Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 527, 2023 г.

А. А. Лунёв, М. М. Маламуд

ОБ АСИМПТОТИЧЕСКОМ РАЗЛОЖЕНИИ ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКОГО ОПРЕДЕЛИТЕЛЯ ДЛЯ 2×2-СИСТЕМ ТИПА ДИРАКА

§1. Введение

В этой статье мы продолжаем исследования из цикла наших предыдущих работ [12, 14, 15, 17, 28], посвященных спектральным свойствам $n\times n$-систем обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка. Здесь мы ограничимся случаем 2×2-систем типа Дирака вида

$$-iB^{-1}y' + Q(x)y = \lambda y, \qquad y = \mathrm{col}(y_1, y_2), \qquad x \in [0,1], \tag{1.1}$$

где

$$B = \mathrm{diag}(b_1, b_2), \;\; b_1 < 0 < b_2 \;\text{ и }\; Q = \begin{pmatrix} 0 & Q_{12} \\ Q_{21} & 0 \end{pmatrix} \in L^1\bigl([0,1];\mathbb{C}^{2\times 2}\bigr). \tag{1.2}$$

В случае $-b_1 = b_2 = 1$ система (1.1) эквивалентна классической 2×2-системе Дирака.

С системой (1.1) естественным образом ассоциирован максимальный оператор $L = L(Q)$, задаваемый в $L^2([0,1];\mathbb{C}^2)$ дифференциальным выражением (1.1) на области

$$\mathrm{dom}(L) = \{y \in W_1^1([0,1];\mathbb{C}^2) \,:\, Ly \in L^2([0,1];\mathbb{C}^2)\}. \tag{1.3}$$

Здесь $W_p^n[a,b]$ обозначает пространство Соболева функций f, имеющих $n-1$ абсолютно непрерывную производную на $[a,b]$ и удовлетворяющих условию $f^{(n)} \in L^p[a,b]$. В частности, $W_p^0[a,b] = L^p[a,b]$.

Для получения граничной задачи для системы (1.1), присоединим к ней следующие граничные условия:

$$U_j(y) := a_{j1}y_1(0) + a_{j2}y_2(0) + a_{j3}y_1(1) + a_{j4}y_2(1) = 0, \quad j \in \{1,2\}. \tag{1.4}$$

Ключевые слова: системы обыкновенных дифференциальных уравнений, граничные задачи, характеристический определитель, асимптотическое разложение, свойство полноты.

Исследования второго автора выполнены за счёт гранта Российского научного фонда No. 23-11-00153.

Далее положим

$$A_{jk} := \begin{pmatrix} a_{1j} & a_{1k} \\ a_{2j} & a_{2k} \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad J_{jk} := \det(A_{jk}), \quad j, k \in \{1, \ldots, 4\}. \qquad (1.5)$$

Обозначим через $L_U := L_U(Q)$ оператор, ассоциированный в $L^2([0,1];\mathbb{C}^n)$ с граничной задачей (1.1)–(1.4). Он определяется сужением максимального оператора $L = L(Q)$ на область

$$\mathrm{dom}(L_U) = \{y \in \mathrm{dom}(L) : U_1(y) = U_2(y) = 0\}. \qquad (1.6)$$

Общая спектральная задача для $n \times n$-системы первого порядка вида (1.1) была впервые исследована Г. Биркгофом и Р. Лангером [2]. Точнее, они ввели понятия *регулярных и строго регулярных граничных условий*, исследовали асимптотическое поведение собственных значений и собственных функций и доказали *результат о поточечной сходимости* спектральных разложений для соответствующего дифференциального оператора.

Первый результат о полноте для таких систем был получен В. П. Гинзбургом [6] в случае $B = I_n$, $Q(\cdot) = 0$.

Напомним, что граничные условия (1.4) называются *регулярными*, если

$$J_{32} = \det(A_{12}P_+ + A_{34}P_-) \neq 0 \;\text{ и }\; J_{14} = \det(A_{12}P_- + A_{34}P_+) \neq 0, \qquad (1.7)$$

где P_+ (соответственно, P_-) – спектральный проектор на положительную (соответственно, отрицательную) часть спектра матрицы $B = B^*$.

В. А. Марченко [29] был первым, кто установил свойство полноты для системы корневых функций оператора Дирака L_U ($-b_1 = b_2$) с регулярными граничными условиями и непрерывной потенциальной матрицей Q. Последнее ограничение возникает потому, что операторы преобразования, использованные при доказательстве, построены в [29] только для непрерывных матриц Q.

Позднее (см. [28]) Л. Л. Оридорога и один из авторов установили свойство полноты для *B-слабо регулярных* граничных задач в случае произвольных $n \times n$-систем обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка с интегрируемым матричным потенциалом $Q \in L^1([0,1];\mathbb{C}^{n\times n})$ (первоначально этот результат был анонсирован в [26] намного раньше). В частности, для 2×2-системы типа Дирака (с $Q \in L^1([0,1];\mathbb{C}^{2\times 2})$) *условие B-слабой регулярности переходит в* (1.7) и, следовательно, обеспечивает свойство полноты для указанных граничных задач с регулярными граничными условиями.

Отметим еще кратко, что исследованию базисности Рисса в $L^2([0,1];\mathbb{C}^2)$ системы корневых векторов граничной задачи (1.1)–(1.4) для 2×2-систем Дирака в различных предположениях гладкости на потенциальную матрицу Q посвящено множество работ (см. [3–5, 10, 13, 15, 32, 33] и ссылки на них). Первый общий результат для негладких потенциалов получен П. Джаковым и Б. Митягиным [3, 5], которые в предположении $Q\in L^2([0,1];\mathbb{C}^{2\times 2})$ доказали, что система корневых векторов граничной задачи (1.1)–(1.4) *с сильно регулярными граничными условиями* образует базис Рисса, а также образует *блочный базис Рисса* в случае, если условия (1.4) только регулярны. Однако, методы этих работ существенно используют L^2-технику (типа равенства Парсеваля) и не могут быть применены к L^1-потенциалам. Наиболее полный результат о свойстве базисности Рисса граничных задач для 2×2-систем Дирака с $Q(\cdot)\in L^1([0,1];\mathbb{C}^{2\times 2})$ и сильно регулярными граничными условиями получен независимо и в одно и то же время, но различными методами А. М. Савчуком и А. А. Шкаликовым [33] с одной стороны и авторами [13, 15] – с другой. Блочная базисность Рисса в случае L^1-потенциальной матрицы и регулярных граничных условий впервые доказана в [33].

Обозначим через $\Lambda_Q := \Lambda_{U,Q} = \{\lambda_{Q,n}\}_{n\in\mathbb{Z}} := \{\lambda_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ спектр оператора $L_U(Q)$ с учетом кратности. Именно, если $m_a(\lambda_n)$ – алгебраическая кратность собственного значения λ_n оператора $L_U(Q)$, то число λ_n считается в последовательности Λ_Q точно $m_a(\lambda_n)$ раз. Следует отметить, что алгебраическая кратность $m_a(\lambda_n)$ собственного значения λ_n совпадает с кратностью числа λ_n как нуля характеристического определителя $\Delta_Q(\cdot) = \Delta_{Q,U}(\cdot)$ – целой функции, задаваемой равенством:

$$\begin{aligned}\Delta_Q(\lambda) &= J_{12} + J_{34}e^{i(b_1+b_2)\lambda}\\ &\quad + J_{32}\varphi_{11}(1,\lambda) + J_{13}\varphi_{12}(1,\lambda) + J_{42}\varphi_{21}(1,\lambda) + J_{14}\varphi_{22}(1,\lambda). \qquad (1.8)\end{aligned}$$

Здесь $(\varphi_{jk}(x,\lambda))_{j,k=1}^2 := \Phi(x,\lambda)$ – фундаментальная матрица системы (1.1), (однозначно) выделяемая начальным условием $\Phi(0,\lambda) = I_2$. Также напомним, что

$$\Delta_0(\lambda) = J_{12} + J_{34}e^{i(b_1+b_2)\lambda} + J_{32}e^{ib_1\lambda} + J_{14}e^{ib_2\lambda} \qquad (1.9)$$

есть характеристический определитель задачи (1.1)–(1.4) при $Q=0$.

Заметим, что *граничные условия* (1.7) *регулярны в точности тогда, когда целая функция* $\Delta_0(\cdot)$ *имеет максимальный рост в обеих полуплоскостях* $\mathbb{C}_\pm$. В этой связи напомним один из ключевых результатов нашей предыдущей работы [15], согласно которому характеристический определитель $\Delta_Q(\cdot)$ задачи (1.1)–(1.4) с $Q(\cdot) \in L^1([0,1];\mathbb{C}^{2\times 2})$ допускает следующее представление:

$$\Delta_Q(\lambda) = \Delta_0(\lambda) + \int\limits_0^1 g_1(t)e^{ib_1\lambda t}dt + \int\limits_0^1 g_2(t)e^{ib_2\lambda t}dt \tag{1.10}$$

с некоторыми функциями $g_1, g_2 \in L^1[0,1]$, выражаемыми через ядра операторов преобразования. В свою очередь, из представления (1.10) с учетом формулы (1.9) вытекает, что определитель $\Delta_Q(\cdot)$ – целая функция типа синуса с индикаторной диаграммой $[-ib_2, i|b_1|] \subset i\mathbb{R}$, т.е. имеет экспоненциальный тип $|b_1|(b_2)$ в $\mathbb{C}_+(\mathbb{C}_-)$. Однако обратное неверно: *некоторые нерегулярные граничные условия* также приводят к характеристическому определителю $\Delta_Q(\cdot)$ с той же индикаторной диаграммой $[-ib_2, i|b_1|]$ (см. [28] и [14]), хотя индикаторная диаграмма определителя $\Delta_0(\cdot)$ более узкая. Более сильный эффект (максимального роста $\Delta_Q(\cdot)$) для системы (1.1) с переменной матрицей $B(\cdot)$ был недавно обнаружен в [18].

Подчеркнем, что представление (1.10) играет решающую роль и в некоторых недавних исследованиях. Например, А. С. Макин [20, 21] использовал представление (1.10) для доказательства того, что целая функция экспоненциального типа является характеристическим определителем вырожденной граничной задачи ($\Delta_0(\cdot) = 0$) для 2×2-системы Дирака в точности тогда, когда эта функция принадлежит классу Пэли–Винера. В [22] Макин использовал это представление для нахождения явных алгебраических условий на потенциальную матрицу $Q(\cdot)$, гарантирующих свойство (не блочной!) базисности Рисса для произвольного регулярного, но не обязательно сильно регулярного 2×2-оператора Дирака. Недавно в [17] авторы применили это представление, чтобы оценить липшицеву зависимость спектральных данных от потенциальной матрицы $Q(\cdot)$, пробегающей компактные подмножества в $L^p([0,\ell];\mathbb{C}^{2\times 2})$, $p \in [1,2]$. Кроме того, в [16] мы обобщили представление (1.10) на случай $n\times n$-системы обыкновенных дифференциальных уравнений и применили его для установления свойства базисности Рисса в $L^2([0,1];\mathbb{C}^n)$ системы корневых векторов сильно регулярной граничной задачи.

Если функции g_1, g_2 лежат в $W_1^n[0,1]$, можно проинтегрировать по частям в (1.10) и применить лемму Римана–Лебега для получения следующего асимптотического разложения для $\Delta_Q(\lambda)$:

$$\Delta_Q(\lambda) = e^{ib_1\lambda} \cdot \Big(J_{32} - \sum_{k=1}^{n} \frac{g_1^{(k-1)}(1)}{(-ib_1\lambda)^k} + o(\lambda^{-n})\Big), \quad \operatorname{Im}\lambda \to +\infty, \tag{1.11}$$

$$\Delta_Q(\lambda) = e^{ib_2\lambda} \cdot \Big(J_{14} - \sum_{k=1}^{n} \frac{g_2^{(k-1)}(1)}{(-ib_2\lambda)^k} + o(\lambda^{-n})\Big), \quad \operatorname{Im}\lambda \to -\infty \tag{1.12}$$

(подробности см. в замечании 4.2). В этой связи отметим, что представление типа (1.10)–(1.12) для характеристического определителя граничной задачи для оператора Штурма–Лиувилля впервые использовалось в [25] для установления зависящих от потенциала $q \in C^n[0,1]$ свойств полноты этой задачи с вырожденными граничными условиями. Затем А. С. Макин [19] значительно усилил этот результат, ослабив предположение о гладкости.

В [28] Л. Л. Оридорога и один из авторов (см. также [27]) установили первый зависящий от потенциала результат о полноте для оператора $L_U(Q)$ с нерегулярными граничными условиями в предположении, что $Q(\cdot) \in C^1([0,1];\mathbb{C}^{2\times 2})$. Доказательство базировалось на формулах (1.11)–(1.12) при $n = 1$. Именно, используя треугольные операторы преобразования, авторы получили явный вид коэффициентов $g_1(1)$ и $g_2(1)$ в (1.11)–(1.12) в терминах потенциальной матрицы $Q(\cdot)$.

Аналогичные результаты были получены в [1] для случая $B \neq B^*$ и аналитической функции $Q(\cdot)$. В [12] и [14] мы обобщили и уточнили результаты из [28] для того, чтобы установить *зависящие от потенциала свойства полноты и спектрального синтеза* системы корневых функций для $n \times n$-системы с граничными условиями, не являющимися слабо регулярными и в предположении, что $n \times n$-потенциальная матрица $Q(\cdot)$ непрерывна только в концах отрезка $[0,1]$.

Совсем недавно эти результаты о полноте были обобщены и улучшены А. П. Косаревым и А. А. Шкаликовым [8] для 2×2-операторов типа Дирака с непостоянной матрицей $B(\cdot)$, а также А. С. Макином [23] для 2×2-операторов Дирака.

Цель данной статьи – дальнейшее уточнение результатов из [28] и [14] в случае, когда потенциальная матрица $Q(\cdot)$ имеет дополнительную гладкость. Однако, найти явный вид коэффициентов $g_1^{(k-1)}(1)$ и $g_2^{(k-1)}(1)$ в асимптотических формулах (1.11)–(1.12), непосредственно используя операторы преобразования, довольно сложно. Здесь мы предлагаем другой подход для вычисления этих коэффициентов, развивая метод Марченко из [29].

Работа имеет следующую структуру. В §2 мы напоминаем ключевые результаты из [15] об операторах преобразования для систем типа Дирака с $Q(\cdot) \in L^1([0,1];\mathbb{C}^{2\times 2})$ и вводим специальные функциональные пространства X_∞ и X_∞^0. В §3 мы устанавливаем асимптотические разложения для решений системы (1.1) (см. теорему 3.1) и "формулы следов" для отношений некоторых решений (предложение 3.7). В §4 мы применяем эти формулы следов для вывода асимптотического разложения характеристического определителя $\Delta_Q(\cdot)$ (теорема 4.1). Комбинируя этот результат с абстрактной теоремой о полноте из [12, 14], мы устанавливаем общий явный результат о полноте системы корневых векторов граничной задачи (1.1)–(1.4) (теорема 4.4). Другие явные результаты о полноте, полученные в рамках этого подхода (и анонсированные в [11]), будут опубликованы в другом месте.

Заключительный 5-й параграф посвящен нерегулярным граничным задачам для операторов Штурма–Лиувилля. Именно, мы доказываем основной результат из [25] о полноте таких задач, используя описанный выше метод из [29] получения элегантных асимптотических формул следов для решений уравнения Штурма–Лиувилля.

Основные результаты статьи, включая вышеупомянутые явные результаты о полноте, были анонсированы в нашей заметке [11], опубликованной в 2013 г.

§2. Подготовка

Следуя работам [15, 24], обозначим через $X_\infty := X_\infty(\Omega)$ линейное пространство, состоящее из (эквивалентных классов) измеримых функций, заданных в области

$$\Omega := \{(x,t) \,:\, 0 \leqslant t \leqslant x \leqslant 1\} \tag{2.1}$$

и удовлетворяющих условию

$$\|f\|_{X_\infty} := \operatorname*{ess\,sup}_{x\in[0,1]} \int\limits_0^x |f(x,t)|\,dt < \infty. \tag{2.2}$$

Легко показать, что пространство X_∞ с нормой (2.2) – банахово, не являющееся сепарабельным. Обозначим через X_∞^0 (сепарабельное) подпространство в X_∞, полученное замыканием множества непрерывных функций $C(\Omega)$. Очевидно, множество $C^1(\Omega)$ гладких функций также плотно в пространстве X_∞^0.

