Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 527, 2023 г.

С. В. Кисляков

ЧАСТИЧНЫЕ РЕТРАКЦИИ ДЛЯ АБСТРАКТНЫХ ПРОСТРАНСТВ ТИПА ХАРДИ

1. Эта заметка примыкает к статье [1]. Мы перенесем на абстрактную ситуацию, описанную в [1], следующие утверждения о весовых пространствах Харди в круге (точнее, о соответствующих граничных классах).

Под весом на окружности $\mathbb{T}$ мы понимаем любую неотрицательную функцию w с суммируемым логарифмом. Положим $L^p_w = \{f : f/w \in L^p(\mathbb{T})\}$, $0 < p \leqslant \infty$. Соответствующие весовые классы Харди H^p_w определяются естественным образом: $H^p_w = \{f : f/W \in H^p(\mathbb{T})\}$, где W – внешняя функция, построенная по весу w.

Теорема A. *Пусть $w_1, \dots, w_N$ – веса на единичной окружности, удовлетворяющие условию $\log w_j \in \mathrm{BMO}$, $j = 1, \dots, N$, и пусть $1 \leqslant p \leqslant +\infty$. Для каждой функции $f \in H^p_{w_1} + \dots + H^p_{w_N}$ существует линейный оператор T на сумме $L^p_{w_1} + \dots + L^p_{w_N}$, оставляющий функцию f на месте и отображающий непрерывно пространство $L^p_{w_j}$ в $H^p_{w_j}$ при $1 \leqslant j \leqslant N$.*

Теорема B. *При тех же условиях на веса, для любой функции $f \in H^\infty + H^1_{w_1} + \dots + H^1_{w_N}$ существует линейный оператор T на сумме $L^\infty + L^1_{w_1} + \dots + L^1_{w_N}$, оставляющий функцию f на месте и отображающий непрерывно L^∞ в H^∞ и $L^1_{w_j}$ в $H^1_{w_j}$ при всех $j = 1, \dots, N$.*

Обе теоремы были доказаны в [2] (вторая – с небольшим дефектом); см. имеющиеся там ссылки по поводу истории вопроса.

2. Чтобы сформулировать обобщения этих результатов, напомним некоторые определения из работы [1] и доказанные там факты. Пусть μ – положительная σ-конечная мера на некотором множестве S, а X – w^*-замкнутая подалгебра алгебры $L^\infty(\mu)$. Говорят, что алгебра X удовлетворяет условию (α_μ), если найдутся такие параметры $p \in (0, \infty)$ и

Ключевые слова: весовые пространства Харди, равномерные алгебры, интерполяция.

$\varkappa \in \mathbb{N}$, что верно следующее: если $0 \leqslant \varphi \in L^p(\mu)$, то существует последовательность $\{u_n\}_{n=1}^{\infty} \subset X$, сходящаяся п.в. к некоторой функции u, причем

$$\operatorname{Re} u_n \geqslant 0, \quad \|u_n^{\varkappa}\|_{L^p(\mu)} \leqslant C\|\varphi\|_{L^p(\mu)} \quad \text{и} \quad \operatorname{Re} u \geqslant \varphi^{1/\varkappa}.$$

В [1] объяснялось, что многие алгебры функций, возникающие в комплексном анализе, таковы (в частности, такова алгебра $H^{\infty}(\mathbb{T})$ относительно нормированной меры Лебега m на окружности, а также относительно мер $w \cdot m$, где $\log w \in \mathrm{BMO}$). Там же было показано, что параметр $\varkappa$ всегда можно увеличить, а параметр p заменить на любой другой, изменив $\varkappa$; при этом постоянная C меняется контролируемым образом.

Следующее понятие отвечает условию $\log w \in \mathrm{BMO}$ на окружности. Объяснения см. в [1].

