Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 527, 2023 г.

В. В. Марченко

К ТЕОРЕМЕ О БИКОММУТАНТЕ АЛГЕБР, ПОРОЖДЁННЫХ ДВИЖЕНИЯМИ КОНЕЧНЫХ ТОЧЕЧНЫХ МНОЖЕСТВ В $\mathbb{R}^3$

Посвящаю моей дочери Ксении

§1. Введение

Всюду в дальнейшем множество матриц размера $m \times n$ с комплексными коэффициентами обозначается через $\mathbb{C}^{m\times n}$, а символом $[M]_{jk}$ – элемент (j,k) матрицы $M \in \mathbb{C}^{m\times n}$. Симметрическая группа перестановок m элементов обозначается через $\mathrm{Sym}(m)$.

Для перестановки $\sigma\colon \{1,\ldots,m\}\to\{1,\ldots,m\}$ соответствующая *матрица перестановки* $S_\sigma \in \mathbb{C}^{m\times m}$ определяется формулой

$$[S_\sigma]_{jk} = \begin{cases} 1, & j = \sigma(k), \\ 0, & j \neq \sigma(k). \end{cases} \tag{1.1}$$

Если $X = \{x_1,\ldots,x_m\}$ – произвольное множество точек в $\mathbb{R}^3$, $\mathcal{S}_X$ – группа его движений (или любая её подгруппа), а $\sigma_u\colon X \to X$ – перестановка, индуцированная движением $u\colon X \to X$, т. е.

$$u(x_j) = x_{\sigma_u(j)},\ j \in \{1,\ldots,m\},$$

то отображение

$$\Phi\colon \mathcal{S}_X \to \mathbb{C}^{m\times m}, \quad \Phi(u) = S_{\sigma_u}, \tag{1.2}$$

является точным представлением группы $\mathcal{S}_X$ в $\mathbb{C}^n$. (Более подробно см., например, в [2], гл. III.)

Интерес автора к указанным матрицам был мотивирован изучением трёхмерного оператора Шрёдингера $\mathbf{H}$ с точечными взаимодействиями в точках конечного множества $X \subset \mathbb{R}^3$, начатым в работе [7]. Именно, авторы указанной работы рассматривают в $L_2(\mathbb{R}^3)$ оператор

Ключевые слова: бикоммутант, перестановка, оператор Шрёдингера, точечные взаимодействия, расширение.

$$\mathbf{H} := -\Delta,\ \mathrm{dom}(\mathbf{H}) := \bigl\{f \in W^{2,2}(\mathbb{R}^3) : f(x_j) = 0,\ j \in \{1, \dots, m\}\bigr\}, \tag{1.3}$$

и изучают его расширения, инвариантные относительно $\mathcal{S}_X$.

Более точно, каждое движение, такое что $u\,(X) = X$, индуцирует унитарный в $L_2(\mathbb{R}^3)$ оператор:

$$Uf(x) = f\bigl(u(x)\bigr). \tag{1.4}$$

Определение 1.1. Пусть $\mathcal{S}_X$ – группа движений множества X. Расширение $\widetilde{\mathbf{H}}$ называется *инвариантным относительно* движения $u \in \mathcal{S}_X$, если равенство

$$\widetilde{\mathbf{H}}U = U\widetilde{\mathbf{H}} \tag{1.5}$$

выполняется для оператора U, заданного формулой (1.4).

Определение 1.2. Расширение $\widetilde{\mathbf{H}}$ инвариантно относительно группы $\mathcal{S}_X$, если $\widetilde{\mathbf{H}}$ инвариантно относительно каждого движения $u \in \mathcal{S}_X$.

Достаточно широкий класс расширений оператора (1.3) биективен некоторому множеству квадратных матриц. Расширение, соответствующее матрице $B \in \mathbb{C}^{m\times m}$, обозначается через $\mathbf{H}_B$.

Расширение $\mathbf{H}_B$ инвариантно относительно движения $u \in \mathcal{S}_X$ тогда и только тогда, когда матрица B коммутирует с матрицей перестановки S_σ, где перестановка $\sigma = \sigma_u$ индуцирована движением $u \in \mathcal{S}_X$, т. е.

$$x_{\sigma(j)} = u(x_j), \quad j \in \{1, \dots, m\}$$

(см. [7]).

В данной работе через $\mathrm{Ext}_H\,(\mathcal{S}_X)$ обозначается подмножество собственных расширений (см. определение 2.3) оператора $\mathbf{H}$, инвариантных относительно $\mathcal{S}_X$.

Для произвольного множества $\mathcal{T}$ квадратных матриц с комплексными элементами через $\mathcal{T}'$ обозначается его *коммутант* в смысле работы [2], т. е. множество его *коммутаторов* – матриц, коммутирующих с каждой матрицей $T \in \mathcal{T}$, через $\mathcal{T}''$ – *бикоммутант* множества $\mathcal{T}$, т. е. коммутант его коммутанта. Легко доказать, что для каждого $\mathcal{T}$ его коммутант образует алгебру (над $\mathbb{C}$), называемую *коммутаторной алгеброй* множества $\mathcal{T}$.

Таким образом, множество $\mathrm{Ext}_H(\mathcal{S}_X)$ биективно коммутаторной алгебре множества $\{S_{\sigma_u}\,|u \in \mathcal{S}_X\,\}$.