В дальнейшем нам понадобится следующее важное свойство пространства X_∞^0, установленное в [15].

Лемма 2.1. *Пусть $K \in X_\infty^0$ и $b \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$. Тогда для любого $\delta > 0$ существует такое число $R_\delta = R_\delta(K,b) > 0$, что справедлива следующая равномерная оценка*:

$$\left|\int\limits_0^x K(x,t)e^{ib\lambda t}\,dt\right| < \delta\cdot(e^{-b\operatorname{Im}\lambda}+1), \qquad |\lambda| > R_\delta, \quad x\in[0,1]. \tag{2.3}$$

Замечание 2.2. Отметим, что [15, лемма 3.2] сформулирована с дополнительным ограничением $|\operatorname{Im}\lambda| \leqslant h$, но доказательство в более общем случае остается тем же. См. также [17, лемма 5.12] по поводу более сильного утверждения о компактных множествах в $X_\infty^0(\Omega)$.

Пространство X_∞^0 играло важную роль в [15] в доказательстве существования треугольных операторов преобразования для решений системы (1.1). В частности, для $X_\infty^0(\Omega)$ при каждом $a\in[0,1]$ корректно определен оператор следа $i_a\colon X_\infty^0(\Omega)\to L^1[0,a]$ из $X_\infty^0(\Omega)$ на $L^1[0,a]$, первоначально заданный на $C(\Omega)$ равенством $i_a\big(N(x,t)\big) := N(a,t)$.

Для формулировки следующего результата ([15, предложение 3.1]) обозначим символом $\Phi(x,\lambda)$ фундаментальную матрицу системы (1.1), (однозначно) выделяемую начальным условием $\Phi(0,\lambda) = I_2$, т. е.

$$\Phi(x,\lambda) := \begin{pmatrix}\Phi_1(x,\lambda) & \Phi_2(x,\lambda)\end{pmatrix}, \ \ \Phi_k(x,\lambda) := \begin{pmatrix}\varphi_{1k}(x,\lambda)\\ \varphi_{2k}(x,\lambda)\end{pmatrix}, \ \ k\in\{1,2\}, \tag{2.4}$$

где $\Phi_1(0,\lambda) := \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$, $\Phi_2(0,\lambda) = \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$.

Предложение 2.3. *Пусть матричный потенциал Q принадлежит пространству $L^1([0,1];\mathbb{C}^{2\times 2})$. Тогда функции $\varphi_{jk}(\cdot,\lambda)$ допускают следующие представления*:

$$\varphi_{jk}(x,\lambda) = \delta_{jk}e^{ib_k\lambda x} + \int_0^x R_{1,j,k}(x,t)e^{ib_1\lambda t}\,dt + \int_0^x R_{2,j,k}(x,t)e^{ib_2\lambda t}\,dt \quad (2.5)$$

при $x\in[0,1]$, $\lambda\in\mathbb{C}$, где $R_{l,j,k}\in X^0_\infty(\Omega)$, $j,k,l\in\{1,2\}$.

Интегральные представления (2.5) фундаментальной матрицы $\Phi(x,\lambda)$ играли ключевую роль в наших работах [13,15]. При этом функции g_1, g_2 (из $L^1[0,1]$) в формуле (1.10) являются линейными комбинациями следов $i_1\big(R_{l,j,k}(x,t)\big) := R_{l,j,k}(1,t)$ и благодаря включениям $R_{l,j,k}\in X^0_\infty(\Omega)$ корректно определены. Отметим, что для оператора Штурма–Лиувилля ядра операторов преобразования всегда непрерывны и подобных трудностей с представлением (1.10) не возникает.

В дальнейших исследованиях нам понадобится другое, эквивалентное формуле (2.5), представление фундаментальной матрицы $\Phi(x,\lambda)$.

Следствие 2.4. *Пусть $Q\in L^1([0,1];\mathbb{C}^{2\times 2})$. Тогда фундаментальная матрица $\Phi(x,\lambda)$ системы* (1.1) *допускает следующее представление*:

$$\Phi(x,\lambda) = \begin{pmatrix} e^{ib_1\lambda x}v_1^+(x,\lambda) & e^{ib_2\lambda x}v_2^-(x,-\lambda) \\ e^{ib_1\lambda x}v_2^+(x,\lambda) & e^{ib_2\lambda x}v_1^-(x,-\lambda)\end{pmatrix}, \quad x\in[0,1], \quad \lambda\in\mathbb{C}, \quad (2.6)$$

где

$$v_k^\pm(x,\lambda) = \delta_{1k} + \int_0^x R_k^\pm(x,t)e^{i(b_2-b_1)\lambda t}\,dt, \qquad k\in\{1,2\} \quad (2.7)$$

и $R_1^\pm, R_2^\pm\in X^0_\infty(\Omega)$ – некоторые интегрируемые ядра.

Доказательство. Пусть $j\in\{1,2\}$. Совершая замену переменной $b_1t = (b_2-b_1)s + b_1x$ для $x\in[0,1]$ и $\lambda\in\mathbb{C}$, получаем

$$\int_0^x R_{1,j,1}(x,t)e^{ib_1\lambda t}\,dt = e^{i\lambda b_1 x}\int_0^{\frac{-b_1x}{b_2-b_1}} R_{1,j,1}\left(x, \frac{(b_2-b_1)s+b_1x}{b_1}\right)e^{i(b_2-b_1)\lambda s}\,ds. \quad (2.8)$$

Аналогично после замены переменной $b_2 t = (b_2 - b_1)s + b_1 x$ получаем

$$\int_0^x R_{2,j,1}(x,t)e^{ib_2\lambda t}\,dt = e^{i\lambda b_1 x}\int_{\frac{-b_1 x}{b_2-b_1}}^{x} R_{2,j,1}\left(x, \frac{(b_2-b_1)s+b_1x}{b_2}\right)e^{i(b_2-b_1)\lambda s}\,ds. \tag{2.9}$$

Подставляя эти два соотношения в (2.5), приходим к представлению

$$\varphi_{j1}(x,\lambda) = e^{ib_1\lambda x}\left(\delta_{j1} + \int_0^x R_j^+(x,t)e^{i(b_2-b_1)\lambda t}\,dt\right), \quad x\in[0,1], \quad \lambda\in\mathbb{C}, \tag{2.10}$$

в котором

$$R_j^+(x,t) = \begin{cases} R_{1,j,1}\left(x, \frac{(b_2-b_1)t+b_1x}{b_1}\right), & t\in\left[0, \frac{-b_1x}{b_2-b_1}\right], \\ R_{2,j,1}\left(x, \frac{(b_2-b_1)t+b_1x}{b_2}\right), & t\in\left[\frac{-b_1x}{b_2-b_1}, x\right]. \end{cases} \tag{2.11}$$

Отправляясь от включений $R_{1,j,k}\in X_\infty^0(\Omega)$, можно показать, что $R_j^+\in X_\infty^0(\Omega)$. Это доказывает часть соотношений (2.6)–(2.7) для $\Phi_1(\cdot,\lambda)$. Аналогичную формулу для $\Phi_2(\cdot,\lambda)$ можно доказать, выполнив замену переменной $b_k t = (b_1 - b_2)s + b_2 x$ в интеграле $\int_0^x R_{k,j,2}(x,t)e^{ib_k\lambda t}\,dt$ при $k\in\{1,2\}$. □

§3. Асимптотическое разложение для решений системы типа Дирака

Здесь мы докажем анонсированные в [11] усовершенствованные асимптотические формулы для решений системы (1.1), следуя методу Марченко [29], где эти разложения получены для классической системы Дирака при условиях

$$Q\in C^n([0,1];\mathbb{C}^{2\times 2}),\ \ n\geqslant 0 \ \text{ и } \ Q\in W_2^n([0,1];\mathbb{C}^{2\times 2}),\ \ n\geqslant 1$$

(см. задачи 1 и 2 в [29, глава 1, §4], соответственно).

Мы распространяем эти результаты на системы типа Дирака, ослабляя упомянутые условия гладкости до условия $Q\in W_1^n([0,1];\mathbb{C}^{2\times 2})$, $n\geqslant 0$. Именно, условие $Q\in L^1([0,1];\mathbb{C}^{2\times 2})$ охватывается следствием 2.4 (случай $n=0$), а остальные случаи $n\geqslant 1$ охватываются теоремой 3.1 ниже, в которой пространство X_∞^0 по-прежнему играет важную роль.

Напомним, что $B = \operatorname{diag}(b_1, b_2)$, где $b_1 < 0 < b_2$. Чтобы сформулировать следующий результат, положим

$$b^+ := ib_1, \ \ b^- := ib_2, \ \ q^+(x) := -ib_1 Q_{12}(x), \ \ q^-(x) := -ib_2 Q_{21}(x). \tag{3.1}$$

Тогда система (1.1) принимает вид

$$\begin{cases} y_1' = b^+ \lambda y_1 + q^+(x) y_2, \\ y_2' = b^- \lambda y_2 + q^-(x) y_1. \end{cases} \tag{3.2}$$

Теорема 3.1. *Пусть* $q^+, q^- \in W_1^n[0,1]$, $n \in \mathbb{N}$. *Тогда существует матричное решение системы* (3.2) *вида*

$$Y(x,\lambda) = \begin{pmatrix} e^{b^+\lambda x} u_1^+(x,\lambda) & e^{b^-\lambda x} u_2^-(x,-\lambda) \\ e^{b^+\lambda x} u_2^+(x,\lambda) & e^{b^-\lambda x} u_1^-(x,-\lambda) \end{pmatrix}, \quad x \in [0,1], \quad \lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}, \tag{3.3}$$

в котором $u_j^\pm(x,\lambda)$, $j \in \{1,2\}$, *допускают представления вида*

$$u_1^\pm(x,\lambda) = \sum_{k=0}^{n} \frac{b_k^\pm(x)}{(i(b_1-b_2)\lambda)^k} + \frac{b_n^\pm(x,\lambda)}{(i(b_1-b_2)\lambda)^n}, \tag{3.4}$$

$$u_2^\pm(x,\lambda) = \sum_{k=0}^{n} \frac{a_k^\pm(x)}{(i(b_1-b_2)\lambda)^k} + \frac{a_n^\pm(x,\lambda)}{(i(b_1-b_2)\lambda)^n}, \tag{3.5}$$

где

$$a_0^\pm(x) = 0, \qquad b_0^\pm(x) = 1, \tag{3.6}$$

$$a_k^\pm(x) = q^\mp(x) b_{k-1}^\pm(x) - \big(a_{k-1}^\pm(x)\big)', \quad k \in \{1,\dots,n\}, \tag{3.7}$$

$$b_k^\pm(x) = \int_0^x q^\pm(t) a_k^\pm(t)\, dt, \quad k \in \{1,\dots,n\}, \tag{3.8}$$

При этом функции $a_n^\pm(x,\lambda)$ *и* $b_n^\pm(x,\lambda)$ *задаются формулами*

$$a_n^\pm(x,\lambda) = \int_0^x A_n^\pm(x,t) e^{i(b_2-b_1)\lambda t}\, dt, \tag{3.9}$$

$$b_n^\pm(x,\lambda) = \int_0^x \left(\int_t^x A_n^\pm(s,t) q^\pm(s)\, ds \right) e^{i(b_2-b_1)\lambda t}\, dt, \tag{3.10}$$

где $A_n^{\pm}(\cdot,\cdot)$ *– единственное решение линейного интегрального уравнения*

$$A_n^{\pm}(x,\xi) = v_n^{\pm}(x-\xi) + \int_0^{\xi}\int_t^{t+x-\xi} q^{\mp}(t+x-\xi)q^{\pm}(s)A_n^{\pm}(s,t)\,ds\,dt, \quad (3.11)$$

$0 \leqslant \xi \leqslant x \leqslant 1$, *и* $v_n^{\pm}(\cdot) := -\left(a_n^{\pm}(\cdot)\right)' + q^{\mp}(\cdot)b_n^{\pm}(\cdot) \in L^1[0,1]$.

Доказательство. Подставляя первый столбец матрицы (3.3) в (3.2), получаем

$$b^+\lambda\, e^{b^+\lambda x}u_1^+ + e^{b^+\lambda x}(u_1^+)' = b^+\lambda\, e^{b^+\lambda x}u_1^+ + q^+(x)e^{b^+\lambda x}u_2^+, \quad (3.12)$$

$$b^+\lambda\, e^{b^+\lambda x}u_2^+ + e^{b^+\lambda x}(u_2^+)' = b^-\lambda\, e^{b^+\lambda x}u_2^+ + q^-(x)e^{b^+\lambda x}u_1^+ \quad (3.13)$$

или

$$\left(u_1^+(x,\lambda)\right)' = q^+(x)u_2^+(x,\lambda), \quad (3.14)$$

$$\left(u_2^+(x,\lambda)\right)' = q^-(x)u_1^+(x,\lambda) - (b^+ - b^-)\lambda u_2^+(x,\lambda). \quad (3.15)$$

Аналогично, подставляя второй столбец матрицы (3.3) в (3.2), приходим к системе

$$\left(u_1^-(x,-\lambda)\right)' = q^-(x)u_2^-(x,-\lambda), \quad (3.16)$$

$$\left(u_2^-(x,-\lambda)\right)' = q^+(x)u_1^-(x,-\lambda) - (b^- - b^+)\lambda u_2^-(x,-\lambda). \quad (3.17)$$

Заменяя λ на $-\lambda$ в (3.16) и (3.17) и комбинируя (3.14), (3.15), (3.16) и (3.17), получим

$$\left(u_1^{\pm}(x,\lambda)\right)' = q^{\pm}(x)u_2^{\pm}(x,\lambda), \quad (3.18)$$

$$\left(u_2^{\pm}(x,\lambda)\right)' = q^{\mp}(x)u_1^{\pm}(x,\lambda) - (b^+ - b^-)\lambda u_2^{\pm}(x,\lambda). \quad (3.19)$$

Далее, покажем, что функции

$$a_k^{\pm}(\cdot),\ b_k^{\pm}(\cdot), \quad k \in \{0,1,\dots,n\}, \quad (3.20)$$

корректно определены формулами (3.6)–(3.8). Для этого докажем по индукции, что

$$a_k^{\pm}(\cdot) \in W_1^{n-k+1}[0,1], \quad b_k^{\pm}(\cdot) \in W_1^{n-k+2}[0,1], \quad k \in \{0,1,\dots,n\}. \quad (3.21)$$

При $k = 0$ это утверждение очевидно ввиду условий (3.6). Пусть соотношения (3.21) выполнены для некоторого $k \in \{0,1,\dots,n-1\}$, и докажем их для $k+1$. Из (3.7) имеем

$$a_{k+1}^{\pm}(\cdot) = q^{\mp}(\cdot)b_k^{\pm}(\cdot) - \left(a_k^{\pm}(\cdot)\right)' \in W_1^{n-k}[0,1], \quad (3.22)$$

так как $a_k^{\pm} \in W_1^{n-k+1}[0,1]$ (и, значит, $(a_k^{\pm})' \in W_1^{n-k}[0,1]$), $q^{\mp} \in W_1^n[0,1]$, и $b_k^{\pm} \in W_1^{n-k+1}[0,1]$ при $0 \leqslant k < n$. Из (3.8) имеем

$$b_{k+1}^{\pm}(x) = \int\limits_0^x q^{\pm}(t) a_{k+1}^{\pm}(t)dt \in W_1^{n-k+1}[0,1], \tag{3.23}$$

поскольку $q^{\pm} \in W_1^n[0,1]$ и $a_{k+1}^{\pm} \in W_1^{n-k}[0,1]$. Таким образом, выполнены включения (3.21), и в качестве следствия получаем, что

$$a_k^{\pm}(\cdot), b_k^{\pm}(\cdot) \in W_1^1[0,1], \quad k \in \{0,1,\ldots,n\}. \tag{3.24}$$