Определение. *Пусть $\mathcal{L}_+$ – множество неотрицательных функций из $\bigcup_{s>0}(L^s(\mu) + L^{\infty}(\mu))$. Функция $u \in \mathcal{L}_+$ называется регулярным весом, если найдутся числа $C > 0$, $\delta > 0$, $r \in (0,\infty)$ такие, что выполнено следующее: существуют функции $U_n \in X$, сходящиеся п.в. к некоторой функции U, для которых*

$$\sup_n \|U_n\|_{L^r(\mu)+L^{\infty}(\mu)} = \sup_n \inf_{U_n=f+g} \bigl(\|f\|_{L^r(\mu)} + \|g\|_{L^{\infty}(\mu)}\bigr) < +\infty,$$

функции $u_n = \operatorname{Re} U_n$ неотрицательны и $C^{-1}u^{\delta} \leqslant |U| \leqslant Cu^{\delta}$.

В [1] было показано, что условие (α_{μ}) на алгебру X влечет условие $(\alpha_{w\mu})$ для любого регулярного веса w (с другими параметрами, вообще говоря).

Как и в [1], аналоги классов Харди мы будем определять не по алгебре X, а по некоторому w^*-замкнутому подпространству Y в $L^{\infty}(\mu)$, являющемуся X-модулем. Именно, если w – регулярный вес, то в качестве подпространства типа Харди в $L^p(w\mu)$ (в обозначениях п. 1 следовало бы писать $L^p_{w^{-1/p}}(\mu)$) мы рассматриваем замыкание пространства $Y \cap L^p(w\mu)$ в $L^p(w\mu)$. Обозначение: $Y^{p,w}$.

3. Теперь сформулируем результаты заметки. Пусть $E_1, \dots, E_N$ – совместимый набор банаховых пространств, а F_j для каждого j – замкнутое подпространство в E_j. Пусть $f \in F_1 + \dots + F_N$. Линейное отображение $T : E_1 + \dots + E_N \to F_1 + \dots + F_N$ называется частичной ретракцией, фиксирующей вектор f, если $Tf = f$ и оператор T действует непрерывно из E_j в F_j при всех j.

Для применений в теории интерполяции важны случаи, когда частичная ретракция может быть построена по любому вектору f, причем нормы $\|T\|_{E_j \to F_j}$ ограничены константой, не зависящей от f. Тогда все интерполяционные свойства набора $E_1, \dots, E_N$ наследуются набором $F_1, \dots, F_N$. В качестве примера можно предложить следствие 2.1 в [3] (в случае пар пространств) и его доказательство.

Если такая равномерная ограниченность имеет место, будем говорить, что $F_1, \dots, F_N$ – ретрактная подсистема системы $E_1, \dots, E_N$.

Пусть теперь $w_1, \dots, w_N$ – регулярные веса на пространстве S. По техническим причинам (из-за общности ситуации) предположим также, что $w_j^{-1} \in \mathcal{L}_+$ при всех j. По лемме 7 в [1], тогда веса w_j^{-1} тоже регулярны.

Теорема 1. 1) *Пусть* $1 \leqslant p \leqslant \infty$. *Тогда система* $(Y^{p,w_1}, \dots, Y^{p,w_N})$ *есть ректрактная подсистема в наборе* $(L^p(w_1\mu), \dots, L^p(w_N\mu))$.

2) *То же справедливо для системы подпространств* $(Y, Y^{1,w_1}, \dots, Y^{1,w_N})$ *в наборе* $(L^\infty(\mu), L^1(w_1\mu), \dots, L^1(w_N\mu))$.

Мы докажем только утверждение 2), поскольку утверждение 1) при $p < +\infty$ получается из него интерполяцией, а при $p = \infty$ надо действовать практически так же, как и во фрагменте доказательства теоремы 1 в [2], относящемся к случаю $p = \infty$. Необходимые изменения минимальны и лежат в русле того, что будет описано ниже, но они проще.

4. Доказательство утверждения 2) теоремы 1. Это тоже делается более или менее так же, как теорема B доказывалась в статье [2]. Однако мы хотим исправить допущенную там неточность и провести более полные вычисления.

