянутого на 1 и некоторую ограниченную функцию φ, гладкую везде кроме одной точки и имеющую неограниченную производную, условие (4) не выполнено. В ситуации пространств $\mathcal{K}^p_\theta$ так будет, если $\theta(z) = \exp(-\frac{1+z}{1-z})$ – сингулярная внутренняя функция, построенная по дельта-мере. Так или иначе, пока неясно, какие нетривиальные условия на функцию a могли бы обеспечить уточнение $\mathrm{L}_1 \subset (\mathrm{H}_r \cap a\mathrm{H}_r, \mathrm{L}_p)_{\theta,\infty}$ включения (1).

В случае пространств $\mathcal{K}^p_\theta$, однако, некоторым образом оказывается всё-таки можно применить метод Ж. Бургейна. Естественным наводящим соображением для этого является следующее наблюдение: в частном случае, когда $\theta = z\rho^2$ для внутренней функции ρ, пространства $\bar\rho\mathcal{K}^p_\theta$ инвариантны относительно комплексного сопряжения, поскольку так же инвариантны их аннуляторы $\bar z\bar\rho\overline{\mathrm{H}_p} + z\rho\mathrm{H}_p$. В общей ситуации, если мы рассматриваем все пространства только на окружности, можно полностью отвлечься от аналитической природы рассматриваемых пространств, и взять унимодулярную функцию ρ, такую, что $\rho^2 = \bar z\theta$. Тогда $\theta = z\rho^2$. Пространства $\mathrm{K}^p = \bar\rho\mathcal{K}^p_\theta$ задаются проекторами $P = \bar\rho\mathbb{P}\rho - \rho z\mathbb{P}\bar z\bar\rho$. Будем обозначать через $\bar T$ сингулярный интегральный оператор с ядром, комплексно сопряженным ядру заданного оператора T. В частности, считая для удобства меру Лебега на окружности вероятностной, поскольку ядром проектора Рисса $\mathbb{P}$ является функция $K(z,\zeta) = \sum_{j\geqslant 0}(z\bar\zeta)^j$, $\bar{\mathbb{P}}$ – это просто ортогональный проектор на $\overline{\mathrm{H}_2}$, $\bar z\bar{\mathbb{P}}z + \mathbb{P} = I$ и $\mathbb{P} - I = -\bar z\bar{\mathbb{P}}z$. Поэтому

$$P + I = \bar\rho\mathbb{P}\rho - \rho z(\mathbb{P} - I)\bar z\bar\rho = \bar\rho\mathbb{P}\rho + \rho\bar{\mathbb{P}}\bar\rho = \bar\rho\mathbb{P}\rho + \overline{\bar\rho\mathbb{P}\rho},$$

откуда $P = \bar\rho\mathbb{P}\rho + \overline{\bar\rho\mathbb{P}\rho} - I$ и $\bar P = P$. Поскольку для $f \in \mathrm{K}^p$ справедливо $\bar f = \overline{Pf} = \bar P\bar f = P\bar f \in K^p$, пространства K^p инвариантны относительно комплексного сопряжения, и поэтому их можно разложить в вещественную прямую сумму

$$\mathrm{K}^p = \mathrm{Re}\ \mathrm{K}^p \oplus_{\mathbb{R}} i\mathrm{Re}\ \mathrm{K}^p,$$

в силу чего достаточно проверить требуемую K-замкнутость для вещественных пространств $\mathrm{Re}\, \mathrm{K}^p$. Проектор P на функциях из них совпадает с $\mathrm{Re}\; P = 2\mathrm{Re}\; \bar{\rho}\mathbb{P}\rho - I$. Рассматривая $\mathbb{C}$ как вещественное двумерное пространство $\mathbb{R}^2$, видим, что вещественное пространство $\rho\,\mathrm{Re}\; \mathrm{K}^p$ задаётся проектором $P_1 = \rho(\mathrm{Re}\; P)\bar{\rho} = 2\rho\,\mathrm{Re}\; \bar{\rho}\mathbb{P} - I$, который удовлетворяет условиям теоремы 6 (где все пространства понимаются в смысле вещественных пространств функций со значениями в $\mathbb{R}^2$). Для недостающей (по сравнению с результатами [14]) K-замкнутости пар $(\mathcal{K}^1_\theta, \mathcal{K}^p_\theta)$, $1 < p < \infty$, остаётся применить теорему 8 (разумеется, оригинальный результат Ж. Бургейна, т. е. теорема 5, в этом случае тоже работает без изменений). При этом аналогичные рассуждения можно провести и для аннуляторов пространств $\mathcal{K}^p_\theta$, так что теорема 3 целиком получается из результатов раздела 2, теоремы о K-замкнутости для аннуляторов, и теоремы о склеивании K-замкнутости для интерполяционных шкал.