Перепишем теперь уравнения (3.18) и (3.19) в терминах функций $a_n^{\pm}(x,\lambda)$ и $b_n^{\pm}(x,\lambda)$. Подставляя равенства (3.4) и (3.5) в (3.18) и полагая

$$c := b^+ - b^- = i(b_1 - b_2), \tag{3.25}$$

получим

$$\sum_{k=0}^{n} \bigl(b_k^{\pm}(x)\bigr)'(c\lambda)^{-k} + \bigl(b_n^{\pm}(x,\lambda)\bigr)'(c\lambda)^{-n} = \sum_{k=0}^{n} q^{\pm}(x) a_k^{\pm}(x)(c\lambda)^{-k} + q^{\pm}(x) a_n^{\pm}(x,\lambda)(c\lambda)^{-n}. \tag{3.26}$$

С учетом формул (3.6) и (3.8) имеем

$$\bigl(b_k^{\pm}(x)\bigr)' = q^{\pm}(x) a_k^{\pm}(x), \quad k \in \{0,1,\ldots,n\}. \tag{3.27}$$

Следовательно, соотношение (3.26) эквивалентно равенству

$$\bigl(b_n^{\pm}(x,\lambda)\bigr)' = q^{\pm}(x) a_n^{\pm}(x,\lambda). \tag{3.28}$$

Подставляя выражения (3.4) и (3.5) в (3.19), выводим, что

$$\sum_{k=0}^{n} \bigl(a_k^{\pm}(x)\bigr)'(c\lambda)^{-k} + \bigl(a_n^{\pm}(x,\lambda)\bigr)'(c\lambda)^{-n} = \sum_{k=0}^{n} q^{\mp}(x) b_k^{\pm}(x)(c\lambda)^{-k} + q^{\mp}(x) b_n^{\pm}(x,\lambda)(c\lambda)^{-n} - \sum_{k=0}^{n} a_k^{\pm}(x)(c\lambda)^{-k+1} - a_n^{\pm}(x,\lambda)(c\lambda)^{-n+1}. \tag{3.29}$$

Это тождество с учетом условий (3.6) можно переписать в виде

$$\sum_{k=0}^{n-1}\Big(\big(a_k^{\pm}(x)\big)'-q^{\mp}(x)b_k^{\pm}(x)+a_{k+1}^{\pm}(x)\Big)(c\lambda)^{-k}$$
$$=\Big(-\big(a_n^{\pm}(x)\big)'-\big(a_n^{\pm}(x,\lambda)\big)'$$
$$+q^{\mp}(x)b_n^{\pm}(x,\lambda)+q^{\mp}(x)b_n^{\pm}(x)-c\lambda a_n^{\pm}(x,\lambda)\Big)(c\lambda)^{-n}. \quad (3.30)$$

Согласно соотношению (3.7), каждое слагаемое в левой части формулы (3.30) при $k\geqslant 1$ равно нулю. Кроме того, комбинируя (3.7) с (3.6), получаем, что первое слагаемое (при $k=0$) в (3.30) также равно нулю, и тождество (3.30) переходит в

$$\big(a_n^{\pm}(x,\lambda)\big)'=q^{\mp}(x)b_n^{\pm}(x,\lambda)-c\lambda a_n^{\pm}(x,\lambda)+v_n^{\pm}(x), \quad (3.31)$$

где

$$v_n^{\pm}(x):=-\big(a_n^{\pm}(x)\big)'+q^{\mp}(x)b_n^{\pm}(x), \qquad n\geqslant 1. \quad (3.32)$$

Из (3.24) следует, что $v_n^{\pm}\in L^1[0,1]$.

Далее, покажем, что из (3.9) и (3.10) вытекает соотношение (3.28) для любой функции $A_n^{\pm}(\cdot,\cdot)\in L^1(\Omega)$, где множество $\Omega=\{(x,t):0\leqslant t\leqslant x\leqslant 1\}$ задано в (2.1). В самом деле, меняя порядок интегрирования и принимая во внимание определение (3.9), получим

$$b_n^{\pm}(x,\lambda)=\int_0^x q^{\pm}(s)\Big(\int_0^s A_n^{\pm}(s,t)e^{-c\lambda t}\,dt\Big)\,ds=\int_0^x q^{\pm}(s)a_n^{\pm}(s,\lambda)\,ds. \quad (3.33)$$

Дифференцируя это тождество, придем к (3.28).

Выполняя замену переменных в (3.9), получим

$$a_n^{\pm}(x,\lambda)=\int_0^x A_n^{\pm}(x,x-u)e^{-c\lambda(x-u)}du. \quad (3.34)$$

Временно предположим (мы докажем этот факт позже), что

$$A_n^{\pm}(\cdot,\cdot-u)\in W_1^1[u,1] \quad \text{для п.в.} \;\; u\in[0,1]. \quad (3.35)$$

При таком допущении можно продифференцировать равенство (3.34) для почти всех $x \in [0,1]$; с учетом формулы (3.9) получим

$$\begin{aligned}\big(a_n^{\pm}(x,\lambda)\big)' &= A_n^{\pm}(x,0) \\ &+ \int\limits_0^x \left(\frac{d}{dx}\big(A_n^{\pm}(x,x-u)\big)e^{-c\lambda(x-u)} - c\lambda A_n^{\pm}(x,x-u)e^{-c\lambda(x-u)}\right) du \\ &= A_n^{\pm}(x,0) - c\lambda a_n^{\pm}(x,\lambda) + \int\limits_0^x \frac{d}{dx}\big(A_n^{\pm}(x,x-u)\big)e^{-c\lambda(x-u)}\, du. \qquad (3.36)\end{aligned}$$

Подставляя выражения (3.10) и (3.36) в (3.31) и выполняя замену переменных в интеграле из правой части, приходим к уравнению

$$\begin{aligned}A_n^{\pm}(x,0) &+ \int\limits_0^x \frac{d}{dx}\big(A_n^{\pm}(x,x-u)\big)e^{-c\lambda(x-u)}\, du \\ &= v_n^{\pm}(x) + q^{\mp}(x)\int\limits_0^x \left(\int\limits_{x-u}^x A_n^{\pm}(s,x-u)q^{\pm}(s)ds\right)e^{-c\lambda(x-u)}\, du. \qquad (3.37)\end{aligned}$$

Это уравнение, очевидно, обратится в тождество, если положить

$$A_n^{\pm}(x,0) = v_n^{\pm}(x), \quad x \in [0,1], \qquad (3.38)$$

$$\frac{d}{dx}\big(A_n^{\pm}(x,x-u)\big) = q^{\mp}(x)\int\limits_{x-u}^x A_n^{\pm}(s,x-u)q^{\pm}(s)\, ds, \quad 0 \leqslant u \leqslant x \leqslant 1. \qquad (3.39)$$

Итак, достаточно показать, что интегро-дифференциальное уравнение (3.39) с начальным условием (3.38) имеет решение $A_n^{\pm}(\cdot,\cdot) \in X_\infty^0(\Omega)$.

Заменяя x на t в (3.39) и затем интегрируя полученное равенство по $t \in [u,x]$, получим

$$\int\limits_u^x \frac{d}{dt}\big(A_n^{\pm}(t,t-u)\big)dt = \int\limits_u^x q^{\mp}(t)\int\limits_{t-u}^t A_n^{\pm}(s,t-u)q^{\pm}(s)dsdt \qquad (3.40)$$

или, с учетом соотношений (3.35) и (3.38),

$$A_n^{\pm}(x,x-u)-v_n^{\pm}(u)=\int\limits_0^{x-u}\int\limits_t^{t+u} q^{\mp}(t+u)q^{\pm}(s)A_n^{\pm}(s,t)\,ds\,dt,$$

$$0\leqslant u\leqslant x\leqslant 1. \quad (3.41)$$

Полагая здесь $u=x-\xi$, легко выведем, что

$$A_n^{\pm}(x,\xi)=v_n^{\pm}(x-\xi)+\int\limits_0^{\xi}\int\limits_t^{t+x-\xi} q^{\mp}(t+x-\xi)q^{\pm}(s)A_n^{\pm}(s,t)\,ds\,dt,$$

$$0\leqslant \xi\leqslant x\leqslant 1. \quad (3.42)$$

Ясно, что равенство (3.42) эквивалентно начальной задаче (3.38)–(3.39). Значит, требуется доказать, что интегральное уравнение (3.42) имеет решение в классе X_∞^0.

Заметим, что при $x\in[0,1]$ справедливы соотношения

$$\|v_n^{\pm}(x-\cdot)\|_{L^1[0,x]}=\int\limits_0^x\left|v_n^{\pm}(x-t)\right|\,dt=\int\limits_0^x\left|v_n^{\pm}(t)\right|\,dt\leqslant\|v_n^{\pm}\|_{L^1[0,1]}. \quad (3.43)$$

Следовательно, функция $V_n^{\pm}(x,\xi):=v_n^{\pm}(x-\xi)$ принадлежит пространству X_∞. Также легко можно показать, что $V_n^{\pm}\in X_\infty^0$, используя приближение $v_n^{\pm}(\cdot)$ в L^1-норме непрерывными функциями.

Рассмотрим интегральный оператор $T^{\pm}$ из X_∞ в X_∞, полагая

$$(T^{\pm}F)(x,\xi):=\int\limits_0^{\xi}\int\limits_t^{t+x-\xi} q^{\mp}(t+x-\xi)q^{\pm}(s)F(s,t)\,ds\,dt,\quad 0\leqslant\xi\leqslant x\leqslant 1. \quad (3.44)$$

Интегральное уравнение (3.42) можно переписать в следующем абстрактном виде:

$$(I_{X_\infty}-T^{\pm})A_n^{\pm}=V_n^{\pm}, \quad (3.45)$$

где $V_n^{\pm}$ – фиксированный элемент из X_∞^0. Докажем существование элемента $A_n^{\pm}\in X_\infty^0$, удовлетворяющего уравнению (3.45).

Сначала перепишем определение оператора $T^{\pm}$ в более удобном виде:

$$(T^{\pm}F)(x_1,x_2) = \iint\limits_{\substack{0\leqslant t_2\leqslant x_2\\ 0\leqslant t_1-t_2\leqslant x_1-x_2}} q^{\mp}(t_2+x_1-x_2)q^{\pm}(t_1)F(t_1,t_2)\,dt_1\,dt_2,$$

$$0\leqslant x_2\leqslant x_1\leqslant 1. \quad (3.46)$$

Напомним, что $q^{\pm}\in W_1^n[0,1]\subset C[0,1]$. Докажем индукцией по k, что

$$\left|((T^{\pm})^{k+1}F)(x_1,x_2)\right| \leqslant C^{k+1} \iint\limits_{\substack{0\leqslant t_2\leqslant x_2\\ 0\leqslant t_1-t_2\leqslant x_1-x_2}} \frac{(x_2-t_2)^k}{k!}\cdot\frac{((x_1-x_2)-(t_1-t_2))^k}{k!}\cdot|F(t_1,t_2)|\,dt_1\,dt_2,$$

$$0\leqslant x_2\leqslant x_1\leqslant 1, \quad (3.47)$$

где

$$C = \|q^+\|_{C[0,1]}\cdot\|q^-\|_{C[0,1]}. \quad (3.48)$$

Базовый случай $k=0$ непосредственно вытекает из (3.46) и (3.48). Теперь предполагая, что соотношение (3.47) доказано при $k=l-1$, докажем его при $k=l$, где $l\in\mathbb{N}$. При $0\leqslant x_2\leqslant x_1\leqslant 1$ имеем:

$$\begin{aligned}
\left|((T^{\pm})^{l+1}F)(x_1,x_2)\right| &\leqslant C \iint\limits_{\substack{0\leqslant t_2\leqslant x_2\\ 0\leqslant t_1-t_2\leqslant x_1-x_2}} \left|((T^{\pm})^{l}F)(t_1,t_2)\right|\,dt_1dt_2\\
&\leqslant C^{l+1} \iiiint\limits_{\substack{0\leqslant s_2\leqslant t_2\leqslant x_2\\ 0\leqslant s_1-s_2\leqslant t_1-t_2\leqslant x_1-x_2}} \frac{(t_2-s_2)^{l-1}}{(l-1)!}\cdot\frac{((t_1-t_2)-(s_1-s_2))^{l-1}}{(l-1)!}\\
&\times|F(s_1,s_2)|\,ds_1\,ds_2\,dt_1\,dt_2 = C^{l+1} \iint\limits_{\substack{0\leqslant s_2\leqslant x_2\\ 0\leqslant s_1-s_2\leqslant x_1-x_2}} |F(s_1,s_2)|\,ds_1\,ds_2\\
&\iint\limits_{\substack{s_2\leqslant t_2\leqslant x_2\\ s_1-s_2\leqslant t_1-t_2\leqslant x_1-x_2}} \frac{(t_2-s_2)^{l-1}}{(l-1)!}\cdot\frac{((t_1-t_2)-(s_1-s_2))^{l-1}}{(l-1)!}\,dt_1\,dt_2\\
&= C^{l+1} \iint\limits_{\substack{0\leqslant s_2\leqslant x_2\\ 0\leqslant s_1-s_2\leqslant x_1-x_2}} \frac{(x_2-s_2)^{l}}{l!}\cdot\frac{((x_1-x_2)-(s_1-s_2))^{l}}{l!}\cdot|F(s_1,s_2)|\,ds_1\,ds_2
\end{aligned}$$

$$\leqslant \frac{C^{l+1}}{l!^2} \iint\limits_{\substack{0\leqslant s_2\leqslant x_2\\ 0\leqslant s_1-s_2\leqslant x_1-x_2}} |F(s_1,s_2)|\,ds_1\,ds_2. \qquad (3.49)$$

Из (3.47) при $k\in\mathbb{Z}_+$ и $x_1\in[0,1]$ получаем:

$$\begin{aligned}
\|((T^{\pm})^{k+1}F)(x_1,\cdot)\|_{L^1[0,x_1]} &= \int\limits_0^{x_1} \big|((T^{\pm})^{k+1}F)(x_1,x_2)\big|\,dx_2 \\
&\leqslant \frac{C^{k+1}}{k!^2} \iiint\limits_{\substack{0\leqslant t_2\leqslant x_2\leqslant x_1\\ 0\leqslant t_1-t_2\leqslant x_1-x_2}} |F(t_1,t_2)|\,dt_1\,dt_2\,dx_2 \\
&\leqslant \frac{C^{k+1}}{k!^2} \int\limits_0^{x_1}\int\limits_0^{x_1}\left(\int\limits_0^{t_1}|F(t_1,t_2)|\,dt_2\right)dt_1\,dx_2 \\
&\leqslant \frac{C^{k+1}}{k!^2} \int\limits_0^{x_1}\int\limits_0^{x_1}\|F\|_{X_\infty}\,dt_1dx_2 \leqslant \frac{C^{k+1}}{k!^2}\|F\|_{X_\infty}. \qquad (3.50)
\end{aligned}$$

Следовательно,

$$\|(T^{\pm})^{k+1}F\|_{X_\infty} \leqslant \frac{C^{k+1}}{k!^2}\|F\|_{X_\infty}, \quad F\in X_\infty, \quad k\in\mathbb{Z}_+, \qquad (3.51)$$

или

$$\|(T^{\pm})^k\| \leqslant \frac{C^k}{((k-1)!)^2}, \quad k\in\mathbb{N}. \qquad (3.52)$$

Отсюда вытекает, что спектральный радиус оператора $T^{\pm}$ нулевой и, значит, оператор $I_{X_\infty}-T^{\pm}$ ограниченно обратим и $A_n^{\pm}=(I_{X_\infty}-T^{\pm})^{-1}V_n^{\pm}\in X_\infty$.

Покажем, что в действительности оператор $T^{\pm}$ отображает X_∞^0 в себя. Пусть $F\in X_\infty^0$ и $F_m\to F$ в X_∞ при $m\to\infty$, где $F_m\in C(\Omega)$, $m\in\mathbb{N}$. Так как $q^{\pm}\in C[0,1]$, из (3.44) очевидно, что $T^{\pm}F_m\in C(\Omega)$, $m\in\mathbb{N}$. Используя формулы (3.44) и (3.48), приходим к оценке

$$\big|(T^{\pm}F)(x,\xi)-(T^{\pm}F_m)(x,\xi)\big| \leqslant C\int\limits_0^{\xi}\int\limits_t^{t+x-\xi}|F(s,t)-F_m(s,t)|\,ds\,dt$$

$$= C \int_0^x \int_{\max\{0,s-x+\xi\}}^{\min\{s,\xi\}} |F(s,t) - F_m(s,t)| \, dt \, ds$$

$$\leqslant C \int_0^x \|F(s,\cdot) - F_m(s,\cdot)\|_{L^1[0,s]} \, ds \leqslant C\|F - F_m\|_{X_\infty}, \quad 0 \leqslant \xi \leqslant x \leqslant 1. \tag{3.53}$$

Из этой оценки очевидным образом следует, что $\|T^{\pm}F_m - T^{\pm}F\|_{X_\infty} \to 0$ при $m \to \infty$. Таким образом, $T^{\pm}F \in X^0_\infty$. Это завершает доказательство желаемого включения $A^{\pm}_n \in X^0_\infty$.