В настоящей работе доказывается, что в случае произвольного конечного множества точек $X \subset \mathbb{R}^3$ для алгебры $\mathrm{Alg}\,(\Phi(\mathcal{S}_X))$, порождённой группой $\Phi\,(\mathcal{S}_X)$, верна *теорема фон Неймана о бикоммутанте*, т. е. имеет место равенство

$$\Phi\,(\mathcal{S}_X)'' = \mathrm{Alg}\,(\Phi(\mathcal{S}_X))\,. \tag{1.6}$$

В специальных случаях – когда $X \subset \mathbb{R}^3$ является множеством вершин правильного многоугольника, тетраэдра и куба – в явном виде выписан базис бикоммутанта, рассматриваемого как векторное пространство, что, в частности, представляет собой альтернативное доказательство указанной теоремы в этих случаях.

В §2 кратко излагается теория расширений симметрических операторов, а также описываются её применения к трёхмерному оператору Шрёдингера с точечными взаимодействиями. В §3 даётся описание расширений, инвариантных относительно групп движений, а также связи между инвариантностью и некоторой коммутаторной алгеброй. Последний, 4-й параграф посвящён бикоммутанту, порождённому группой $\Phi(\mathcal{S}_X)$.

§2. Теория расширений симметрических операторов

В данном параграфе приводятся некоторые понятия и факты теории граничных троек и трёхмерного оператора Шрёдингера с конечным набором точечных взаимодействий.

2.1. Основные понятия. Понятия и определения, связанные с граничными тройками, приведены по монографии [5] и работам [9–12].

Определение 2.1. Совокупность $\Pi = \{\mathcal{H}, \Gamma_0, \Gamma_1\}$ называют *граничной тройкой для оператора A^*, сопряжённого с A, если $\mathcal{H}$ – некоторое гильбертово пространство, а $\Gamma_0, \Gamma_1 :\ \mathrm{dom}(A^*) \to \mathcal{H}$ суть линейные отображения, такие что*

(i) *выполнена следующая абстрактная формула Грина*:

$$(A^* f, g)_{\mathfrak{H}} - (f, A^* g)_{\mathfrak{H}} = (\Gamma_1 f, \Gamma_0 g)_{\mathcal{H}} - (\Gamma_0 f, \Gamma_1 g)_{\mathcal{H}}, \quad f, g \in \mathrm{dom}(A^*); \tag{2.1}$$

(ii) *отображение* $\Gamma := (\Gamma_0, \Gamma_1)^\top : \mathrm{dom}(A^*) \to \mathcal{H} \oplus \mathcal{H}$ *сюръективно.*

Определение 2.2. Замкнутое линейное отношение Θ в $\mathcal{H}$ есть замкнутое подпространство в $\mathcal{H} \oplus \mathcal{H}$.

Определение 2.3. (i) Замкнутое расширение $\widetilde{A}$ оператора A называют *собственным*, если $A \subseteq \widetilde{A} \subseteq A^*$. Множество собственных расширений оператора A обозначается через Ext_A.

(ii) Два собственных расширения $\widetilde{A}_1$ и $\widetilde{A}_2$ называют *дизъюнктными*, если $\mathrm{dom}(\widetilde{A}_1) \cap \mathrm{dom}(\widetilde{A}_2) = \mathrm{dom}(A)$.

Предложение 2.4. *Пусть* $\Pi = \{\mathcal{H}, \Gamma_0, \Gamma_1\}$ *– граничная тройка для* A^*. *Тогда отображение*

$$\mathrm{Ext}_A \ni \widetilde{A} := A_\Theta \to \Theta := \Gamma(\mathrm{dom}(\widetilde{A})) = \{\{\Gamma_0 f, \Gamma_1 f\} : \ f \in \mathrm{dom}(\widetilde{A})\} \tag{2.2}$$

устанавливает биективное соответствие между множеством всех замкнутых собственных расширений Ext_A *оператора* A *и всех замкнутых линейных отношений* $\widetilde{\mathcal{C}}(\mathcal{H})$ *в* $\mathcal{H}$. *Более того, если* A_Θ *и* $A_0 := A^* \upharpoonright \ker(\Gamma_0)$ *дизъюнктны, т. е.* $\mathrm{dom}\, A_\Theta \cap \mathrm{dom}\, A_0 = \mathrm{dom}\, A$, *то равенство* (2.2) *принимает вид*

$$A_B = A^* \upharpoonright \ker\bigl(\Gamma_1 - B\Gamma_0\bigr), \tag{2.3}$$

где B *– квадратная матрица соответствующего размера.*

2.2. Трёхмерные операторы Шрёдингера с точечными взаимодействиями. Изучению трёхмерных операторов Шрёдингера с точечными взаимодействиями посвящена классическая монография [1]. Основные определения и факты, используемые в настоящей работе, приведены по [11].

Для $x = (x^1, x^2, x^3) \in \mathbb{R}^3$ и данных точек $x_j = (x_j^1, x_j^2, x_j^3)$, $j \in \{1, \ldots, m\}$, будем писать

$$r_j := |x - x_j| = \sqrt{(x^1 - x_j^1)^2 + (x^2 - x_j^2)^2 + (x^3 - x_j^3)^2}, \quad r_{jk} := |x_j - x_k|.$$

Предложение 2.5. *Пусть* $\mathbf{H}$ *– оператор, определённый равенством* (1.3) *и пусть* $\xi_0 := \{\xi_{0j}\}_{j=1}^m$, $\xi_1 := \{\xi_{1j}\}_{j=1}^m \in \mathbb{C}^m$. *Тогда верны следующие утверждения.*

(i) $\mathbf{H}$ *является замкнутым неотрицательным симметрическим оператором с индексами дефекта* $n_\pm(\mathbf{H}) = m$.