§6. Некоторые сложности, связанные со множествами $\mathcal{S}^p_S$ при $p < 1$

Выше мы видели, что для применения теоремы 10 требуется, чтобы для подпространств, на которые разбивается исходное пространство, имела место K-замкнутость (iii) при $r < 1$. В связи с этим отметим сначала некоторые элементарные необходимые условия для K-замкнутости. Прежде всего, хотя замкнутость подпар выше нигде явно не была использована, её всегда можно предполагать.

Предложение 22. *Если подпара (E_0, F_0) совместимой пары (X, Y) квазбанаховых пространств K-замкнута в (X, Y) с константой C, а E и F – замыкания E_0 и F_0 в X и Y, соответственно, то пара (E, F) K-замкнута в (X, Y) с константой C_1 при любом $C_1 > dC$, где d – константа в неравенстве треугольника.*

Проверка производится естественным итеративным построением подходящих приближений. Пусть $f_0 \in X$ и $g_0 \in Y$. Если $H_j = f_j + g_j \in E + F$, то найдутся некоторые $U_j \in E_0$ и $V_j \in F_0$, такие, что $H_j - (U_j + V_j) = f_{j+1} + g_{j+1}$, $\|f_{j+1}\|_X \leqslant \varepsilon\|f_j\|_X$ и $\|g_{j+1}\|_Y \leqslant \varepsilon\|g_j\|_Y$. Применяя K-замкнутость (E_0, F_0) к $U_j + V_j = (f_j - f_{j+1}) + (g_j - g_{j+1})$, получаем $U_j + V_j = \varphi_j + \psi_j$, $\varphi_j \in E_0$, $\psi_j \in F_0$, $\|\varphi_j\|_X \leqslant C(1+\varepsilon)\|f_j\|_X$, $\|\psi_j\|_Y \leqslant C(1+\varepsilon)\|g_j\|_Y$. Полагая $\varphi = \sum_{j=0}^\infty \varphi_j$ и $\psi = \sum_{j=0}^\infty \psi_j$, видим, что $f_0 + g_0 =$

$\varphi + \psi \in E + F$ с подходящими оценками нормы при достаточно малых значениях $\varepsilon > 0$.

Следующее наблюдение, в частности, показывает, что пары пространств $(\mathcal{S}^p_{S_0}, \mathcal{S}^q_{S_1})$ для множеств $S_0, S_1 \subset \mathbb{Z}^n$ не могут быть K-замкнуты, если замыкание одного из этих пространств содержит больше мономов, чем пересечение их замыканий.

Предложение 23. *Пусть подпара (E, F) K-замкнута в (X, Y). Тогда $E \cap Y \subset F$ и $F \cap X \subset E$; иначе говоря, $(E \setminus F) \cap Y = (F \setminus E) \cap X = \varnothing$.*

Действительно, если $f \in (E \setminus F) \cap Y$, то применение K-замкнутости к разложению $f = 0 + f$ сразу приводит к противоречию $f \in F$.

Для невыпуклых пространств Харди простое обобщение известного результата А. Б. Александрова [1, теорема 7.1] показывает, что $\mathrm{L}_r(\mathbb{T}^n) = z^N \mathrm{H}_r(\mathbb{T}^n) + \overline{z^N \mathrm{H}_r(\mathbb{T}^n)}$ при $0 < r < 1$ и $N \geqslant 0$, где мы обозначили $z^N = z_1^N z_2^N \dots z_n^N$, что делает невозможным K-замкнутость для $(\mathcal{S}^r_S, \mathcal{S}^p_S)$, $0 < r < 1 < p < \infty$, если множество $S \subsetneqq \mathbb{Z}^n$ одновременно содержит какие-то сдвиги противоположных координатных углов. В частности, в одномерном случае такая K-замкнутость не имеет места для множеств $S \subsetneqq \mathbb{Z}$, содержащих два противоположных луча, т.е. для всех множеств с конечным дополнением. Это, среди прочего, накладывает некоторые естественные ограничения на возможные весовые результаты для K-замкнутости пар пространств с пространствами полиномов $\mathcal{K}^\infty_{z^m}$. Просто K-замкнутость в этом случае имеет место из-за конечномерности, однако нас интересует K-замкнутость, равномерная по m, которая некоторым образом соответствует пространствам Пэли-Винера $\mathcal{S}^p_{[0,a]}$, $0 < a < \infty$. Отметим, что рассуждение из [1, теорема 7.1] работает и в следующей несколько более общей постановке. Через $\mathcal{S}^X_S$ мы обозначаем замыкание в пространстве X множества полиномов из $\mathcal{S}^2_S$, и, в частности, $\mathrm{H}_X = \mathcal{S}^X_{\mathbb{Z}^n_+}$.