Наконец, докажем включение (3.35). Ввиду формулы (3.41), это эквивалентно включению

$$B^{\pm}(\cdot, u) \in L^1[0, 1-u], \quad u \in [0,1], \tag{3.54}$$

где

$$B^{\pm}(t,u) := \int_t^{t+u} q^{\mp}(t+u) q^{\pm}(s) A^{\pm}_n(s,t) \, ds, \quad t, u \geqslant 0, \quad t + u \leqslant 1. \tag{3.55}$$

Используя равенство (3.48), включение $A^{\pm}_n \in X_\infty$ и делая оценку как в (3.53), получим

$$\int_0^{1-u} |B^{\pm}(t,u)| \, dt \leqslant C \int_0^{1-u} \int_t^{t+u} |A^{\pm}_n(s,t)| \, ds \, dt \leqslant C\|A^{\pm}_n\|_{X_\infty}. \tag{3.56}$$

Таким образом, включение (3.54) выполнено, что завершает доказательство. □

Лемма 2.1 позволяет оценить рост остаточных членов $a^{\pm}_n(x,\lambda)$ и $b^{\pm}_n(x,\lambda)$ в разложениях (3.4)–(3.5) в верхней полуплоскости.

Лемма 3.2. *Пусть число $h \in \mathbb{R}$ фиксировано. При условиях теоремы* 3.1 *функции $a^{\pm}_n(x,\lambda)$ и $b^{\pm}_n(x,\lambda)$, заданные в* (3.9)–(3.10), *удовлетворяют следующим асимптотическим формулам равномерно по $x \in [0,1]$:*

$$a^{\pm}_n(x,\lambda) = o(1), \qquad b^{\pm}_n(x,\lambda) = o(1), \qquad \lambda \to \infty, \quad \operatorname{Im}\lambda \geqslant h. \tag{3.57}$$

Доказательство. Пусть $\delta > 0$. Используя равенство (3.9), включение $A_n^{\pm} \in X_\infty^0$, лемму 2.1 и неравенство $b_1 - b_2 < 0$, получаем

$$\begin{aligned}\left|a_n^{\pm}(x,\lambda)\right| = \left|\int_0^x A_n^{\pm}(x,t)e^{i(b_2-b_1)\lambda t}dt\right| \leqslant \delta\cdot\left(e^{(b_1-b_2)\operatorname{Im}\lambda}+1\right)\\ \leqslant \delta\cdot\left(e^{(b_1-b_2)h}+1\right), \qquad \operatorname{Im}\lambda \geqslant h, \quad |\lambda| > R_\delta, \quad x\in[0,1]. \qquad (3.58)\end{aligned}$$

Эта оценка влечет первое соотношение в (3.57).

Напомним, что $q^{\pm} \in W_1^n[0,1] \subset C[0,1]$. Следовательно, формула (3.33) влечет оценку

$$\left|b_n^{\pm}(x,\lambda)\right| \leqslant \|q^{\pm}\|_{C[0,1]}\cdot\sup_{t\in[0,1]}|a_n^{\pm}(t,\lambda)|, \quad \lambda\in\mathbb{C}\setminus\{0\}. \qquad (3.59)$$

Объединяя первое соотношение в (3.57) с оценкой (3.59), получаем второе соотношение в (3.57). □

Замечание 3.3. Отметим, что в недавних работах [8, 9] А. П. Косаревым и А. А. Шкаликовым асимптотические разложения типа (3.4)–(3.5) с оценкой остаточного члена как в (3.57) получены методом Биркгофа–Тамаркина для 2×2-операторов типа Дирака с переменной матрицей $B(\cdot)$. Характерная особенность подхода Марченко, использованного нами при доказательстве формул (3.4)–(3.5), – интегральное представление остаточного члена в виде преобразования Фурье решения некоторого явно описываемого интегрального уравнения.

Формулы (3.7) и (3.8) содержат операции интегрирования, от которых можно избавиться, если рассмотреть отношение

$$u_2^{\pm}(x,\lambda)[u_1^{\pm}(x,\lambda)]^{-1}.$$

Нам понадобится следующий абстрактный результат фольклорного характера об асимптотическом поведении рациональных функций.

Лемма 3.4. *Пусть голоморфные в неограниченной области $D\subset\mathbb{C}\setminus\{0\}$ функции $u_1(\lambda)$ и $u_2(\lambda)$ заданы соотношениями*

$$u_1(\lambda) = \sum_{k=0}^n b_k\cdot(c\lambda)^{-k} + b_n(\lambda)\cdot(c\lambda)^{-n}, \qquad \lambda\in D, \qquad (3.60)$$

$$u_2(\lambda) = \sum_{k=0}^n a_k\cdot(c\lambda)^{-k} + a_n(\lambda)\cdot(c\lambda)^{-n}, \qquad \lambda\in D, \qquad (3.61)$$

где $b_0 = 1$, $c \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ *фиксировано и*

$$a_n(\lambda) = o(1), \quad b_n(\lambda) = o(1) \quad \text{при} \quad \lambda \to \infty, \quad \lambda \in D. \tag{3.62}$$

Пусть $u_1(\lambda) \neq 0$ *при* $\lambda \in D$. *Тогда справедливо следующее тождество*

$$\frac{u_2(\lambda)}{u_1(\lambda)} = \sum_{k=0}^{n} \sigma_k \cdot (c\lambda)^{-k} + \sigma_n(\lambda) \cdot (c\lambda)^{-n}, \qquad \lambda \in D, \tag{3.63}$$

где

$$\sigma_0 = a_0, \qquad \sigma_k = a_k - \sum_{j=1}^{k} b_j \sigma_{k-j}, \qquad k \in \{1, \dots, n\}, \tag{3.64}$$

и

$$\sigma_n(\lambda) = \frac{1}{u_1(\lambda)} \left(a_n(\lambda) - b_n(\lambda) \sum_{k=0}^{n} \sigma_k \cdot (c\lambda)^{-k} \right.$$
$$\left. - \sum_{k=n+1}^{2n} \sum_{j=n-k}^{n} b_j \sigma_{k-j} \cdot (c\lambda)^{k-n} \right), \qquad \lambda \in D. \tag{3.65}$$

В частности,

$$\sigma_n(\lambda) = o(1) \quad \text{при} \quad \lambda \to \infty, \quad \lambda \in D. \tag{3.66}$$

Доказательство. Умножая формулу (3.63) на $u_1(\lambda)$, раскрывая произведение двух сумм и сравнивая коэффициенты при степенях λ, получим формулы (3.64)–(3.65) после прямых вычислений. Так как $b_0 = 1$, то легко видеть, что $u_1(\lambda) = 1 + o(1)$ при $\lambda \to \infty$, $\lambda \in D$. Подставляя эту асимптотическую формулу и формулы (3.62) в (3.65), приходим к (3.66). □

Вначале применим лемму 3.4 для доказательства асимптотического разложения частного $\frac{u_2^{\pm}(x,\lambda)}{u_1^{\pm}(x,\lambda)}$ с коэффициентами $\sigma_k^{\pm}(x)$, выражаемыми через $a_k^{\pm}(x), b_k^{\pm}(x)$.

Предложение 3.5. *Пусть число* $h \in \mathbb{R}$ *фиксировано. При условиях теоремы* 3.1 *для частного функций* $u_2^{\pm}(x,\lambda)$ *и* $u_1^{\pm}(x,\lambda)$ (*см.* (3.4) *и* (3.5)) *из представления фундаментального решения* $Y(x,\lambda)$ *вида* (3.3) *системы* (3.2) *справедливо представление*

$$\sigma^{\pm}(x,\lambda) := \frac{u_2^{\pm}(x,\lambda)}{u_1^{\pm}(x,\lambda)} = \sum_{k=1}^{n} \frac{\sigma_k^{\pm}(x)}{(c\lambda)^k} + \frac{\sigma_n^{\pm}(x,\lambda)}{(c\lambda)^n}, \quad \lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}, \tag{3.67}$$

в котором

$$\sigma_k^{\pm}(x) = a_k^{\pm}(x) - \sum_{j=1}^{k-1} b_j^{\pm}(x)\sigma_{k-j}^{\pm}(x), \quad x \in [0,1], \quad k \in \{1,\dots,n\}, \tag{3.68}$$

$$\sigma_n^{\pm}(0,\lambda) = 0, \qquad \lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}, \tag{3.69}$$

$$\sigma_n^{\pm}(x,\lambda) = o(1), \quad \lambda \to \infty, \ \operatorname{Im}\lambda \geqslant h, \quad \textit{равномерно по} \ \ x \in [0,1]. \tag{3.70}$$

Доказательство. С учетом обозначения $c = b^+ - b^- = i(b_1 - b_2)$ (см. (3.25)), формулы (3.4)–(3.5) принимают вид

$$u_1^{\pm}(x,\lambda) = \sum_{k=0}^{n} b_k^{\pm}(x)(c\lambda)^{-k} + b_n^{\pm}(x,\lambda)(c\lambda)^{-n}, \qquad \lambda \neq 0, \tag{3.71}$$

$$u_2^{\pm}(x,\lambda) = \sum_{k=0}^{n} a_k^{\pm}(x)(c\lambda)^{-k} + a_n^{\pm}(x,\lambda)(c\lambda)^{-n}, \qquad \lambda \neq 0. \tag{3.72}$$

Лемма 3.2 влечет асимптотические соотношения (3.57) для $a_n^{\pm}(x,\lambda)$ и $b_n^{\pm}(x,\lambda)$. Из (3.71)–(3.72), (3.24), (3.57) и равенств $a_0^{\pm}(x) = 0$, $b_0^{\pm}(x) = 1$ (см. (3.6)) вытекает, что

$$u_1^{\pm}(x,\lambda) = 1 + o(1), \quad u_2^{\pm}(x,\lambda) = o(1), \quad \lambda \to \infty, \ \operatorname{Im}\lambda \geqslant h, \tag{3.73}$$

равномерно по $x \in [0,1]$. Обозначим

$$\Theta_{h,R} := \{\lambda \in \mathbb{C} : \operatorname{Im}\lambda \geqslant h, \ |\lambda| > R\}. \tag{3.74}$$

Первое соотношение в (3.73) влечет, что

$$u_1^{\pm}(x,\lambda) \neq 0, \qquad \lambda \in \Theta_{h,R}, \quad x \in [0,1], \tag{3.75}$$

при некотором $R > 0$ и, следовательно, функция $\sigma^{\pm}(x,\lambda)$ корректно определена на $[0,1] \times \Theta_{h,R}$.

Поэтому при каждом $x \in [0,1]$ лемма 3.4 применима к функциям $u_1(\lambda) = u_1^{\pm}(x,\lambda)$ и $u_2(\lambda) = u_2^{\pm}(x,\lambda)$ в области $D = \Theta_{h,R}$ и влечет формулы (3.68) для коэффициентов разложения (3.67).

Установим равномерное асимптотическое соотношение $\sigma_n^{\pm}(x,\lambda) = o(1)$ при $\lambda \to \infty$ и $\operatorname{Im}\lambda \geqslant h$. Объединяя тождества (3.68) и соотношения (3.21), доказываем по индукции включения

$$\sigma_k^{\pm} \in W_1^{n-k+1}[0,1] \subset C[0,1], \quad k \in \{1,\dots,n\}. \tag{3.76}$$

Отсюда, из включений (3.24), равномерных асимптотических соотношений (3.57) и формулы (3.65) для $\sigma_n^{\pm}(x,\lambda)$ вытекает равномерная асимптотика (3.70). Далее, из (3.8), (3.9) и (3.10) вытекает, что

$$b_1^{\pm}(0) = \cdots = b_n^{\pm}(0) = 0, \qquad a_n^{\pm}(0,\lambda) = b_n^{\pm}(0,\lambda) = 0. \tag{3.77}$$

Подставляя эти равенства в формулу (3.65) для $\sigma_n^{\pm}(0,\lambda)$, получаем равенство $\sigma_n^{\pm}(0,\lambda) = 0$, доказывающее равенство (3.69). Предложение доказано. □

Замечание 3.6. Подсчитаем первые несколько функций $\sigma_k^{\pm}(\cdot)$, отправляясь от формул (3.68) и (3.6)–(3.8). Для краткости мы опускаем аргумент:

$$\sigma_1^{\pm} = a_1^{\pm} = q^{\mp}. \tag{3.78}$$

$$\sigma_2^{\pm} = a_2^{\pm} - b_1^{\pm}\sigma_1^{\pm} = q^{\mp}b_1^{\pm} - (a_1^{\pm})' - b_1^{\pm}q^{\mp} = -(q^{\mp})'. \tag{3.79}$$

$$\begin{aligned}\sigma_3^{\pm} &= a_3^{\pm} - b_1^{\pm}\sigma_2^{\pm} - b_2^{\pm}\sigma_1^{\pm} = q^{\mp}b_2^{\pm} - (a_2^{\pm})' + b_1^{\pm}(q^{\mp})' - b_2^{\pm}q^{\mp} \\ &= -(q^{\mp}b_1^{\pm} - (a_1^{\pm})')' + b_1^{\pm}(q^{\mp})' = (q^{\mp})'' - q^{\mp}(b_1^{\pm})' \\ &= (q^{\mp})'' - q^{\mp}q^{\pm}a_1^{\pm} = (q^{\mp})'' - (q^{\mp})^2q^{\pm}.\end{aligned} \tag{3.80}$$

Любопытно, что хотя формулы для $b_k^{\pm}(\cdot)$ содержат операции интегрирования, конечная формула для $\sigma_k^{\pm}(\cdot)$ содержит только функции $q^{\pm}$ и их производные. В действительности, это верно для всех $k \in \{1,\dots,n\}$. Прямой вывод этого факта из формул (3.68) и (3.6)–(3.8) довольно громоздкий. Мы преодолеем эту трудность в следующем предложении, анонсированном в предложении 1 из [11], применяя идею Марченко получения для $\sigma^{\pm}(x,\lambda)$ уравнения типа Риккати.

Предложение 3.7. *В условиях предложения* 3.5 *для функций* $\sigma_k^{\pm}(\cdot)$ *справедливы следующии явные рекуррентные формулы*

$$\sigma_1^{\pm}(x) = q^{\mp}(x), \tag{3.81}$$

$$\sigma_{k+1}^{\pm}(x) = -(\sigma_k^{\pm}(x))' - q^{\pm}(x)\cdot\sum_{j=1}^{k-1}\sigma_j^{\pm}(x)\sigma_{k-j}^{\pm}(x) \tag{3.82}$$

при $k \in \{1,\dots,n-1\}$ *и* $x \in [0,1]$.