(ii) *Сопряжённый оператор* $\mathbf{H}^*$ *задаётся формулой*

$$\operatorname{dom}(\mathbf{H}^*)=\left\{f=\sum_{j=1}^{m}\bigl(\xi_{0j}\frac{e^{-r_j}}{r_j}+\xi_{1j}e^{-r_j}\bigr)+f_H:\xi_0,\xi_1\in\mathbb{C}^m,\ f_H\in\operatorname{dom}(\mathbf{H})\right\},\tag{2.4}$$

$$\mathbf{H}^*f=-\sum_{j=1}^{m}\bigl(\xi_{0j}\frac{e^{-r_j}}{r_j}+\xi_{1j}(e^{-r_j}-\frac{2e^{-r_j}}{r_j})\bigr)-\Delta f_H.\tag{2.5}$$

(iii) *Совокупность* $\Pi=\{\mathcal{H},\Gamma_0,\Gamma_1\}$, *где*

$$\mathcal{H}=\mathbb{C}^m,\ \ \Gamma_0 f:=\{\Gamma_{0j}f\}_{j=1}^m=4\pi\{\lim_{x\to x_j}f(x)|x-x_j|\}_{j=1}^m=4\pi\{\xi_{0j}\}_{j=1}^m,\tag{2.6}$$

$$\Gamma_1 f:=\{\Gamma_{1j}f\}_{j=1}^m=\{\lim_{x\to x_j}\bigl(f(x)-\tfrac{\xi_{0j}}{|x-x_j|}\bigr)\}_{j=1}^m,\tag{2.7}$$

образует граничную тройку для $\mathbf{H}^*$.

§3. Расширения, инвариантные относительно групп движений некоторых множеств

Утверждения и теоремы настоящего параграфа даны по [7].

Предложение 3.1. *Для произвольного движения* $u\in\mathcal{S}_X$ *следующие утверждения эквивалентны*:

(i) *расширение* $\mathbf{H}_B$ *инвариантно относительно* u;

(ii) $S_\sigma B=BS_\sigma$, *где* $\sigma=\sigma_u$.

3.1. Правильный m-угольник.

Теорема 3.2. *Пусть* X *– множество вершин правильного* m*-угольника в* $\mathbb{R}^2$, D_m *– группа его движений в* $\mathbb{R}^3$, *а* $\Pi=\{\mathcal{H},\Gamma_0,\Gamma_1\}$ *– граничная тройка для* $\mathbf{H}^*$, *заданная формулами* (2.6)–(2.7). *Тогда в тройке* Π *множество* $\operatorname{Ext}_H\bigl(D_m\bigr)$ *всех расширений* $\mathbf{H}_B$, *инвариантных относительно* D_m, *параметризуется множеством матриц вида*

$$B=\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_3 & a_2\\ a_2 & a_1 & a_2 & \dots & a_4 & a_3\\ a_3 & a_2 & a_1 & \dots & a_5 & a_4\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots\\ a_3 & a_4 & a_5 & \dots & a_1 & a_2\\ a_2 & a_3 & a_4 & \dots & a_2 & a_1\end{pmatrix},\quad a_j\in\mathbb{C},\quad j\in\{1,2,\dots\},\tag{3.1}$$

т.е. эквивалентность

$$\mathbf{H}_B \in \mathrm{Ext}_H\big(D_m\big) \Longleftrightarrow \mathbf{H}_B = \mathbf{H}^* \restriction \ker\big(\Gamma_1 - B\Gamma_0\big)$$

выполняется тогда и только тогда, когда матрица B *имеет вид* (3.1).

3.2. Правильный тетраэдр.

Теорема 3.3. *Пусть* X *– множество вершин правильного тетраэдра,* T_d *– его группа движений в* $\mathbb{R}^3$*, а* $\Pi = \{\mathcal{H}, \Gamma_0, \Gamma_1\}$ *– граничная тройка для* $\mathbf{H}^*$*, заданная равенствами* (2.6)–(2.7)*. Тогда в тройке* Π *множество* $\mathrm{Ext}_H\big(T_d\big)$ *всех расширений* $\mathbf{H}_B$*, инвариантных относительно* T_d*, параметризуется множеством матриц* B *вида*

$$B = \begin{pmatrix} a & b & b & b \\ b & a & b & b \\ b & b & a & b \\ b & b & b & a \end{pmatrix}, \quad a, b \in \mathbb{C}, \tag{3.2}$$

т.е. эквивалентность

$$\mathbf{H}_B \in \mathrm{Ext}_H\big(T_d\big) \Longleftrightarrow H_B = H^* \restriction \ker\big(\Gamma_1 - B\Gamma_0\big)$$

выполняется тогда и только тогда, когда матрица B *имеет вид* (3.2).

3.3. Правильный гексаэдр (куб).