Предложение 24. *Пусть X – r-вогнутая решётка измеримых функций на $\mathbb{T}^n$ при некотором $0 < r < 1$, причём $\mathrm{L}_\infty \subset X$. Тогда $X = z^N \mathrm{H}_X(\mathbb{T}^n) + \overline{z^N \mathrm{H}_X(\mathbb{T}^n)}$.*

Поскольку вогнутые решётки обладают порядково непрерывной нормой, в них плотны тригонометрические полиномы P. Для них подходящее разложение обеспечивается умножением на функции

$$1 = U_\zeta(z) + \overline{U_\zeta(z)}, \quad z \in \mathbb{T}^n,$$

$U_\zeta(z) = z^m/(z^m - \zeta)$ при достаточно большом $m \in \mathbb{Z}$ и при некотором $\zeta \in \mathbb{T}$, поскольку $|U_\zeta P| = |\overline{U_\zeta} P|$, и имеет место оценка

$$\left(\int_{\mathbb{T}} \|U_\zeta P\|_X^r \mathrm{dm}(\zeta)\right)^{1/r} \leqslant \left\|\left(\int_{\mathbb{T}} |U_\zeta(\cdot)P(\cdot)|^r \mathrm{dm}(\zeta)\right)^{1/r}\right\|_X = \\ \|z \mapsto 1/(1-z)\|_{\mathrm{L}_r} \|P\|_X < \infty.$$

Предложения 24 уже достаточно для того, чтобы исключить возможность выполнения условия (iii) теоремы 10, если $\mathcal{S}_j^s = \mathcal{S}_S^s$ с множеством $S \subset \mathbb{Z}^n$, содержащим некоторые сдвиги противоположных координатных октантов. Однако для близких к критическому пространству L_1 перестановочно инвариантных пространств X наподобие $\mathrm{L}_{1,\infty}$ возникает более тонкая ситуация, которая в одномерном случае также была подробно исследована А. Б. Александровым в [1, теорема 3.2]: если $X \not\subset \mathrm{L}_1$, то разложение $X = X_A + X_{\bar{A}}$ имеет место тогда и только тогда, когда для нижнего индекса Бойда α_X выполняется соотношение $\alpha_X > 1$. В частности, для всех пространств Лоренца $X = \mathrm{L}_{1,q}$ этот индекс равен 1, и так же, как и в пространствах L_1 (т. е. при $q = 1$), сумма $X_A + X_{\bar{A}}$ оказывается незамкнутой в X. Для L_1 также имеются довольно общие результаты о незамкнутости [14, §3]. Некоторые методы работы [1] позволяют исследовать устройство замыкания подобных сумм.

Предложение 25. *Предположим, что $X \supset \mathrm{L}_\infty$ – перестановочно инвариантное квазинормированное пространство измеримых функций на $\mathbb{T}^n$, такое, что $X \setminus \mathrm{L}_1 \neq \varnothing$. Также предположим, что X имеет порядково непрерывную квазинорму. Если множество $S \subset \mathbb{Z}^n$ таково, что при некоторых $a = \{a_k\}_{k=1}^n, b \in \mathbb{Z}^n$ оно содержит множество $\ell = \{a + bj \mid j \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}\}$, то замыкание $\mathcal{S}_S^\infty \cap X$ в X содержит моном $z^a = z_1^{a_1} z_2^{a_2} \ldots z_n^{a_n}$.*

В частности, пространства $z^N \mathrm{H}_X(\mathbb{T}^n) + \overline{z^N \mathrm{H}_X(\mathbb{T}^n)}$ всюду плотны в X для пространств X, удовлетворяющих условиям предложения 25: в этом случае $S = S_+ \cup (-S_+)$, $S_+ = (N, N, \ldots N) + \mathbb{Z}_+^n$, и условие выполнено для всякого $a \in \mathbb{Z}^n$ при $b = (A, A, \ldots A)$, если брать число $A \in \mathbb{Z}$ достаточно большим. Пространства Лоренца $X = \mathrm{L}_{1,q}$ обладают порядковой непрерывностью при всех $q < \infty$, а случай $q = \infty$ сводится к случаю $q < \infty$, поскольку $\mathrm{L}_{1,q} \subset \mathrm{L}_{1,\infty}$ при всех $0 < q < \infty$.