Доказательство. Выведем сначала дифференциальное уравнение на функцию $\sigma^{\pm}(x,\lambda)$, определенную в (3.67). Согласно определению,

$$u_2^{\pm}(x,\lambda) = u_1^{\pm}(x,\lambda)\sigma^{\pm}(x,\lambda). \tag{3.83}$$

Подставляя это равенство в (3.18), получаем

$$(u_1^{\pm}(x,\lambda))' = q^{\pm}(x)u_1^{\pm}(x,\lambda)\sigma^{\pm}(x,\lambda). \tag{3.84}$$

Далее, подставляя выражение (3.83) в (3.19), приходим ко второму уравнению

$$(u_1^{\pm})'\sigma^{\pm} + u_1^{\pm}(\sigma^{\pm})' = q^{\mp}(x)u_1^{\pm} - c\lambda u_1^{\pm}\sigma^{\pm}. \tag{3.85}$$

Исключая производную $(u_1^{\pm})'$ из системы (3.84)–(3.85), приходим к соотношению

$$q^{\pm}(x)u_1^{\pm}(\sigma^{\pm})^2 + u_1^{\pm}(\sigma^{\pm})' = q^{\mp}(x)u_1^{\pm} - c\lambda u_1^{\pm}\sigma^{\pm}. \tag{3.86}$$

Учитывая, что $u_1^{\pm}(x,\lambda) \neq 0$ в $[0,1]\times\Theta_{h,R}$ (см. (3.75)) и сокращая равенство (3.86) на $u_1^{\pm}(x,\lambda)$, приходим к нелинейному дифференциальному уравнению (типа Риккати) для $\sigma^{\pm}(t,\lambda)$

$$(\sigma^{\pm}(x,\lambda))' + c\lambda\sigma^{\pm}(x,\lambda) + q^{\pm}(x)(\sigma^{\pm}(x,\lambda))^2 = q^{\mp}(x), \qquad x\in[0,1], \quad \lambda\in\Theta_{h,R}. \tag{3.87}$$

Чтобы избежать громоздкого выражения для производной $(\sigma_n^{\pm}(x,\lambda))'$ при подстановке выражения (3.67) для $\sigma^{\pm}(x,\lambda)$ в уравнение (3.87), проинтегрируем уравнение (3.87) (заменив в нем x на t) по $t\in[0,x]$:

$$\sigma^{\pm}(x,\lambda) - \sigma^{\pm}(0,\lambda) + c\lambda\int_0^x \sigma^{\pm}(t,\lambda)dt + \int_0^x q^{\pm}(t)(\sigma^{\pm}(t,\lambda))^2dt = \int_0^x q^{\mp}(t)dt, \quad x\in[0,1], \quad \lambda\in\Theta_{h,R}. \tag{3.88}$$

Теперь подстановка правой части разложения (3.67) в (3.88) приводит нас к уравнению

$$c_0^{\pm}(x) + \frac{c_1^{\pm}(x)}{c\lambda} + \dots + \frac{c_{n-1}^{\pm}(x)}{(c\lambda)^{n-1}} + \frac{c_n^{\pm}(x,\lambda)}{(c\lambda)^n} = 0, \quad x\in[0,1], \quad \lambda\in\Theta_{h,R}, \tag{3.89}$$

в котором

$$c_0^{\pm}(x) := \int_0^x (\sigma_1^{\pm}(t) - q^{\mp}(t))\,dt, \tag{3.90}$$

$$c_k^{\pm}(x) := \int_0^x \sigma_{k+1}^{\pm}(t)\,dt + \sigma_k^{\pm}(x) - \sigma_k^{\pm}(0) + \sum_{j=1}^{k-1}\int_0^x q^{\pm}(t)\sigma_j^{\pm}(t)\sigma_{k-j}^{\pm}(t)\,dt, \tag{3.91}$$

при $k \in \{1, \ldots, n-1\}$ и

$$c_n^{\pm}(x,\lambda) := c\lambda \int_0^x \sigma_n^{\pm}(t,\lambda)\,dt + \sigma_n^{\pm}(x,\lambda) - \sigma_n^{\pm}(0,\lambda) + \sigma_n^{\pm}(x) - \sigma_n^{\pm}(0)$$

$$+ \sum_{j=1}^{n-1} \int_0^x q^{\pm}(t)\sigma_j^{\pm}(t)\sigma_{n-j}^{\pm}(t)\,dt + \sum_{k=1}^{n} (c\lambda)^{-k} \sum_{j=k}^{n} \int_0^x q^{\pm}(t)\sigma_j^{\pm}(t)\sigma_{n+k-j}^{\pm}(t)\,dt$$

$$+ \sum_{k=1}^{n} 2(c\lambda)^{-k} \int_0^x q^{\pm}(t)\sigma_k^{\pm}(t)\sigma_n^{\pm}(t,\lambda)\,dt + (c\lambda)^{-n} \int_0^x q^{\pm}(t)(\sigma_n^{\pm}(t,\lambda))^2\,dt. \tag{3.92}$$

Для оценки остатка в (3.89) установим равномерную асимптотику:

$$c_n^{\pm}(x,\lambda) = o(\lambda), \quad \lambda \to \infty, \quad \operatorname{Im}\lambda \geqslant h, \quad \text{равномерно по} \quad x \in [0,1]. \tag{3.93}$$

Из асимптотики (3.70) с учетом ограниченности коэффициентов $\sigma_k^{\pm}$ и $q^{\pm}$ (см. (3.76)) получаем при $\lambda \to \infty, \operatorname{Im}\lambda \geqslant h$, равномерные по $x \in [0,1]$ оценки :

$$c\lambda \int_0^x \sigma_n^{\pm}(t,\lambda)\,dt = o(\lambda), \tag{3.94}$$

$$\sigma_n^{\pm}(x,\lambda) - \sigma_n^{\pm}(0,\lambda) = o(1), \tag{3.95}$$

$$\sigma_n^{\pm}(x) - \sigma_n^{\pm}(0) + \sum_{j=1}^{n-1} \int_0^x q^{\pm}(t)\sigma_j^{\pm}(t)\sigma_{n-j}^{\pm}(t)\,dt = O(1), \tag{3.96}$$

$$\sum_{k=1}^{n} (c\lambda)^{-k} \sum_{j=k}^{n} \int_0^x q^{\pm}(t)\sigma_j^{\pm}(t)\sigma_{n+k-j}^{\pm}(t)\,dt = O(\lambda^{-1}), \tag{3.97}$$

$$\sum_{k=1}^{n} 2(c\lambda)^{-k} \int_0^x q^{\pm}(t)\sigma_k^{\pm}(t)\sigma_n^{\pm}(t,\lambda)\,dt = o(\lambda^{-1}), \tag{3.98}$$

$$(c\lambda)^{-n} \int_0^x q^{\pm}(t)(\sigma_n^{\pm}(t,\lambda))^2\,dt = o(\lambda^{-n}). \tag{3.99}$$

Объединяя оценки (3.94)–(3.99) с равенством (3.92), приходим к требуемой асимптотике (3.93).

Теперь фиксируя в (3.89) $x = x_0 \in [0,1]$, умножая обе части полученного равенства на $(c\lambda)^{n-1}$ и устремляя λ к бесконечности с учётом асимптотики (3.93), приходим к равенствам

$$c_k^{\pm}(x) = 0, \quad x \in [0,1], \quad k \in \{1, \dots, n\}. \tag{3.100}$$

Дифференцируя равенства (3.100) с учётом определений (3.90) и (3.91) и гладкости коэффициентов $\sigma_k^{\pm}$, приходим к соотношениям (3.81) и (3.82), что завершает доказательство. □

Замечание 3.8. **(i)** Отметим, что рекуррентные формулы (3.82) для коэффициентов $\sigma_k^{\pm}(\cdot)$ дают явный вид локальных полиномиальных интегралов движения для нелинейного уравнения Шредингера (см. [30]).

(ii) Формула (3.82) позволяет легко и явно вычислить выражения $\sigma_k^{\pm}(\cdot)$ через элементы $q^{\mp}$ матрицы $Q(\cdot)$, что становится затруднительным, если пользоваться формулами (3.68) и (3.6)–(3.8). Например,

$$\sigma_4^{\pm} = -(\sigma_3^{\pm})' - 2q^{\mp}\sigma_1^{\pm}\sigma_2^{\pm} = -(q^{\mp})''' + (q^{\mp})^2(q^{\pm})' + 4q^{\mp}(q^{\mp})'q^{\pm}. \tag{3.101}$$

Более того, можно получить явное выражение для $\sigma_k^{\pm}$ в виде линейной комбинации произведений функций $q^{\pm}$ и их производных в общем случае. Эта формула и ее приложения для получения явных результатов о полноте корневых векторов для граничной задачи (1.1)–(1.4), также анонсированные в [11], будет опубликовано в другом месте.

Замечание 3.9. Асимптотические разложения решений системы (1.1), полученные в этом параграфе, играют важную роль в нахождении усовершенствованных асимптотических формул для собственных значений и собственных функций соответствующей граничной задачи. В этой связи отметим, что недавно L. Rzepnicki [31] нашел точные асимптотические формулы для отклонений $\lambda_m - \lambda_m^0 = \delta_m + \rho_m$ в случае граничной задачи Дирихле для 2×2-системы Дирака с $Q \in L^p([0,1]; \mathbb{C}^{2\times 2})$, $1 \leqslant p < 2$. Именно, δ_m явно выражено через коэффициенты Фурье и преобразования Фурье функций Q_{12} и Q_{21} в случае $\{\rho_m\}_{m\in\mathbb{Z}} \in \ell^{p'/2}(\mathbb{Z})$, где p' – сопряженный показатель. Аналогичный результат был получен для собственных векторов. Для операторов Штурма–Лиувилля с сингулярными потенциалами А. Гомилко и L. Rzepnicki получили аналогичные результаты в недавней статье [7].

§4. Асимптотическое разложение характеристического определителя

В этом параграфе мы применяем предложение 3.7 для получения асимптотического разложения характеристического определителя $\Delta_Q(\cdot)$, задаваемого равенством (1.8), с явными, легко вычислимыми коэффициентами. В свою очередь, мы продемонстрируем эту формулу, получив новый общий результат о полноте в случае нерегулярных граничных условий, который существенно дополняет [28, теорему 5.1] и [14, предложение 4.5].

Напомним, что $\Phi(x,\lambda) = (\varphi_{jk}(x,\lambda))_{j,k=1}^2$ – фундаментальное матричное решение системы (1.1), (однозначно) задаваемое начальным условием $\Phi(0,\lambda) = I_2$ (см. (2.4)). Очевидно, что собственные значения задачи (1.1)–(1.4) – это корни характеристического уравнения

$$\Delta_Q(\lambda) := \det U(\lambda) = 0,$$

где

$$U(\lambda) := \begin{pmatrix} U_1(\Phi_1(x,\lambda)) & U_1(\Phi_2(x,\lambda)) \\ U_2(\Phi_1(x,\lambda)) & U_2(\Phi_2(x,\lambda)) \end{pmatrix} =: \begin{pmatrix} u_{11}(\lambda) & u_{12}(\lambda) \\ u_{21}(\lambda) & u_{22}(\lambda) \end{pmatrix}. \quad (4.1)$$

С учетом обозначений (1.5) приходим к следующему выражению для характеристического определителя:

$$\Delta_Q(\lambda) = J_{12}+J_{34}e^{i(b_1+b_2)\lambda}+J_{32}\varphi_{11}(\lambda)+J_{13}\varphi_{12}(\lambda)+J_{42}\varphi_{21}(\lambda)+J_{14}\varphi_{22}(\lambda), \quad (4.2)$$

в котором $\varphi_{jk}(\lambda) := \varphi_{jk}(1,\lambda)$.

Теорема 4.1. *Пусть* $Q_{12}, Q_{21} \in W_1^n[0,1]$ *и функции*

$$\sigma_k^{\pm}(x), \quad k \in \{1,\dots,n\},$$

заданы формулами (3.1), (3.81), (3.82). *Тогда характеристический определитель* $\Delta(\lambda)$ *системы* (1.1) *допускает следующие представления*:

$$\Delta_Q(\lambda) = e^{ib_1\lambda} \cdot \Big(J_{32} + \sum_{k=1}^n \frac{c_k^+}{(c\lambda)^k} + o(\lambda^{-n})\Big) \cdot (1+o(1)), \quad \operatorname{Im}\lambda \to +\infty, \quad (4.3)$$

$$\Delta_Q(\lambda) = e^{ib_2\lambda} \cdot \Big(J_{14} + \sum_{k=1}^n \frac{c_k^-}{(c\lambda)^k} + o(\lambda^{-n})\Big) \cdot (1+o(1)), \quad \operatorname{Im}\lambda \to -\infty, \quad (4.4)$$

где $c = i(b_1 - b_2)$ *и при* $k \in \{1, \dots, n\}$ *имеем*

$$c_k^+ := -J_{13}(-1)^k \sigma_k^-(0) + J_{42}\sigma_k^+(1) - J_{14}\sum_{j=1}^{k-1}(-1)^j \sigma_j^-(0)\sigma_{k-j}^+(1), \quad (4.5)$$

$$c_k^- := J_{13}(-1)^k \sigma_k^-(1) - J_{42}\sigma_k^+(0) - J_{32}\sum_{j=1}^{k-1}(-1)^j \sigma_j^-(1)\sigma_{k-j}^+(0). \quad (4.6)$$

Доказательство. Согласно теореме 3.1 существует матричное решение системы (1.1) вида (3.3), в котором функции $u_1^\pm(x, \pm\lambda)$ и $u_2^\pm(x, \pm\lambda)$ допускают разложения (3.4) и (3.5), соответственно. Из условий (3.6), (3.77) с одной стороны, и условий (3.83), (3.67), (3.69) – с другой, получаем

$$u_1^\pm(0, \pm\lambda) = 1, \quad u_2^\pm(0, \pm\lambda) = \sigma^\pm(0, \pm\lambda) = o(1), \quad \lambda \to \infty. \quad (4.7)$$

Подставляя эти выражения в (3.3), находим

$$Y(0, \lambda) = \begin{pmatrix} 1 & \sigma^-(0, -\lambda) \\ \sigma^+(0, \lambda) & 1 \end{pmatrix} = I_2 + o_2(1), \quad \lambda \to \infty, \quad (4.8)$$

где $o_2(1)$ обозначает 2×2-матрицу с $o(1)$ элементами. Следовательно,

$$\omega(\lambda) := \det(Y(0, \lambda)) = 1 - \sigma^-(0, -\lambda)\sigma^+(0, \lambda) = 1 + o(1), \quad \lambda \to \infty. \quad (4.9)$$

Таким образом, для некоторого $R > 0$ имеем $\det(Y(0, \lambda)) \neq 0$ при $|\lambda| > R$ и, значит, $Y(x, \lambda)$ – фундаментальная матрица решений системы (3.2) при всех $|\lambda| > R$. Поэтому $Y(x, \lambda)$ и $\Phi(x, \lambda)$ связаны тождеством

$$\Phi(x, \lambda) = Y(x, \lambda)[Y(0, \lambda)]^{-1}, \quad |\lambda| > R. \quad (4.10)$$

Подставляя выражения (2.4), (3.3) и (4.8) в (4.10), при $|\lambda| > R$ имеем:

$$\varphi_{11}(\lambda) = \frac{1}{\omega(\lambda)}\left(e^{b^+\lambda}u_1^+(1, \lambda) - e^{b^-\lambda}u_2^-(1, -\lambda)\sigma^+(0, \lambda)\right), \quad (4.11)$$

$$\varphi_{12}(\lambda) = \frac{1}{\omega(\lambda)}\left(-e^{b^+\lambda}u_1^+(1, \lambda)\sigma^-(0, -\lambda) + e^{b^-\lambda}u_2^-(1, -\lambda)\right), \quad (4.12)$$

$$\varphi_{21}(\lambda) = \frac{1}{\omega(\lambda)}\left(e^{b^+\lambda}u_2^+(1, \lambda) - e^{b^-\lambda}u_1^-(1, -\lambda)\sigma^+(0, \lambda)\right), \quad (4.13)$$

$$\varphi_{22}(\lambda) = \frac{1}{\omega(\lambda)}\left(-e^{b^+\lambda}u_2^+(1, \lambda)\sigma^-(0, -\lambda) + e^{b^-\lambda}u_1^-(1, -\lambda)\right). \quad (4.14)$$

Подставляя равенства (4.11)–(4.14) в (4.2) и учитывая (3.1), получаем:

$$\begin{aligned}\Delta_Q(\lambda) &= J_{12} + J_{34}e^{i(b_1+b_2)\lambda}\\ &+ \frac{e^{ib_1\lambda}}{\omega(\lambda)}\Big(J_{32}u_1^+(1,\lambda) - J_{13}u_1^+(1,\lambda)\sigma^-(0,-\lambda)\\ &\qquad + J_{42}u_2^+(1,\lambda) - J_{14}u_2^+(1,\lambda)\sigma^-(0,-\lambda)\Big)\\ &+ \frac{e^{ib_2\lambda}}{\omega(\lambda)}\Big(- J_{32}u_2^-(1,-\lambda)\sigma^+(0,\lambda) + J_{13}u_2^-(1,-\lambda)\\ &\qquad - J_{42}u_1^-(1,-\lambda)\sigma^+(0,\lambda) + J_{14}u_1^-(1,-\lambda)\Big).\end{aligned} \tag{4.15}$$

Сначала рассмотрим случай

$$\lambda \in \Theta_R := \{\lambda \in \mathbb{C} : \operatorname{Im}\lambda > R\}. \tag{4.16}$$