Теорема 3.4. *Пусть* X *– множество вершин куба,* O_h *– его группа движений в* $\mathbb{R}^3$*, а* $\Pi = \{\mathcal{H}, \Gamma_0, \Gamma_1\}$ *– граничная тройка для* $\mathbf{H}^*$*, заданная формулами* (2.6)–(2.7)*. Тогда в тройке* Π *множество* $\mathrm{Ext}_H\big(O_h\big)$ *всех инвариантных относительно* O_h *расширений* $\mathbf{H}_B$ *параметризуется множеством матриц вида*

$$B = \left(\begin{array}{cccc|cccc} a & b & c & b & b & c & d & c \\ b & a & b & c & c & b & c & d \\ c & b & a & b & d & c & b & c \\ b & c & b & a & c & d & c & b \\ \hline b & c & d & c & a & b & c & b \\ c & b & c & d & b & a & b & c \\ d & c & b & c & c & b & a & b \\ c & d & c & b & b & c & b & a \end{array}\right), \quad \text{где } a, b, c, d \in \mathbb{C}, \tag{3.3}$$

т.е. эквивалентность

$$\mathbf{H}_B \in \mathrm{Ext}_H\big(O_h\big) \Longleftrightarrow \mathbf{H}_B = \mathbf{H}^* \restriction \ker\big(\Gamma_1 - B\Gamma_0\big)$$

выполняется тогда и только тогда, когда матрица B *имеет вид* (3.3).

§4. Теорема о бикоммутанте для конечных множеств

Мы сформулируем теорему фон Неймана о бикоммутанте в следующей форме. За более подробной информацией можно обратиться к [8], см. теорему 1.2.1, и далее по тексту. Также см. [6], гл. 8, §56.3.

Теорема 4.1. *Пусть* $\mathcal{L}(\mathfrak{H})$ *– алгебра всех ограниченных линейных операторов в гильбертовом пространстве* $\mathfrak{H}$*, а* $\mathcal{R}$ *– самосопряжённая подалгебра алгебры* $\mathcal{L}(\mathfrak{H})$*, содержащая единичный оператор и замкнутая в слабой операторной топологии. Тогда* $\mathcal{R}'' = \mathcal{R}$.

Применяя данную теорему к конечномерному случаю, получаем следующую теорему.

Теорема 4.2. *Пусть* G *– группа перестановок*

$$\sigma\colon \{1,2,\dots,m\} \to \{1,2,\dots,m\}\,,$$

индуцированная группой движений (или любой её подгруппой) $\mathcal{S}_X$ *конечного множества точек* $X \subset \mathbb{R}^3$*. Пусть также*

$$G \ni \sigma \mapsto S_\sigma \in \Phi\big(G\big)$$

есть представление группы G *в пространстве* $\mathbb{C}^m$*, заданное равенством* (1.1)*, а* $\mathrm{Alg}\big(\Phi(G)\big)$ *– подалгебра алгебры* $\mathbb{C}^{m\times m}$*, порождённая группой* $\Phi(G)$*. Тогда* $\Phi\big(G\big)'' = \mathrm{Alg}\big(\Phi(G)\big)$.

Доказательство. Так как $\Phi(G)$ – группа, то

а) она содержит единичный оператор (матрицу) I,

б) для всякой матрицы S_σ из $\Phi(G)$ обратная ей матрица S_σ^{-1} также принадлежит группе $\Phi(G)$.

По определению матрицы перестановки, для любой такой матрицы S_σ обратная ей $S_\sigma^{-1} = S_{\sigma^{-1}}$ равна сопряжённой матрице $S^* = \overline{S}^\top$ и также принадлежит группе $\Phi(G)$. Замкнутость следует из конечномерности группы $\Phi(G)$. Таким образом, требуемое равенство немедленно следует из теоремы 4.1 и того, что $\Phi(G)' = \mathrm{Alg}\,(\Phi(G))'$. □

В оставшейся части настоящего параграфа указан явный вид коммутанта $\Phi\left(\mathcal{S}_X\right)'$ и бикоммутанта $\Phi\left(\mathcal{S}_X\right)''$ для случаев правильного m-угольника, тетраэдра и куба, из чего, в частности, следует альтернативное доказательство теоремы 4.2 для данных случаев.

4.1. Случай правильного m-угольника.

Теорема 4.3. $\Phi(D_m)'' = \operatorname{Alg}\bigl(\Phi(D_m)\bigr)$. *При этом указанный бикоммутант как векторное пространство порождён матрицами* S^j, $j \in \{1, \dots, m-1\}$, $S^k\widetilde{S}$, $k \in \{0, \dots, m-1\}$, *образующими его базис, и, таким образом, имеет размерность* $2m-1$, *где*

$$S = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}, \tag{4.1}$$

а

$$\widetilde{S} = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & \dots & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{4.2}$$

Доказательство. *Циркулянтная матрица* S и *матрица отражения* $\widetilde{S}$ являются образующими в (мультипликативной) группе $\Phi(D_m)$. Заметим, что, по теореме 3.2, равенство (3.1) можно переписать в виде

$$B = a_0 I + a_1 \left(S + S^{m-1}\right) + a_2 \left(S^2 + S^{m-2}\right) + \dots,$$

где количество ненулевых элементов конечно, а последнее слагаемое равно $a_k \left(S^k + S^{m-k}\right)$ (в случае $m = 2k+1$) или $a_k S^k$ (в случае $m = 2k$).

Таким образом, $\{S, \widetilde{S}\}'' = \{S^j + S^{m-j} \mid j = 1, 2, \dots\}'$.