Доказательство предложения 25 легко сводится к элементарному одномерному случаю $S_0 = \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, который мы сейчас разберём. Нужно показать, что константы $c \in \mathbb{C}$ приближаются в X функциями из X с нулевыми средними. Для простоты вместо окружности $\mathbb{T}$ будем рассматривать отрезок $[0,1]$. Достаточно приближать константу $c = 1$. По предположению найдётся некоторая функция $f \in X \setminus \mathrm{L}_1$, которую можно считать всюду положительной и невозрастающей. Из несуммируемости для каждого $0 < \varepsilon < 1$ найдётся такое $A > 0$, что для срезки $f_\varepsilon = \chi_{[0,\varepsilon]} f \wedge A$ выполнено $\int f_\varepsilon = 1$, но при этом из порядковой непрерывности квазинормы X следует, что $\lim_{\varepsilon\to 0} \|f_\varepsilon\|_X = 0$, так что функции $g_\varepsilon = 1 - f_\varepsilon$ образуют требуемое приближение.

Для общего случая возьмём эти же функции g_ε, считая, что они уже пересажены на окружность $\mathbb{T}$. Тогда коэффициенты Фурье функций $G_\varepsilon(z) = z^a g_\varepsilon(z^b)$, $z \in \mathbb{T}^n$, лежат в множестве ℓ, откуда $G_\varepsilon \in \mathcal{S}_S^X$. При этом $|z^a - G_\varepsilon(z)| = |1 - g_\varepsilon(z^b)| = |f_\varepsilon(z^b)|$, так что из перестановочной инвариантности получаем $\lim_{\varepsilon\to 0} \|z^a - G_\varepsilon\|_X = \lim_{\varepsilon\to 0} \|f_\varepsilon\|_X = 0$.

Напоследок отметим, что предложение 25 вместе с некоторыми его векторнозначными обобщениями на пространства вида $X = \mathrm{L}_1\,(\mathrm{L}_{1,\infty})$, строго говоря, не исключает все потенциальные возможности для применения известных методов к интерполяции с пространством $\mathrm{H}_\infty\left(\mathbb{T}^3\right)$. Осталось невыясненным, например, возможно ли разделить пространство $\mathcal{S}^1_{\mathbb{R}^3\setminus\mathbb{R}^3_+}$ на аналитические части подходящей системой каких-то операторов. Отметим ещё следующий вопрос: какие мономы содержат замыкания в L_p при $p < 1$ пространств $\mathcal{S}^2_{\mathbb{Z}\setminus L}$, где L – “экспоненциальная гребёнка”, упомянутая в разделе 1?

Благодарность. Автор признателен А. Б. Александрову и С. В. Кислякову за интересные обсуждения и ценные указания.

Список литературы

1. A. B. Aleksandrov, *Essays on non locally convex Hardy classes.* — Lect. Notes Math. **864** (1981), 1–89.
2. N. Asmar, E. Berkson, J. Bourgain, *Restrictions from* $\mathbb{R}^n$ *to* $\mathbb{Z}^n$ *of weak type* $(1,1)$ *multipliers.* — Studia Math. **108** (1994), 291–299.
3. C. Bennett, R. Sharpley, *Interpolation of Operators.* Academic Press, Inc., Boston, MA (1988).
4. J. Bergh, J. Löfström, *Interpolation Spaces. An Introduction.* Springer-Verlag (1976).