Ввиду условия (3.70), можно предполагать, что для этих значений λ функция $\sigma^+(1,\lambda)$ корректно определена. С помощью соотношений (3.83), (3.67), (3.69) и (3.70) перепишем множитель в скобках в третьем слагаемом из (4.15) следующим образом:

$$\begin{aligned}&J_{32}u_1^+(1,\lambda) - J_{13}u_1^+(1,\lambda)\sigma^-(0,-\lambda) + J_{42}u_2^+(1,\lambda) - J_{14}u_2^+(1,\lambda)\sigma^-(0,-\lambda)\\ &= u_1^+(1,\lambda)(J_{32} - J_{13}\sigma^-(0,-\lambda) + J_{42}\sigma^+(1,\lambda) - J_{14}\sigma^+(1,\lambda)\sigma^-(0,-\lambda))\\ &= u_1^+(1,\lambda)\Bigg(J_{32} - J_{13}\sum_{k=1}^{n}\frac{\sigma_k^-(0)}{(-c\lambda)^k} + J_{42}\Big(\sum_{k=1}^{n}\frac{\sigma_k^+(1)}{(c\lambda)^k} + \frac{\sigma_n^+(1,\lambda)}{(c\lambda)^n}\Big)\\ &- J_{14}\Big(\sum_{k=1}^{n}\frac{\sigma_k^-(0)}{(-c\lambda)^k}\Big)\Big(\sum_{k=1}^{n}\frac{\sigma_k^+(1)}{(c\lambda)^k} + \frac{\sigma_n^+(1,\lambda)}{(c\lambda)^n}\Big)\Bigg)\\ &= u_1^+(1,\lambda)\Bigg(J_{32} + \sum_{k=1}^{n}(c\lambda)^{-k}\Big(-J_{13}(-1)^k\sigma_k^-(0) + J_{42}\sigma_k^+(1)\\ &-J_{14}\sum_{j=1}^{k-1}(-1)^j\sigma_j^-(0)\sigma_{k-j}^+(1)\Big) + o(\lambda^{-n})\Bigg), \quad \operatorname{Im}\lambda \to +\infty, \quad \lambda \in \Theta_R.\end{aligned} \tag{4.17}$$

Так же, как при получении формулы (3.58), используя равенство (3.9), включение $A_n^{\pm} \in X_\infty^0$, лемму 2.1 и неравенство $b_2 - b_1 > 0$, выводим

$$|a_n^{\pm}(x,-\lambda)| = o(e^{(b_2-b_1)\operatorname{Im}\lambda}), \quad \operatorname{Im}\lambda \to +\infty, \ \ \lambda \in \Theta_R, \tag{4.18}$$

равномерно по $x \in [0,1]$. Комбинируя (3.59) с (4.18), имеем

$$|b_n^-(1,-\lambda)| = o(e^{(b_2-b_1)\operatorname{Im}\lambda}), \quad \operatorname{Im}\lambda \to +\infty, \ \lambda \in \Theta_R. \tag{4.19}$$

Теперь с помощью соотношений (3.4), (3.5), (4.7), (4.9), (4.18) и (4.19) можно оценить последнее слагаемое в (4.15):

$$\begin{aligned}
&\left|\frac{e^{ib_2\lambda}}{\omega(\lambda)}\big(u_2^-(1,-\lambda)(J_{32}\sigma^+(0,\lambda) - J_{13}) + u_1^-(1,-\lambda)(J_{42}\sigma^+(0,\lambda) - J_{14})\big)\right| \\
&= e^{-b_2\operatorname{Im}\lambda}\cdot(1+o(1))\cdot\left|\left(o(1) + \frac{e^{(b_2-b_1)\operatorname{Im}\lambda}}{\lambda^n}o(1)\right)\cdot(o(1) - J_{13})\right. \\
&+ \left.\left(1 + o(1) + \frac{e^{(b_2-b_1)\operatorname{Im}\lambda}}{\lambda^n}o(1)\right)\cdot(o(1) - J_{14})\right| = \frac{e^{-b_1\operatorname{Im}\lambda}}{|\lambda|^n}o(1)
\end{aligned} \tag{4.20}$$

при $\operatorname{Im}\lambda \to +\infty$, $\lambda \in \Theta_R$. Так как $b_1 < 0 < b_2$, то

$$\left|J_{12} + J_{34}e^{i(b_1+b_2)\lambda}\right| = \frac{e^{-b_1\operatorname{Im}\lambda}}{|\lambda|^n}o(1), \quad \operatorname{Im}\lambda \to +\infty, \quad \lambda \in \Theta_R. \tag{4.21}$$

Подставляя (4.17), (4.20) и (4.21) в (4.15), придем к (4.3).

Теперь рассмотрим случай, когда $\operatorname{Im}\lambda \leqslant -R$. Соотношение (4.4) можно получить аналогично. Приведем только шаг, соответствующий уравнению (4.17). При $\operatorname{Im}\lambda \leqslant -R$ функция $\sigma^-(1,-\lambda)$ корректно определена, и мы имеем

$$\begin{aligned}
&- J_{32}u_2^-(1,-\lambda)\sigma^+(0,\lambda) + J_{13}u_2^-(1,-\lambda) \\
&\qquad - J_{42}u_1^-(1,-\lambda)\sigma^+(0,\lambda) + J_{14}u_1^-(1,-\lambda) \\
&= u_1^-(1,-\lambda)(J_{14} + J_{13}\sigma^-(1,-\lambda) - J_{42}\sigma^+(0,\lambda) - J_{32}\sigma^-(1,-\lambda)\sigma^+(0,\lambda)) \\
&= u_1^+(1,\lambda)\Big(J_{14} + J_{13}\Big(\sum_{k=1}^n \frac{\sigma_k^-(1)}{(-c\lambda)^k} + \frac{\sigma_n^-(1,-\lambda)}{(-c\lambda)^n}\Big) - J_{42}\sum_{k=1}^n \frac{\sigma_k^+(0)}{(c\lambda)^k} \\
&\qquad -J_{32}\Big(\sum_{k=1}^n \frac{\sigma_k^-(1)}{(-c\lambda)^k} + \frac{\sigma_n^-(1,-\lambda)}{(-c\lambda)^n}\Big)\Big(\sum_{k=1}^n \frac{\sigma_k^+(0)}{(c\lambda)^k}\Big)\Big) \\
&= u_1^+(1,\lambda)\Big(J_{14} + \sum_{k=1}^n (c\lambda)^{-k}\Big(J_{13}(-1)^k\sigma_k^-(1) - J_{42}\sigma_k^+(0) \\
&\qquad -J_{32}\sum_{j=1}^{k-1}(-1)^j\sigma_j^-(1)\sigma_{k-j}^+(0)\Big) + o(\lambda^{-n})\Big)
\end{aligned} \tag{4.22}$$

при $\operatorname{Im}\lambda \to -\infty$, $\operatorname{Im}\lambda \leqslant -R$. Доказательство завершено. □

Замечание 4.2. Продемонстрируем альтернативный метод получения формул (4.3)–(4.6), первоначально предложенный в [25] для операторов Штурма–Лиувилля. Он основан на интегральном представлении характеристического определителя, полученного для 2×2-системы типа Дирака с интегрируемой потенциальной матрицей в [15] (см. (1.10)):

$$\Delta_Q(\lambda) = \Delta_0(\lambda) + \int_0^1 g_1(t) e^{ib_1\lambda t}\, dt + \int_0^1 g_2(t) e^{ib_2\lambda t}\, dt, \tag{4.23}$$

где функции $g_1, g_2 \in L^1[0,1]$ выражаются через ядро оператора преобразования.

Предполагая, что $g_1, g_2 \in W_1^n[0,1]$, и интегрируя по частям, получим

$$\begin{aligned}\int_0^1 g_1(t) e^{ib_1\lambda t}\, dt &= \left[g_1(t) \frac{e^{ib_1\lambda t}}{ib_1\lambda} \right]_0^1 - \frac{1}{ib_1\lambda} \int_0^1 g_1'(t) e^{ib_1\lambda t}\, dt \\ &= \sum_{k=1}^n \frac{g_1^{(k-1)}(0) - g_1^{(k-1)}(1) e^{ib_1\lambda}}{(-ib_1\lambda)^k} + \frac{1}{(-ib_1\lambda)^n} \int_0^1 g_1^{(n)}(t) e^{ib_1\lambda t}\, dt. \end{aligned} \tag{4.24}$$

Подставляя эту формулу в представление (4.23), имеем

$$\begin{aligned}\Delta_Q(\lambda) &= \Delta_0(\lambda) \\ &+ \sum_{k=1}^n \frac{g_1^{(k-1)}(0) - g_1^{(k-1)}(1) e^{ib_1\lambda}}{(-ib_1\lambda)^k} + \frac{1}{(-ib_1\lambda)^n} \int_0^1 g_1^{(n)}(t) e^{ib_1\lambda t}\, dt \\ &+ \sum_{k=1}^n \frac{g_2^{(k-1)}(0) - g_2^{(k-1)}(1) e^{ib_2\lambda}}{(-ib_2\lambda)^k} + \frac{1}{(-ib_2\lambda)^n} \int_0^1 g_2^{(n)}(t) e^{ib_2\lambda t}\, dt, \quad \lambda \neq 0. \end{aligned} \tag{4.25}$$

В свою очередь, комбинируя эту формулу с формулой (1.9) для $\Delta_0(\lambda)$, замечая, что $b_1 < 0 < b_2$, и применяя лемму Римана–Лебега, получим желаемое асимптотическое разложение (1.11)–(1.12). Сравнивая формулы (4.3)–(4.4) и (1.11)–(1.12), видим, что

$$c_k^+ = -\left(\frac{b_2 - b_1}{b_1}\right)^k g_1^{(k-1)}(1), \quad c_k^- = -\left(\frac{b_2 - b_1}{b_2}\right)^k g_2^{(k-1)}(1) \tag{4.26}$$

при $k \in \{1, \ldots, n\}$. Заметим, однако, что найти явный вид значений $g_1^{(k-1)}(1)$ и $g_2^{(k-1)}(1)$, непосредственно используя операторы преобразования, достаточно трудно.

Это причина, объясняющая, почему в данной работе (а также в [11]) мы используем описанный выше подход для вычисления коэффициентов $c_k^{\pm}$, развивая метод Марченко из [29].

Далее, напомним следующую абстрактную теорему о полноте для операторов $L_U(Q)$, доказанную в [12]. Для граничной задачи (1.1)–(1.4) она принимает следующий вид.

Теорема 4.3 (теорема 2.3 в [12]). *Пусть существуют $C, R > 0$ и $m \in \mathbb{Z}_+$ такие, что*

$$|\Delta(it)| \geqslant \frac{Ce^{-b_1 t}}{t^m}, \qquad |\Delta(-it)| \geqslant \frac{Ce^{b_2 t}}{t^m}, \qquad t > R. \tag{4.27}$$

Тогда система корневых функций граничной задачи (1.1)–(1.4) (*оператора $L_U(Q)$*) *полна и минимальна в $L^2([0,1];\mathbb{C}^2)$.*

Комбинируя теоремы 4.1 и 4.3, получим следующий общий результат о полноте (ср. [11, теорема 3]).

Теорема 4.4 (теорема 3 в [11]). *Пусть $Q_{12}(\cdot), Q_{21}(\cdot) \in W_1^n[0,1]$ и функции $\sigma_1^{\pm}(\cdot)$, …, $\sigma_n^{\pm}(\cdot)$ заданы соотношениями* (3.81), (3.82). *Положим $c_0^+ := J_{32}$, $c_0^- := J_{14}$, и пусть числа $c_k^{\pm}$, $k \in \{1, \ldots, n\}$, заданы соотношениями* (4.5)–(4.6). *Пусть $c_{k^+}^+ \neq 0$ и $c_{k^-}^- \neq 0$ для некоторых $k^+, k^- \in \{0, 1, \ldots, n\}$. Тогда система корневых векторов граничной задачи* (1.1)–(1.4) *полна и минимальна в $L^2([0,1];\mathbb{C}^2)$.*

Доказательство. Без ограничения общности можно предполагать, что

$$c_k^+ = 0, \quad k \in \{0, \ldots, k^+ - 1\}, \qquad c_k^- = 0, \quad k \in \{0, \ldots, k^- - 1\}. \tag{4.28}$$

Так как $c_{k^+}^+ \neq 0$ и $c_{k^-}^- \neq 0$, из формул (4.3)–(4.6) и (4.28) вытекает, что

$$|\Delta(it)| \geqslant \frac{Ce^{-b_1 t}}{t^{k^+}}, \qquad |\Delta(-it)| \geqslant \frac{Ce^{b_2 t}}{t^{k^-}}, \qquad t > R, \tag{4.29}$$

для некоторых $C, R > 0$. Значит, по теореме 4.3, система корневых векторов граничной задачи (1.1)–(1.4) полна и минимальна в $L^2([0,1];\mathbb{C}^2)$. □

Замечание 4.5. Отметим, что из формул (3.81)–(3.82) вытекает, что коэффициенты $c_k^{\pm}$ – полиномы от производных $Q_{12}^{(j)}(\cdot)$, $Q_{21}^{(j)}(\cdot)$ в 0 и 1. Таким образом, теорема 4.4 дает явное условие полноты. Однако явные выражения для $c_k^{\pm}$ для больших k довольно громоздки.

Более явные результаты о полноте, анонсированные также в [11], включая специфические критерии полноты в случае аналитического потенциала Q, будут опубликованы в другом месте.

§5. Приложение: уравнение Штурма–Лиувилля

Рассмотрим уравнение Штурма–Лиувилля

$$-y'' + q(x)y = \lambda^2 y, \qquad q(\cdot) \in C[0,1], \tag{5.1}$$

на отрезке [0,1]. Известно, что общие вырожденные граничные условия для уравнения (5.1) эквивалентны условиям

$$\begin{aligned} U_1(y) &= y(0) - \alpha y(1) = 0, \\ U_2(y) &= y'(0) + \alpha y'(1) = 0, \end{aligned} \tag{5.2}$$

с некоторым $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$.

Обозначим через $c(x,\lambda)$ и $s(x,\lambda)$ фундаментальную систему решений уравнения (5.1), удовлетворяющую начальным условиям

$$c(0,\lambda) = s'(0,\lambda) = 1, \qquad c'(0,\lambda) = s(0,\lambda) = 0. \tag{5.3}$$

Собственные значения задачи (5.1)–(5.2) совпадают с нулями характеристического детерминанта $\Delta(\lambda) := \det(U(\lambda))$, где

$$U(\lambda) := \begin{pmatrix} U_1(c(1,\lambda)) & U_1(s(1,\lambda)) \\ U_2(c(1,\lambda)) & U_2(s(1,\lambda)) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-\alpha\cdot c(1,\lambda) & -\alpha\cdot s(1,\lambda) \\ \alpha\cdot c'(1,\lambda) & 1+\alpha\cdot s'(1,\lambda) \end{pmatrix}. \tag{5.4}$$

Так как $c(1,\lambda)s'(1,\lambda) - c'(1,\lambda)s(1,\lambda) = 1$, то

$$\Delta(\lambda) = 1 - \alpha^2 + \alpha[s'(1,\lambda) - c(1,\lambda)]. \tag{5.5}$$

Напомним основной результат работы [25].

Теорема 5.1. *Пусть $q \in C^k[0,1]$ для некоторого $k \in \mathbb{Z}_+ := \mathbb{N} \cup \{0\}$ и*

$$q^{(k)}(0) \neq (-1)^k q^{(k)}(1). \tag{5.6}$$

Тогда система корневых векторов задачи (5.1)–(5.2) полна и минимальна в $L^2[0,1]$.

Ключевой результат, необходимый для доказательства этой теоремы, – это следующая асимптотическая формула для характеристического определителя $\Delta(\lambda)$, также доказанная в [25].