Используя формулу бинома и тот факт, что $S^m = I$, можно показать, что

$$\{S^j + S^{m-j} \mid j = 1, 2, \dots\}' = \{S + S^{m-1}\}'. \tag{4.3}$$

Таким образом, множество (4.3) состоит из всех решений матричного уравнения

$$\left(S + S^{m-1}\right) X = X \left(S + S^{m-1}\right). \tag{4.4}$$

Умножая на S справа и слева обе части уравнения (4.4) и перенося слагаемые, получаем равенство

$$S^2XS - SXS^2 = SX - XS,$$

которое преобразуется в

$$S\,(SX - XS)\,S = SX - XS.$$

Таким образом, формула (4.4) превращается в уравнение относительно Y:

$$SYS = Y, \tag{4.5}$$

где $Y = SX - XS$, причём выполняются равенства

$$\operatorname{tr}\bigl(Y\bigr) = 0, \quad \operatorname{tr}\bigl(YS\bigr) = \operatorname{tr}\bigl(S(XS) - (XS)S\bigr) = 0. \tag{4.6}$$

Решая уравнение (4.5), получаем

$$Y = \begin{pmatrix} y_{m-1} & y_{m-2} & \cdots & y_0 \\ y_{m-2} & y_{m-3} & \cdots & y_{m-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_0 & y_{m-1} & \cdots & y_1 \end{pmatrix}, \tag{4.7}$$

или, выражая Y через S и $\widetilde{S}$,

$$Y = y_0\widetilde{S} + y_1 S\widetilde{S} + \ldots + y_{m-1}S^{m-1}\widetilde{S}.$$

При этом равенства (4.6) означают:

- в случае $m = 2k$

$$y_0 + y_2 + \ldots + y_{2k-2} = y_1 + y_3 + \ldots + y_{2k-1} = 0;$$

- в случае $m = 2k + 1$

$$y_0 + y_1 + \ldots + y_{2k} = 0.$$

Для любой матрицы вида (4.7), удовлетворяющей условиям (4.6), решим уравнение

$$SX - XS = Y. \tag{4.8}$$

Для этого сперва найдём частное решение уравнения (4.8) в виде

$$X_p = z_0\widetilde{S} + z_1 S\widetilde{S} + \ldots + z_{m-1}S^{m-1}\widetilde{S} = z_0\widetilde{S} + z_1\widetilde{S}S^{m-1} + \ldots + z_{m-1}\widetilde{S}S.$$

Подставляя указанную матрицу X_p в уравнение (4.8), получаем систему уравнений относительно $z_0, z_1, \ldots, z_{m-1}$:

$$\left\{ \begin{array}{ccc} z_0 - z_2 & = & y_1, \\ z_1 - z_3 & = & y_2, \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ z_{m-2} - z_0 & = & y_{m-1}, \\ z_{m-1} - z_1 & = & y_0. \end{array} \right.$$

Нетрудно проверить, что частным решением данной системы будет:

- в случае $m = 2k$

$$\begin{array}{ccc} z_0 & = & y_1 + y_3 + \ldots + y_{2k-1} = 0, \\ z_1 & = & y_2 + y_4 + \ldots + y_0 = 0, \\ z_2 & = & y_3 + y_5 + \ldots + y_{2k-1}, \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ z_{2k-2} & = & y_{2k-1}, \\ z_{2k-1} & = & y_0; \end{array}$$

- в случае $m = 2k+1$

$$\begin{array}{ccc} z_0 & = & y_1 + y_3 + \ldots + y_{2k-1} + y_0 + y_2 + \ldots + y_{2k} = 0, \\ z_1 & = & y_2 + y_4 + \ldots + y_{2k}, \\ z_2 & = & y_3 + y_5 + \ldots + y_{2k-1} + y_0 + y_2 + \ldots + y_{2k}, \\ z_3 & = & y_4 + y_6 + \ldots + y_{2k}, \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ z_{2k-1} & = & y_{2k}, \\ z_{2k} & = & y_0 + y_2 + \ldots + y_{2k}. \end{array}$$

Известно [4], что в этом случае решение уравнения (4.8) есть сумма $X = X_p + X_0$ частного решения X_p уравнения (4.8) и решения X_0 однородного уравнения

$$SX - XS = 0. \tag{4.9}$$

Также известно [13], что X_0 равно $p(S)$, где $p(t)$ – многочлен степени не выше $m-1$. Таким образом, решение X уравнения (4.8) принадлежит $\mathrm{Alg}\big(S, \widetilde{S}\big)$, т.е. $\{S, \widetilde{S}\}'' \subset \mathrm{Alg}\left(S, \widetilde{S}\right)$.