5. J. Bourgain, *Some consequences of Pisier's approach to interpolation.* — Isr. J. Math. **77** (1992), 165–185.
6. R. Fefferman, F. Soria, *The space weak H^1.* — Studia Math. **85** (1986), 1–16.
7. G. B. Folland and E. M. Stein. *Hardy spaces on homogeneous groups.* Princeton Univ. Press, 1982.
8. S. Janson, *Interpolation of subcouples and quotient couples.* — Ark. Mat. **31** (1993), 307–338.
9. P. W. Jones, *L^∞ estimates of the $\bar\partial$-problem in a half-plane.* — Acta Math. **150** (1983), 138–152.
10. S. V. Kisliakov, *Interpolation of H_p-spaces: some recent developments.* — Israel Math. Conf. **13** (1999), 102–140.
11. S. V. Kislyakov, *Fourier coefficients of continuous functions and a class of multipliers.* — Ann. Inst. Fourier (Grenoble) **38** (1988), 147–183.
12. S. V. Kislyakov, *A sharp correction theorem.* — Studia Math. **113** (1995), 177–196.
13. S. V. Kislyakov, *Interpolation involving bounded bianalytic functions.* — Operator Theory: Advances and Applications **113** (2000), 135–149.
14. S. V. Kislyakov, I. K. Zlotnikov, *Coinvariant subspaces of the shift operator and interpolation.* — Anal. Math. **44** (2018), 219–236.
15. J. Peetre, *Interpolation functors and Banach couples.* — Actes Congrès Intern. Math. **2** (1970), 373–378.
16. G. Pisier, *Interpolation between H^p spaces and noncommutative generalizations. I.* — Pacific J. Math. **155** (1992), 341–368.
17. E. M. Stein, *Harmonic Analysis: Real-Variable Methods, Orthogonality, and Oscillatory Integrals.* Princeton University Press (1993).
18. J.-O. Strömberg, A. Torchinsky, *Weighted Hardy Spaces.* Springer-Verlag (1989).
19. T. Wolff, *A note on interpolation spaces.* Lect. Notes Math. **908** (1981), 199–204.
20. Quan Hua Xu, *Some properties of the quotient space $L^1(\mathbb{T}^n)/H^1(\mathbb{T}^n)$.* — Illinois J. Math. **37**, No. 3 (1993), 437–454.
21. Д. С. Анисимов, С. В. Кисляков, *Двойные сингулярные интегралы: интерполяция и исправление.* — Алгебра и Анализ **16**, No. 5 (2004), 1–33.
22. В. А. Боровицкий, *K-замкнутость для весовых пространств Харди на торе $\mathbb{T}^2$.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **456** (2017), 25–36.
23. С. В. Кисляков, *Коэффициенты Фурье граничных значений функций, аналитических в круге и в бидиске.* — Тр. МИАН СССР **155** (1981), 77–94.
24. С. В. Кисляков, К. Шу, *Вещественная интерполяция и сингулярные интегралы.* — Алгебра и Анализ **8**, No. 4 (1996), 75–109.

Rutsky D. V. Variations of the Bourgain method for K-closedness of certain subcouples.

In the early nineties J. Bourgain proved that the couple $(\mathrm{L}_1^P, \mathrm{L}_p^P)$ is K-closed in $(\mathrm{L}_1, \mathrm{L}_p)$, $1 < p < \infty$, where the subspaces L_q^P of L_q are defined by $\{Pf = f\}$ with a projection P that is a Calderón–Zygmund operator. K-closedness means that arbitrary measurable decompositions in $\mathrm{L}_1 + \mathrm{L}_p$ of functions from $\mathrm{L}_1^P + \mathrm{L}_p^P$ can be replaced by decompositions in $\mathrm{L}_1^P + \mathrm{L}_p^P$ with suitable norm estimates. In the present work we consider some variations of J. Bourgain's argument that natually lead to many of its known generalizations. To illustrate this, we prove the following generalization of a result by S. V. Kislyakov and Q. Xu about K-closedness of Hardy spaces on the bidisk: spaces of functions on $\mathbb{R}^2$ with Fourier transform supported on an arbitrary finite union of polygons are K-closed in $(\mathrm{L}_1, \mathrm{L}_\infty)$. On the other hand, some counterexamples reveal certain hard limitations of such methods if one tries to apply them in higher dimensions and to more complicated spaces of functions on the line and on the plane. Among other things, we show how a recent result by S. V. Kislyakov and I. K. Zlotnikov about K-closedness of the coinvariant subspaces of the shift operator $\mathcal{K}_\theta^p$ can be derived directly from J. Bourgain's original result to achieve K-closedness of the entire scale $(\mathcal{K}_\theta^1, \mathcal{K}_\theta^\infty)$.

С.-Петербургское отделение
Математического института
им. В. А. Стеклова РАН
наб. р. Фонтанки, 27
191023, Санкт-Петербург
Россия
E-mail: rutsky@pdmi.ras.ru

Поступило 23 ноября 2023 г.