Предложение 5.2. *Пусть* $q \in C^{n-1}[0,1]$ *при некотором* $n \in \mathbb{N}$ *и выполнены условия*

$$q^{(k)}(0) = (-1)^k q^{(k)}(1), \qquad k \in \{0, 1, \dots, n-2\}. \tag{5.7}$$

Тогда при $\lambda \to \infty$ *справедливо асимптотическое соотношение*

$$\Delta(\lambda) = \left(\frac{\alpha\big[(-1)^{n-1} q^{(n-1)}(1) - q^{(n-1)}(0)\big]}{(\pm 2i\lambda)^{n+1}} + \frac{o(1)}{\lambda^{n+1}}\right) e^{\pm i\lambda}, \quad \lambda \in \Omega_\varepsilon^{\mp}, \tag{5.8}$$

где $0 < \varepsilon < \pi/2$ *и*

$$\Omega_\varepsilon^{\pm} := \{\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\} : \varepsilon \leqslant \pm \arg \lambda \leqslant \pi - \varepsilon\}. \tag{5.9}$$

Здесь мы приведем более простое и элегантное доказательство, используя асимптотические формулы для специальных решений уравнения (5.1) из [29] при дополнительном условии гладкости $q \in W_2^n[0,1]$.

Лемма 5.3 ([29, лемма 1.4.1])**.** *Пусть* $q \in W_2^n[0,1]$. *Тогда уравнение* (5.1) *имеет решение* $y(x,\lambda)$ *вида*

$$y(x,\lambda) = e^{i\lambda x}\left(u_0(x) + \frac{u_1(x)}{2i\lambda} + \dots + \frac{u_n(x)}{(2i\lambda)^n} + \frac{u_{n+1}(x,\lambda)}{(2i\lambda)^{n+1}}\right), \tag{5.10}$$

где

$$u_0(x) = 1, \quad u_{k+1}(x) = -u_k'(x) + u_k'(0) + \int_0^x q(t) u_k(t)\, dt \tag{5.11}$$

при $k \in \{0, 1, \dots, n\}$, *а функция* $u_{n+1}(x,\lambda)$ *и ее производная допускают следующие представления*:

$$\begin{aligned} u_{n+1}(x,\lambda) = u_{n+1}(x) &+ \frac{1}{2i\lambda}\int_0^x q(t) u_{n+1}(t)\, dt \\ &- \int_0^x \left(u_{n+1}'(x-t) + \frac{1}{2i\lambda} K_{n+1}^{(0)}(x,t)\right) e^{-2i\lambda t}\, dt, \end{aligned} \tag{5.12}$$

$$u_{n+1}'(x,\lambda) = 2i\lambda \int_0^x \left(u_{n+1}'(x-t) + \frac{1}{2i\lambda} K_{n+1}^{(1)}(x,t)\right) e^{-2i\lambda t}\, dt, \tag{5.13}$$

в которых

$$K_{n+1}^{(0)}(x,\cdot),\quad K_{n+1}^{(1)}(x,\cdot),\quad u_{n+1}'(x-\cdot)\in L^2[0,x],\quad x\in[0,1]. \tag{5.14}$$

Замечание 5.4. Из (5.11) вытекает, что

$$u_k\in W_2^{n+2-k}[0,1],\quad k\in\{1,2,\dots,n+1\}$$

(см. [29, формула (1.4.5)]). Также отметим, что решение (5.10) зависит от n.

Далее приведем следующий результат, являющийся незначительной модификацией леммы 1.4.2 из [29].

Лемма 5.5. *Пусть* $q\in W_2^n[0,1]$. *Тогда решение* (5.10) *уравнения* (5.1) *имеет вид*

$$y(x,\lambda)=\exp\left(i\lambda x+\int_0^x\sigma(t,\lambda)\,dt\right), \tag{5.15}$$

в котором

$$\sigma(x,\lambda)=\sum_{k=1}^n\frac{\sigma_k(x)}{(2i\lambda)^k}+\frac{\sigma_n(x,\lambda)}{(2i\lambda)^n}, \tag{5.16}$$

$$\sigma_1(t)=q(t),\quad \sigma_{k+1}(t)=-\sigma_k'(t)-\sum_{j=1}^{k-1}\sigma_{k-j}(t)\sigma_j(t),\quad k\leqslant n-1, \tag{5.17}$$

$$\sigma_n(0,\lambda)=0,\quad \lambda\in\mathbb{C}\setminus\{0\}, \tag{5.18}$$

$$\sigma_n(x,\lambda)=o(1),\quad \lambda\in\Omega_\varepsilon^-,\quad x\in[0,1]. \tag{5.19}$$

Доказательство. Формулы (5.15), (5.16), (5.17) составляют содержание утверждения [29, лемма 1.4.2]. Докажем соотношения (5.18) и (5.19). Для удобства читателя воспроизведем некоторые части доказательства из [29, лемма 1.4.2]. Полагая

$$\sigma(x,\lambda):=\frac{d}{dx}\ln\left(u_0(x)+\frac{u_1(x)}{2i\lambda}+\dots+\frac{u_n(x)}{(2i\lambda)^n}+\frac{u_{n+1}(x,\lambda)}{(2i\lambda)^{n+1}}\right), \tag{5.20}$$

получим представление (5.15) решения (5.10), из которого вытекает равенство

$$y'(x,\lambda)=(i\lambda+\sigma(x,\lambda))y(x,\lambda) \tag{5.21}$$

и уравнение на функцию $\sigma(x,\lambda)$:

$$\sigma'(x,\lambda)+2i\lambda\sigma(x,\lambda)+\sigma^2(x,\lambda)-q(x)=0. \tag{5.22}$$

Полагая

$$P_n(x,\lambda) = 1 + \frac{u_1(x)}{2i\lambda} + \dots + \frac{u_n(x)}{(2i\lambda)^n}, \tag{5.23}$$

$$Q_n(x,\lambda) = P_n(x,\lambda) + \frac{u_{n+1}(x,\lambda)}{(2i\lambda)^{n+1}}, \tag{5.24}$$

приходим к следующему представлению для $y(x,\lambda)$ и $\sigma(x,\lambda)$:

$$y(x,\lambda) = e^{i\lambda x} Q_n(x,\lambda), \tag{5.25}$$

$$\sigma(x,\lambda) = \frac{P_n'(x,\lambda)}{P_n(x,\lambda)} + \frac{u_{n+1}'(x,\lambda)P_n(x,\lambda) - u_{n+1}(x,\lambda)P_n'(x,\lambda)}{(2i\lambda)^{n+1}P_n(x,\lambda)Q_n(x,\lambda)}. \tag{5.26}$$

Рациональная функция $P_n'(x,\lambda)[P_n(x,\lambda)]^{-1}$ может быть разложена в ряд по степеням $(2i\lambda)^{-1}$ в окрестности бесконечности. Выделяя в этом разложении первые n членов, получим

$$\frac{P_n'(x,\lambda)}{P_n(x,\lambda)} = \sum_{k=1}^{n} \frac{\sigma_k(x)}{(2i\lambda)^k} + \frac{1}{(2i\lambda)^n} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\varphi_k(x)}{(2i\lambda)^k} \tag{5.27}$$

и

$$\sigma(x,\lambda) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\sigma_k(x)}{(2i\lambda)^k} + \frac{\sigma_n(x,\lambda)}{(2i\lambda)^n}, \tag{5.28}$$

где

$$\sigma_n(x,\lambda) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\varphi_k(x)}{(2i\lambda)^k} + \frac{u_{n+1}'(x,\lambda)P_n(x,\lambda) - u_{n+1}(x,\lambda)P_n'(x,\lambda)}{2i\lambda P_n(x,\lambda)Q_n(x,\lambda)}. \tag{5.29}$$

Заметим, что функции $\sigma_k(x)$ и $\varphi_k(x)$ – полиномы от функций $u_1(x)$, $\dots$, $u_n(x)$ и их производных. Кроме того, $\sigma_k(x)$ зависит только от функций $u_1(x)$, $\dots$, $u_k(x)$ и их производных. Значит, ввиду замечания 5.4, имеем $\sigma_k \in W_2^{n+1-k}[0,1]$, $k \in \{1,2,\dots,n\}$ и $\varphi_k \in W_2^1[0,1]$, $k \in \mathbb{N}$.

Из формул (5.11), (5.12), (5.13) вытекает, что

$$u_1(0) = u_2(0) = \dots = u_n(0) = 0, \tag{5.30}$$

$$u_{n+1}(0,\lambda) = u_{n+1}'(0,\lambda) = 0. \tag{5.31}$$

Следовательно, $P_n(0,\lambda) = 1$ и

$$\frac{P_n'(0,\lambda)}{P_n(0,\lambda)} = \sum_{k=1}^{n} \frac{u_k'(0)}{(2i\lambda)^k} = \sum_{k=1}^{n} \frac{\sigma_k(0)}{(2i\lambda)^k} + \frac{1}{(2i\lambda)^n} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\varphi_k(0)}{(2i\lambda)^k}. \tag{5.32}$$

Из этого следует, что $u'_k(0) = \sigma_k(0)$, $k \in \{1, 2, \dots, n\}$ и $\varphi_k(0) = 0$, $k \in \mathbb{N}$. Теперь из (5.29) и (5.31) вытекает равенство $\sigma_n(0, \lambda) = 0$.

Заметим, что для $\lambda \in \Omega_\varepsilon^-$ и $a \geqslant 0$ мы имеем $\left|e^{-i\lambda a}\right| = e^{\operatorname{Im}\lambda a} \leqslant 1$. Кроме того,

$$|\operatorname{Im}\lambda| \geqslant C|\lambda|, \quad \lambda \in \Omega_\varepsilon^-, \tag{5.33}$$

для некоторого $C = C(\varepsilon) > 0$. Поэтому для $x \in [0,1]$ и $f \in L^2[0,x]$ в силу неравенства Коши имеем:

$$\begin{aligned} \left|\int_0^x f(t)e^{-2i\lambda t}\,dt\right| &\leqslant \|f\|_{L^2[0,x]}\left(\int_0^x \left|e^{-2i\lambda t}\right|^2 dt\right)^{1/2} \\ &= \|f\|_{L^2[0,x]}\left(\frac{e^{4\operatorname{Im}\lambda x}-1}{4\operatorname{Im}\lambda}\right)^{1/2} \leqslant \frac{C_1\|f\|_{L^2[0,x]}}{\sqrt{|\lambda|}}, \quad \lambda \in \Omega_\varepsilon^-, \end{aligned} \tag{5.34}$$

для некоторого $C_1 > 0$. Следовательно, из (5.13), (5.14) и (5.34) вытекает

$$\begin{aligned} \left|u'_{n+1}(x,\lambda)\right| &\leqslant 2|\lambda| \cdot \left|\int_0^x u'_{n+1}(x-t)e^{-2i\lambda t}\,dt\right| + \left|\int_0^x K^{(1)}_{n+1}(x,t)e^{-2i\lambda t}\,dt\right| \\ &\leqslant C_2\sqrt{|\lambda|} + C_3/\sqrt{|\lambda|}, \quad \lambda \in \Omega_\varepsilon^-, \quad x \in [0,1], \end{aligned} \tag{5.35}$$

где $C_2, C_3 > 0$ могут зависеть от x. Таким образом,

$$u'_{n+1}(x,\lambda) = o(\lambda), \quad \lambda \in \Omega_\varepsilon^-, \quad x \in [0,1]. \tag{5.36}$$

Аналогично из (5.12), (5.14) и (5.34) следует, что

$$u_{n+1}(x,\lambda) - u_{n+1}(x) = o(1), \quad \lambda \in \Omega_\varepsilon^-, \quad x \in [0,1]. \tag{5.37}$$

Из (5.23), (5.24) и (5.37) ясно, что

$$\begin{gathered} P_n(x,\lambda) = 1 + o(1), \quad P'_n(x,\lambda) = o(1), \quad Q_n(x,\lambda) = 1 + o(1), \\ \lambda \in \Omega_\varepsilon^-, \quad x \in [0,1]. \end{gathered} \tag{5.38}$$

Далее, заметим, что равенство (5.27) влечет

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\varphi_k(x)}{(2i\lambda)^k} = (2i\lambda)^n\left(\frac{P'_n(x,\lambda)}{P_n(x,\lambda)} - \sum_{k=1}^{n}\frac{\sigma_k(x)}{(2i\lambda)^k}\right) = \frac{1}{P_n(x,\lambda)}\sum_{k=1}^{n}\frac{\psi_k(x)}{(2i\lambda)^k}, \tag{5.39}$$

где ψ_k – полином от u_j, u'_j и σ_j, $j \in \{1, \dots, n\}$. Следовательно, $\psi_k \in W_2^1[0,1]$ и

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\varphi_k(x)}{(2i\lambda)^k} = o(1), \quad \lambda \in \Omega_\varepsilon^-, \quad x \in [0,1]. \tag{5.40}$$

Подставляя (5.36), (5.37), (5.38) и (5.40) в (5.29), приходим к соотношению

$$\sigma_n(x,\lambda) = o(1) + \frac{o(\lambda)\cdot(1+o(1)) - (o(1)+u_{n+1}(x))\cdot o(1)}{2i\lambda\cdot(1+o(1))\cdot(1+o(1))} = o(1),$$
$$\lambda \in \Omega_\varepsilon^-, \quad x \in [0,1]. \tag{5.41}$$

Доказательство завершено. □

Доказательство предложения 5.2. Положим

$$\omega(x,\lambda) := 2i\lambda + \sigma(x,\lambda) - \sigma(x,-\lambda). \tag{5.42}$$

Так как $\sigma_n(0,\lambda) = 0$, то $\lambda^n\omega(0,\lambda)$ – полином от λ. Значит, для достаточно большого R выполнено $\omega(0,\lambda) \neq 0$ для $|\lambda| > R$. Можно проверить, что при $|\lambda| > R$ справедливы следующие формулы:

$$s(x,\lambda) = \frac{y(x,\lambda) - y(x,-\lambda)}{\omega(0,\lambda)}, \tag{5.43}$$

$$c(x,\lambda) = \frac{y(x,\lambda)[i\lambda - \sigma(0,-\lambda)] + y(x,-\lambda)[i\lambda + \sigma(0,\lambda)]}{\omega(0,\lambda)}. \tag{5.44}$$

Подставляя (5.43) и (5.44) в (5.5), получим

$$\Delta(\lambda) = 1 - \alpha^2 + \alpha\frac{y(1,\lambda)[\sigma(1,\lambda)+\sigma(0,-\lambda)] - y(1,-\lambda)[\sigma(1,-\lambda)+\sigma(0,\lambda)]}{\omega(0,\lambda)}. \tag{5.45}$$

Заметим, что $\omega(0,\lambda) = -\omega(0,-\lambda)$. Следовательно, $\Delta(\lambda) = \Delta(-\lambda)$. То есть достаточно доказать равенство (5.8) только при $\lambda \in \Omega_\varepsilon^-$. Из (5.16), (5.18) и (5.19) имеем:

$$\sigma(1,\lambda) + \sigma(0,-\lambda) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\sigma_k(1) + (-1)^k\sigma_k(0)}{(2i\lambda)^k} + \frac{o(1)}{\lambda^n}, \quad \lambda \in \Omega_\varepsilon^-. \tag{5.46}$$

Докажем, что

$$\sigma_k(1) + (-1)^k\sigma_k(0) = 0, \qquad k \in \{1, \dots, n-1\}, \tag{5.47}$$

$$\sigma_n(1) + (-1)^n\sigma_n(0) = (-1)^{n-1}q^{(n-1)}(1) - q^{(n-1)}(0). \tag{5.48}$$

Для этого выведем некоторую явную формулу для $\sigma_k(x)$. Из рекуррентных формул (5.17) вытекает, что

$$\sigma_{k+1}(x) = (-1)^k q^k(x) + S_{k-2}(x), \tag{5.49}$$

где $S_{k-2}(x)$ – полином от $q(x), q'(x), \dots, q^{(k-2)}(x)$. Например,

$$\sigma_1(x) = q(x), \tag{5.50}$$
$$\sigma_2(x) = -q'(x), \tag{5.51}$$
$$\sigma_3(x) = q''(x) - q(x)^2, \tag{5.52}$$
$$\sigma_4(x) = -q'''(x) + 2q(x)q'(x). \tag{5.53}$$

Установим некоторые дополнительные свойства полинома $S_{k-2}(x)$. Пусть $w(x) = c_j \cdot q^{(j_1)}(x) \cdot q^{(j_2)}(x) \cdot \dots \cdot q^{(j_p)}(x)$, $c_j \neq 0$, $j_1, \dots, j_p \in \mathbb{Z}_+$, – некоторый моном. Назовем номер $r(w) := j_1 + j_2 + \dots + j_p$ *порядком* монома w. Докажем индукцией по k, что порядок каждого монома в $\sigma_{k+1}(x)$ имеет ту же четность, что и k. Это утверждение очевидно в случае $k = 0$: $\sigma_1(x) = q(x)$ и моном $q(x)$ имеет нулевой порядок. Предположим, что это верно для $\sigma_1(x), \dots, \sigma_k(x)$, и докажем это для $\sigma_{k+1}(x)$, где $k \in \mathbb{N}$. Ввиду формулы (5.17), требуется доказать, что порядок каждого монома в $\sigma_k'(x)$ имеет ту же четность, что и k, и то же самое для $\sigma_{k-j}(x)\sigma_j(x)$, $j \in \{1, \dots, k-1\}$. Пусть $w(x)$ – некоторый моном от $\sigma_k(x)$. По предположению, $r(w) \equiv k - 1 \pmod 2$. Ясно, что порядок каждого монома полинома $w'(x)$ равен $r(w) + 1 \equiv k \pmod 2$. Следовательно, для мономов полинома $\sigma_k'(x)$ требуемое свойство установлено. Пусть теперь $w(x)$ – некоторый моном от $\sigma_{k-j}(x)\sigma_j(x)$. Тогда $w(x) = C(w)w_1(x)w_2(x)$ для некоторой константы $C(w)$, где $w_1(x)$ – некоторый моном от $\sigma_{k-j}(x)$, а $w_2(x)$ – некоторый моном от $\sigma_j(x)$. По предположению, $r(w_1) \equiv k - j - 1 \pmod 2$ и $r(w_2) \equiv j - 1 \pmod 2$. Следовательно,

$$r(w) \equiv r(w_1) + r(w_2) \equiv (k - j - 1) + (j - 1) \equiv k \pmod 2. \tag{5.54}$$

Что и требовалось.