Обратное вложение выполнено всегда. Кроме того, имеют место равенства

$$\widetilde{S}S^k = S^{-k}\widetilde{S}$$

и

$$S^k\widetilde{S}\left(S + S^{-1}\right) = S^{k-1}\widetilde{S} + S^{k+1}\widetilde{S} = \left(S^{-1} + S\right)S^k\widetilde{S}.$$

Таким образом, любое решение уравнения (4.4) является линейно комбинацией матриц $I,\ S,\ \ldots,\ S^{m-1},\ \widetilde{S},\ S\widetilde{S},\ \ldots,\ S^{m-1}\widetilde{S}$. В то же время, $I = \sum\limits_{k=0}^{m-1} S^k\widetilde{S} - \sum\limits_{j=1}^{m-1} S^j$. Кроме того, легко проверить, что матрицы $S,\ \ldots,\ S^{m-1},\ \widetilde{S},\ S\widetilde{S},\ \ldots,\ S^{m-1}\widetilde{S}$ линейно независимы и, значит, образуют базис векторного пространства $\Phi(D_m)''$. Теорема доказана. □

Замечание 4.4. Первое предложение теоремы верно и в том случае, если вместо всей группы движений D_m мы рассмотрим её подгруппу вращений C_m. Бикоммутант $\Phi(C_m)''$, равный коммутанту $\Phi(C_m)'$, рассматриваемый как векторное пространство, имеет базис I, $S, \ldots, S^{m-1}$ и, таким образом, имеет размерность m. С другой стороны, так как $\Phi(C_m)' = \{S\}'$, а собственные значения циркулянтной матрицы S суть корни m-й степени из 1, то $\Phi(C_m)' = \Phi(C_m)''$ – множество полиномов $p(S)$ степени не выше $m-1$ (см. [13], теорема 3.2.4.2). Таким образом, коммутант и бикоммутант, рассматриваемые как алгебры, порождены единственной образующей – матрицей S, см. (4.1).

4.2. Случай правильного тетраэдра. Известно [3], что группа T_d (а значит, и $\Phi(T_d)$) изоморфна симметрической группе $\mathrm{Sym}(4)$. Коммутаторная алгебра $\Phi(T_d)'$ состоит из матриц вида (3.2). Заметим, что

$$B = aI + bS + bS^2 + bS^3 = (a-b)I + b\widehat{S},$$

где

$$\widehat{S} = I + S + S^2 + S^3,$$

$$S = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \widehat{S} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Таким образом, $\Phi(T_d)''$ – коммутаторная алгебра $\{\widehat{S}\}'$.

Теорема 4.5. $\Phi(T_d)'' = \mathrm{Alg}\big(\Phi(T_d)\big)$. *При этом указанный бикоммутант как векторное пространство порождён матрицами* X_{11}, X_{12}, X_{13}, X_{14}, X_{21}, X_{22}, X_{23}, X_{31}, X_{32}, X_{33} (*указаны ниже*), *образующими его базис, и, таким образом, имеет размерность* 10.

Доказательство. Легко понять, что любая матрица $X \in \mathbb{C}^{4\times 4}$ принадлежит коммутанту $\{\widehat{S}\}'$ тогда и только тогда, когда равенство

$$\sum_{j=1}^{4} [X]_{jp} = \sum_{k=1}^{4} [X]_{qk} \tag{4.10}$$

выполнено для всех $p, q \in \{1, 2, 3, 4\}$. Таким образом, матрица X задаётся равенством

$$X = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_5 & x_{10} \\ x_4 & x_3 & x_6 & y_1 \\ x_9 & x_8 & x_7 & y_2 \\ y_6 & y_5 & y_4 & y_3 \end{pmatrix}, \tag{4.11}$$

где $x_1, \ldots, x_{10}$ суть произвольные комплексные числа, а $y_1, \ldots, y_6$ однозначно определены по $x_1, \ldots, x_{10}$ соотношением (4.10).

Следовательно, существует ровно 10 линейно независимых матриц

$$X_{11}, X_{12}, X_{13}, X_{14}, X_{21}, X_{22}, X_{23}, X_{31}, X_{32}, X_{33} \tag{4.12}$$

в $\{\widehat{S}\}'$, где матрицы X_{jk} определены условиями

- $[X_{jk}]_{jk} = 1$;
- все остальные элементы x_p в (4.11) равны 0;
- элементы y_q выбраны так, что выполнено равенство (4.10).

Ниже выписаны эти матрицы в явном виде.

$$X_{11} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad X_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix},$$

$$X_{13} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad X_{14} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -2 \end{pmatrix},$$

$$X_{21} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad X_{22} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$X_{23} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad X_{31} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$X_{32} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad X_{33} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Каждая матрица X_{jk} является линейной комбинацией матриц перестановок S_σ, где σ есть определённый цикл в $\mathrm{Sym}(4)$. Действительно,

- $X_{1j} = S_{(j14)} + S_{(24)} + S_{(34)} - 2I$ для $j \in \{1,2,3\}$;
- $X_{14} = S_{(14)} + S_{(24)} + S_{(34)} - 2I$ для $j = 4$;
- $X_{jk} = S_{(jk)} - S_{(4jk)}$ для $j \in \{2,3\}$, $k \in \{1,2,3\}$.

Таким образом, доказано, что $\Phi(T_d)'' \subset \mathrm{Alg}(\Phi(T_d))$. Обратное вложение очевидно. $\square$

4.3. Случай куба. Группа O_h движений куба имеет подгруппу вращений O, изоморфную группе $\mathrm{Sym}(4)$ (см. [3]). Группа $\Phi(O) \subset \Phi(O_h)$ имеет две образующие, а именно

$$S' = \left(\begin{array}{cccc|cccc} 0&1&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&1&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&1&0&0&0&0\\ 1&0&0&0&0&0&0&0\\ \hline 0&0&0&0&0&1&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&1&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&1\\ 0&0&0&0&1&0&0&0 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} S & O\\ \hline O & S \end{array}\right) \tag{4.13}$$

и

$$S'' = \left(\begin{array}{cccc|cccc} 0&1&0&0&0&0&0&0\\ 1&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&1&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&1&0&0\\ \hline 0&0&1&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&1&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&1\\ 0&0&0&0&0&0&1&0 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} Y_1 & Y_2\\ \hline Y_3 & Y_4 \end{array}\right). \tag{4.14}$$

Коммутаторная алгебра $\Phi(O_h)'$ определяется равенством (3.3), т. е. порождена матрицами

$$C_a = \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&1&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&1&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&1&0&0&0&0\\ \hline 0&0&0&0&1&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&1&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&1&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&1 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} I & O\\ \hline O & I \end{array}\right), \tag{4.15}$$

$$C_b = \left(\begin{array}{cccc|cccc} 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} S+S^{-1} & I \\ \hline I & S+S^{-1} \end{array}\right), \tag{4.16}$$

$$C_c = \left(\begin{array}{cccc|cccc} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} S^2 & S+S^{-1} \\ \hline S+S^{-1} & S^2 \end{array}\right), \tag{4.17}$$

$$C_d = \left(\begin{array}{cccc|cccc} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} O & S^2 \\ \hline S^2 & O \end{array}\right). \tag{4.18}$$

Возводя в квадрат и в куб матрицу C_b и делая соответствующие преобразования, получим

$$C_c = \frac{1}{2}\left(C_b^2 - I\right), \tag{4.19}$$

$$C_d = \frac{1}{6}\left(C_b^3 - 7C_b\right). \tag{4.20}$$

Таким образом, можно считать, что алгебра $\Phi(O_h)'$ порождена единственной матрицей C_b. Следовательно, бикоммутант $\Phi(O_h)''$ совпадает с $\{C_b\}'$.

Теорема 4.6. $\Phi(O_h)'' = \mathrm{Alg}(\Phi(O_h))$. *При этом указанный бикоммутант как векторное пространство порождён матрицами S_j, $j \in \{1, \ldots, 20\}$ (указаны ниже), образующими его базис, и, таким образом, является 20-мерным пространством.*

Доказательство. Для доказательства достаточно показать, что

$$\{C_b\}' \subset \mathrm{Alg}(S', S''). \tag{4.21}$$

Действительно, при выполнении этого условия имеем

$$\mathrm{Alg}(S', S'') \subset \mathrm{Alg}(\Phi(O_h)) \subset \Phi(O_h)'' = \{C_b\}' \subset \mathrm{Alg}(S', S''),$$

из чего прямо следует требуемое равенство.

Приводя матрицу C_b к диагональному виду, можно убедиться, что она подобна матрице

$$\widetilde{C_b} = \left(\begin{array}{ccc|ccc|c|c}
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\hline
0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\
\hline
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\
\hline
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -3
\end{array}\right).$$

В соответствии с разложением матрицы $\widetilde{C_b}$ на блоки количество линейно независимых матриц, коммутирующих с $\widetilde{C_b}$, равно $3 \times 3 + 3 \times 3 + 1 \times 1 + 1 \times 1 = 20$ (более детально см. [4], гл. VIII, §2). Такова же и размерность коммутанта $\{C_b\}'$ как векторного пространства.

Так как $\mathrm{Alg}\,(S', S'') \subset \{C_b\}'$, то для доказательства включения (4.21) достаточно найти 20 линейно независимых матриц в $\mathrm{Alg}\,(S', S'')$.

Таковыми являются, например, следующие матрицы.

$$S_1 = S' = \left(\begin{array}{c|c} S & O \\ \hline O & S \end{array}\right),$$

$$S_2 = (S')^2 = \left(\begin{array}{c|c} S^2 & O \\ \hline O & S^2 \end{array}\right),$$

$$S_3 = (S')^3 = \left(\begin{array}{c|c} S^3 & O \\ \hline O & S^3 \end{array}\right),$$

$$S_4 = (S')^4 = \left(\begin{array}{c|c} S^4 & O \\ \hline O & S^4 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} I & O \\ \hline O & I \end{array}\right),$$

$$S_5 = S'' = \left(\begin{array}{c|c} Y_1 & Y_2 \\ \hline Y_3 & Y_4 \end{array}\right),$$

$$S_6 = S'S'' = \left(\begin{array}{c|c} SY_1 & SY_2 \\ \hline SY_3 & SY_4 \end{array}\right),$$

$$S_7 = (S')^2 S'' = \left(\begin{array}{c|c} S^2Y_1 & S^2Y_2 \\ \hline S^2Y_3 & S^2Y_4 \end{array}\right),$$

$$S_8 = (S')^3 S'' = \left(\begin{array}{c|c} S^3Y_1 & S^3Y_2 \\ \hline S^3Y_3 & S^3Y_4 \end{array}\right),$$

$$S_9 = S''S' = \left(\begin{array}{c|c} Y_1S & Y_2S \\ \hline Y_3S & Y_4S \end{array}\right),$$

$$S_{10} = S'S''S' = \left(\begin{array}{c|c} SY_1S & SY_2S \\ \hline SY_3S & SY_4S \end{array}\right),$$

$$S_{11} = (S')^2 S''S' = \left(\begin{array}{c|c} S^2Y_1S & S^2Y_2S \\ \hline S^2Y_3S & S^2Y_4S \end{array}\right),$$