Теперь мы готовы доказать соотношения (5.47) и (5.48). Пусть $k \in \{0, 1, \dots, n-1\}$. Пусть $w(x) = c_j \cdot q^{(j_1)}(x) \cdot \dots \cdot q^{(j_p)}(x)$ – моном от $S_{k-2}(x)$. Очевидно, $j_1, \dots, j_p \leqslant k - 2 < n - 2$. Теперь из соотношений (5.7) и

$r(w) \equiv k \pmod 2$ вытекает, что

$$\begin{aligned} w(1) &= c_j \cdot q^{(j_1)}(1) \cdot \dots \cdot q^{(j_p)}(1) \\ &= (-1)^{j_1+\dots+j_p} \cdot c_j \cdot q^{(j_1)}(0) \cdot \dots \cdot q^{(j_p)}(0) \\ &= (-1)^{r(w)} w(0) = (-1)^k w(0) \end{aligned}$$

и, следовательно,

$$S_{k-2}(1) = (-1)^k S_{k-2}(0), \quad k \in \{0, 1, \dots, n-1\}, \tag{5.55}$$

что приводит к соотношению

$$\begin{aligned} &\sigma_{k+1}(1) + (-1)^{k+1}\sigma_{k+1}(0) \\ &\qquad = (-1)^k q^{(k)}(1) + S_{k-2}(1) - q^{(k)}(0) + (-1)^{k+1} S_{k-2}(0) \\ &\qquad = (-1)^k q^{(k)}(1) - q^{(k)}(0). \end{aligned} \tag{5.56}$$

Теперь формулы (5.47) и (5.48) следуют непосредственно из (5.56) и (5.7).

Подставляя выражения (5.47) и (5.48) в (5.46), получим

$$\sigma(1, \lambda) + \sigma(0, -\lambda) = \frac{(-1)^{n-1} q^{(n-1)}(1) - q^{(n-1)}(0)}{(2i\lambda)^n} + \frac{o(1)}{\lambda^n}, \quad \lambda \in \Omega_\varepsilon^-. \tag{5.57}$$

Далее, заметим, что

$$y(1, \lambda) = e^{i\lambda}(1 + o(1)), \quad \lambda \in \Omega_\varepsilon^-, \tag{5.58}$$

$$\omega(0, \lambda) = 2i\lambda + o(1), \quad \lambda \in \Omega_\varepsilon^-. \tag{5.59}$$

Из (5.21) и (5.10) вытекает, что

$$\begin{aligned} &y(1, -\lambda)[\sigma(1, -\lambda) + \sigma(0, \lambda)] \\ &\qquad = y'(1, -\lambda) + i\lambda y(1, -\lambda) + y(1, -\lambda)\sigma(0, \lambda) \\ &\qquad = e^{-i\lambda} \sum_{k=1}^{n} \frac{u_k'(1) + u_k(1)\sigma(0, \lambda)}{(-2i\lambda)^k} \\ &\qquad\quad + \frac{e^{-i\lambda}(u_{n+1}'(1, -\lambda) + u_{n+1}(1, -\lambda)\sigma(0, \lambda))}{(-2i\lambda)^{n+1}}. \end{aligned} \tag{5.60}$$

Из (5.16) и (5.18) получим

$$\sigma(0, \lambda) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\sigma_k(0)}{(2i\lambda)^k} = o(1), \quad \lambda \in \Omega_\varepsilon^-. \tag{5.61}$$

Из (5.13), неравенства Коши и (5.33) получим

$$\begin{aligned}
&\left|e^{-i\lambda}u'_{n+1}(1,-\lambda)\right| \\
&\qquad\leqslant e^{\operatorname{Im}\lambda}\int\limits_0^1\Big(2|\lambda|\left|u'_{n+1}(1-t)\right|+\left|K^{(1)}_{n+1}(1,t)\right|\Big)e^{-2\operatorname{Im}\lambda t}\,dt \\
&\quad\leqslant e^{\operatorname{Im}\lambda}\Big(2|\lambda|\left\|u'_{n+1}\right\|_{L^2[0,1]}+\left\|K^{(1)}_{n+1}(1,\cdot)\right\|_{L^2[0,1]}\Big)\bigg(\int\limits_0^1 e^{-4\operatorname{Im}\lambda t}\,dt\bigg)^{1/2} \\
&\quad\leqslant C_1e^{\operatorname{Im}\lambda}|\lambda|\bigg(\frac{e^{-4\operatorname{Im}\lambda}-1}{-4\operatorname{Im}\lambda}\bigg)^{1/2}\leqslant C_2\sqrt{|\lambda|}e^{-\operatorname{Im}\lambda},\quad \lambda\in\Omega^-_\varepsilon, \qquad (5.62)
\end{aligned}$$

для некоторых $C_1, C_2 > 0$. Так как

$$|e^{-i\lambda}|=e^{\operatorname{Im}\lambda}=\frac{o(1)}{|\lambda|^m}\,e^{-\operatorname{Im}\lambda},\quad \lambda\in\Omega^-_\varepsilon,\quad m\in\mathbb{N}, \qquad (5.63)$$

то аналогично из (5.12) вытекает, что

$$\begin{aligned}
\left|e^{-i\lambda}u_{n+1}(1,-\lambda)\right| &\leqslant e^{\operatorname{Im}\lambda}\cdot\bigg(|u_{n+1}(1)|+\frac{1}{2|\lambda|}\int\limits_0^1|q(t)|\cdot|u_{n+1}(t)|\,dt\bigg) \\
&+e^{\operatorname{Im}\lambda}\int\limits_0^1\bigg(\left|u'_{n+1}(1-t)\right|+\frac{1}{2|\lambda|}\left|K^{(1)}_{n+1}(1,t)\right|\bigg)e^{-2\operatorname{Im}\lambda t}\,dt \\
&\leqslant\frac{C_3}{\sqrt{|\lambda|}}\,e^{-\operatorname{Im}\lambda},\quad \lambda\in\Omega^-_\varepsilon, \qquad (5.64)
\end{aligned}$$

для некоторого $C_3 > 0$. Подставляя выражения (5.61), (5.62), (5.63) и (5.64) в (5.60), получим

$$y(1,-\lambda)[\sigma(1,-\lambda)+\sigma(0,\lambda)]=\frac{o(1)}{\lambda^n}e^{-\operatorname{Im}\lambda},\quad \lambda\in\Omega^-_\varepsilon. \qquad (5.65)$$

Подставляя выражения (5.57), (5.58), (5.59) и (5.65) в (5.45), приходим к соотношению

$$\begin{aligned}
\Delta(\lambda)=1-\alpha^2+\alpha&\bigg(e^{i\lambda}(1+o(1))\frac{q_n+o(1)}{(2i\lambda)^n}+\frac{o(1)}{\lambda^n}e^{i\lambda}\bigg) \\
&\times[2i\lambda+o(1)]^{-1}=\frac{\alpha q_n+o(1)}{(2i\lambda)^{n+1}}e^{i\lambda},\quad \lambda\in\Omega^-_\varepsilon, \qquad (5.66)
\end{aligned}$$

где $q_n := (-1)^{n-1}q^{(n-1)}(1) - q^{(n-1)}(0)$. Это завершает доказательство. □

Список литературы

1. A. V. Agibalova, M. M. Malamud, and L. L. Oridoroga, *On the completeness of general boundary value problems for* 2×2 *first-order systems of ordinary differential equations.* — Methods of Functional Analysis and Topology **18**, No. 1 (2012), 4–18.
2. G. D. Birkhoff and R. E. Langer, *The boundary problems and developments associated with a system of ordinary differential equations of the first order.* — Proc. Amer. Acad. Arts Sci. **58** (1923), 49–128.
3. P. Djakov and B. Mityagin, *Bari–Markus property for Riesz projections of 1D periodic Dirac operators.* — Math. Nachr. **283**, No. 3 (2010), 443–462.
4. P. Djakov and B. Mityagin, *Criteria for existence of Riesz bases consisting of root functions of Hill and 1D Dirac operators.* — J. Funct. Anal. **263**, No. 8 (2012), 2300–2332.
5. P. Djakov and B. Mityagin, *Unconditional convergence of spectral decompositions of 1D Dirac operators with regular boundary conditions.* — Indiana Univ. Math. J. **61**, No. 1 (2012), 359–398.
6. Yu. P. Ginzburg, *The almost invariant spectral propeties of contractions and the multiplicative properties of analytic operator-functions.* — Funct. Anal. Appl. **5**, No. 3 (1971), 197–205.
7. A. M. Gomilko and L. Rzepnicki, *On asymptotic behaviour of solutions of the Dirac system and applications to the Sturm-Liouville problem with a singular potential.* — Journal of Spectral Theory **10**, No. 3 (2020), 747–786.
8. A. P. Kosarev and A. A. Shkalikov, *Spectral asymptotics of solutions of a* 2×2 *system of first-order ordinary differential equations.* — Math. Notes **110**, No. 5–6 (2021), 967–971.
9. A. P. Kosarev and A. A. Shkalikov, *Spectral asymptotics for solutions of* 2×2 *system of ordinary differential equations of the first order*, `arXiv:2212.06227`.
10. V. M. Kurbanov and A. M. Abdullayeva, *Bessel property and basicity of the system of root vector-functions of Dirac operator with summable coefficient.* — Operators and Matrices **12**, No. 4 (2018), 943–954.
11. A. A. Lunyov and M. M. Malamud, *On the completeness of root vectors for first-order systems: application to the Regge problem.* — Dokl. Math. **88**, No. 3 (2013), 678–683.
12. A. A. Lunyov and M. M. Malamud, *On spectral synthesis for dissipative Dirac type operators.* — Integr. Equ. Oper. Theory **90** (2014), 79–106.
13. A. A. Lunyov and M. M. Malamud, *On the Riesz basis property of the root vector system for Dirac-type* 2×2 *systems.* — Dokl. Math. **90**, No. 2 (2014) 556–561.
14. A. A. Lunyov and M. M. Malamud, *On the completeness and Riesz basis property of root subspaces of boundary value problems for first order systems and applications.* — J. Spectral Theory **5**, No. 1 (2015), 17–70.
15. A. A. Lunyov and M. M. Malamud, *On the Riesz basis property of root vectors system for* 2×2 *Dirac type operators.* — J. Math. Anal. Appl. **441** (2016), 57–103.

16. A. A. Lunyov and M. M. Malamud, *On transformation operators and Riesz basis property of root vectors system for $n \times n$ Dirac type operators. Application to the Timoshenko beam model.* arXiv:2112.07248.
17. A. A. Lunyov and M. M. Malamud, *Stability of spectral characteristics of boundary value problems for 2×2 Dirac type systems. Applications to the damped string.* — J. Differential Equations **313** (2022), 633–742.
18. A. Lunev, M. Malamud, *On characteristic determinants of boundary value problems for Dirac type systems.* — Zap. Nauchn. Sem. POMI **516** (2022), 69–120.
19. A. S. Makin, *On the completeness of the system of root functions of the Sturm–Liouville operator with degenerate boundary conditions.* — Differ. Equ. **50**, No. 6 (2014), 835–839.
20. A. S. Makin, *Regular boundary value problems for the Dirac operator.* — Doklady Mathematics **101**, No. 3 (2020), 214–217.
21. A. S. Makin, *On the spectrum of two-point boundary value problems for the Dirac operator.* — Differ. Equ. **57**, No. 8 (2021), 993–1002.
22. A. S. Makin, *On convergence of spectral expansions of Dirac operators with regular boundary conditions.* — Math. Nachr. **295**, No. 1 (2022), 189–210.
23. A. S. Makin, *On the completeness of root function system of the Dirac operator with two-point boundary conditions.* arXiv:2304.06108.
24. M. M. Malamud, *Similarity of Volterra operators and related questions of the theory of differential equations of fractional order.* — Trans. Moscow Math. Soc. **55** (1994), 57–122.
25. M. M. Malamud, *On the completeness of a system of root vectors of the Sturm-Liouville operator with general boundary conditions.* — Funct. Anal. Appl. **42**, No. 3 (2008), 198–204.
26. M. M. Malamud and L. L. Oridoroga, *Completeness theorems for systems of differential equations.* — Funct. Anal. Appl. **34**, No. 4 (2000), 308–310.
27. M. M. Malamud and L. L. Oridoroga, *On the completeness of the system of root vectors for second-order systems.* — Dokl. Math. **82**, No. 3 (2010), 899–904.
28. M. M. Malamud and L. L. Oridoroga, *On the completeness of root subspaces of boundary value problems for first order systems of ordinary differential equations.* — J. Funct. Anal. **263** (2012), 1939–1980.
29. V. A. Marchenko, *Sturm–Liouville operators and applications.* — Operator Theory: Advances and Appl. vol. **22**, Birkhäuser Verlag, Basel (1986).
30. S. P. Novikov, S. V. Manakov, L. P. Pitaevskij, and V. E. Zakharov, *Theory of solitons. The inverse scattering method.* Springer-Verlag (1984).
31. L. Rzepnicki, *Asymptotic behavior of solutions of the Dirac system with an integrable potential.* — Integral Equations Operator Theory, **93**, No. 55 (2021), 24 p.
32. A. M. Savchuk and I. V. Sadovnichaya, *The Riesz basis property with brackets for the Dirac system with a summable potential.* — J. Math. Sci. (N.Y.) **233**, No. 4 (2018), 514–540.
33. A. M. Savchuk and A. A. Shkalikov, *The Dirac operator with complex-valued summable potential.* — Math. Notes **96**, No. 5–6 (2014), 777–810.

Lunev A. A., Malamud M. M. On an asymptotic expansion of the characteristic determinant for 2×2 Dirac type systems.

The paper is concerned with the asymptotic expansion of solutions to the following 2×2 Dirac type system

$$Ly = -iB^{-1}y' + Q(x)y = \lambda y, \quad B = \begin{pmatrix} b_1 & 0 \\ 0 & b_2 \end{pmatrix}, \quad y = \operatorname{col}(y_1, y_2),$$

with a smooth matrix potential $Q \in W_1^n[0,1] \otimes \mathbb{C}^{2\times 2}$ and $b_1 < 0 < b_2$. If $b_2 = -b_1 = 1$, this equation is equivalent to the one-dimensional Dirac equation.

These formulas are applied to get an asymptotic expansion of the characteristic determinant of the boundary value problem associated with the above equation subject to the general two-point boundary conditions. This expansion directly yields a new completeness result for the system of root functions of such a boundary-value problem with nonregular boundary conditions.

Российский университет
дружбы народов им. П. Лумумбы;
Математический институт
им. С. М. Никольского,
Москва, Россия

Санкт-Петербургский
государственный университет,
Санкт-Петербург, Россия
E-mail: malamud3m@gmail.com

Поступило 24 ноября 2023 г.