$$S_{12} = (S')^3 S''S' = \left(\begin{array}{c|c} S^3Y_1S & S^3Y_2S \\ \hline S^3Y_3S & S^3Y_4S \end{array}\right),$$

$$S_{13} = S''(S')^2 = \left(\begin{array}{c|c} Y_1S^2 & Y_2S^2 \\ \hline Y_3S^2 & Y_4S^2 \end{array}\right),$$

$$S_{14} = S'S''(S')^2 = \left(\begin{array}{c|c} SY_1S^2 & SY_2S^2 \\ \hline SY_3S^2 & SY_4S^2 \end{array}\right),$$

$$S_{15} = (S')^2 S''(S')^2 = \left(\begin{array}{c|c} S^2Y_1S^2 & S^2Y_2S^2 \\ \hline S^2Y_3S^2 & S^2Y_4S^2 \end{array}\right),$$

$$S_{16} = (S')^3 S''(S')^2 = \left(\begin{array}{c|c} S^3Y_1S^2 & S^3Y_2S^2 \\ \hline S^3Y_3S^2 & S^3Y_4S^2 \end{array}\right),$$

$$S_{17} = S''(S')^3 = \left(\begin{array}{c|c} Y_1S^3 & Y_2S^3 \\ \hline Y_3S^3 & Y_4S^3 \end{array}\right),$$

$$S_{18} = S' S'' \left(S'\right)^3 = \left(\begin{array}{c|c} SY_1S^3 & SY_2S^3 \\ \hline SY_3S^3 & SY_4S^3 \end{array}\right),$$

$$S_{19} = S'' \left(S'\right)^2 S'' \left(S'\right)^2 = \left(\begin{array}{c|c} O & \widetilde{S} \\ \hline \widetilde{S} & O \end{array}\right),$$

$$S_{20} = S'' \left(S'\right)^2 S'' \left(S'\right)^3 = \left(\begin{array}{c|c} O & \widetilde{S}S \\ \hline \widetilde{S}S & O \end{array}\right),$$

где $\widetilde{S}$ есть квадратная матрица отражения (4.2) порядка 4 (см. п. 4.1), а матрицы Y_1, Y_2, Y_3, Y_4 определены равенством (4.14). □

Список литературы

1. С. Альбеверио, Ф. Гестези, Р. Хеэг-Крон, Х. Хольден, *Решаемые модели в квантовой механике.* Москва, Мир (1991).
2. Г. Вейль, *Классические группы. Их инварианты и представления.* М., Гос. изд. ин. лит. (1947).
3. Э. Б. Винберг, *Курс алгебры.* М., Факториал-Пресс (2001).
4. Ф. Р. Гантмахер, *Теория матриц.* М., Физматлит (2004).
5. В. А. Деркач, М. М. Маламуд, *Теория расширений симметрических операторов и граничные задачи.* Киев (2017).
6. Д. П. Желобенко, *Основные структуры и методы теории представлений.* М. (2004).
7. М. М. Маламуд, В. В. Марченко, *Инвариантные операторы Шрёдингера с точечными взаимодействиями в вершинах правильного многогранника.* — Матем. заметки, **110**, No. 3 (2021), 471–477.
8. W. Arveson, *An Invitation to C^*-Algebras.* Springer-Verlag, New-York, Heidelberg, Berlin (1976).
9. V. A. Derkach, M. M. Malamud, *Generalized resolvents and the boundary value problems for hermitian operators with gaps.* — J. Funct. Anal., **95** (1991), 1–95.
10. V. A. Derkach, M. M. Malamud, *The extension theory of Hermitian operators and the moment problem.* — J. Math. Sci. (New York), **73** (1995), 141–242.
11. N. Goloschapova, M. Malamud, V. Zastavnyi, *Radial positive definite functions and spectral theory of Schrödinger operators with point interactions.* — Math. Nachr., **285** (2012).
12. V. I. Gorbachuk, M. L. Gorbachuk, *Boundary value problems for operator differential equations.* — Math. and its Appl. **48** (1991).
13. R. A. Horn, Ch. R. Johnson, *Matrix Analysis.* Cambridge University Press, New York (2013).

Marchenko V. V. To the bicommutant theorem for algebras generated by symmetries of finite point sets in $\mathbb{R}^3$.

The problem of describing invariant extensions of the 3D Schrödinger operator $\mathbf{H}$ with a finite number of point interactions leads to the need for studying matrices of a special type, the *permutation matrices*. A large class of such extensions considered in a certain *boundary triplet* is in one-to-one correspondence with a set of the so-called boundary operators (matrices). The extension of the operator $\mathbf{H}$ with point interactions concentrated on $X = \{x_1, \ldots, x_m\}$ is invariant under the symmetry group of X (or its subgroup) if and only if the corresponding boundary matrix commutes with the set of permutation matrices of size $m \times m$ induced by the symmetry group, i.e., belongs to the *commutant* of this set. The bicommutant theorem for such a set of matrices is proved for an arbitrary finite point set. For some special cases – a regular polygon, a tetrahedron, and a cube – the basis for the bicommutant regarded as a vector space is given explicitly.

Московский государственный
технический университет им. Н. Э. Баумана,
ул. 2-я Бауманская, 5/1, Москва, Россия
E-mail: wmarchenko@rambler.ru

Поступило 22 июня 2023 г.