В [1] было установлено, что сумма и произведение конечного числа регулярных весов тоже регулярны. То же самое верно для поточечного максимума, поскольку он сравним с суммой, и для положительной степени любого регулярного веса. Дополнительно, нам понадобится еще одно свойство.

Лемма 1. *Пусть* u_1 *и* u_2 *– регулярные веса, причем* $u_1^{-1} \in \mathcal{L}_+$. *Тогда вес* $u = \min(u_1, u_2)$ *регулярен.*

Доказательство. Имеем

$$\min(u_1, u_2) = \big[\max(u_1^{-1}, u_2^{-1})\big]^{-1} \asymp (u_1^{-1} + u_2^{-1})^{-1} = u_1 u_2 (u_1 + u_2)^{-1}.$$

Заметим, что $(u_1+u_2)^{-1} \in \mathcal{L}_+$ по условию (поскольку $0 \leqslant (u_1+u_2)^{-1} \leqslant u_1^{-1} \in \mathcal{L}_+$), а тогда вес $(u_1+u_2)^{-1}$ регулярен по лемме 7 в [1], так что мы имеем дело с произведением трех регулярных весов. □

Итак, пусть $f \in Y + Y^{1,w_1} + \dots + Y^{1,w_N}$. Нам нужно построить оператор T на сумме $L^\infty + L^1(w_1\mu) + \dots + L^1(w_N\mu)$, фиксирующий функцию f и ограниченный из L^∞ в Y и из $L^1(w_j\mu)$ в Y^{1,w_j}, $1 \leqslant j \leqslant N$, с константой, не зависящей от f.

Прежде всего, введем вспомогательный регулярный строго положительный вес $w_0 \in L^1(\mu)$ так, чтобы $w_0 \leqslant \min\{w_1, \dots, w_N\}$. (Заметим, что в этой общности не ясно, можно ли добиться того, чтобы $w_0^{-1} \in \mathcal{L}_+$, но мы обойдемся без этого условия.) Этот вес строится так. Поскольку мера μ σ-конечна, существует всюду положительная функция g из $L^1(\mu)$. По лемме 9 в [2] найдется регулярный вес $u \geqslant g$ такой, что $\|u\|_{L^1(\mu)} \leqslant C\|g\|_{L^1(\mu)}$. По лемме 1 в настоящей заметке, можно взять $w_0 = \min(u, w_1, \dots, w_N)$.

В дальнейшем будет существенно, что $|f|^{1/2}\chi_{\{|f|>\lambda\}} \in L^1(w_0\mu)$ при всех $\lambda > 0$. Аналогичное включение, в принципе, может нарушаться для любого из исходных весов $w_1, \dots, w_N$.[1]

Предложение 1 (разбиение единицы)**.** *Пусть*

$$a_{k,j} = \min\Big\{\Big(\frac{2^k w_j}{w_0}\Big)^8, \Big(\frac{w_0}{2^k w_j}\Big)^4\Big\}, \quad 1 \leqslant j \leqslant N, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Тогда существуют функции $\psi_{k,j} \in X$ такие, что при каждом j выполняются соотношения $\sum_k \psi_{k,j} = 1$ и $|\psi_{k,j}| \leqslant C a_{k,j}$. Постоянная C зависит лишь от весов $w_0, w_1, \dots, w_N$.

Доказательство практически повторяет доказательство теоремы 6 в [1]. Надо только заметить, что все a_{kj} – регулярные веса, причем параметры r, δ и C из определения регулярного веса можно считать для них одинаковыми. Регулярность получается примерно как в лемме 1:

$$a_{k,j} \asymp \frac{(2^k w_j)^8 (w_0)^4}{2^{8k} w_j^{16} + w_0^{12}},$$

числитель и знаменатель регулярны, а $(2^{8k} w_j^{16} + w_0^{12})^{-1} \in \mathcal{L}_+$. По поводу контроля за параметрами см. [1].

[1]Упомянутый ранее дефект изложения в [2] состоит в том, что вспомогательный вес обсуждался, но был забыт при вычислениях.

Отметим еще, что
$$0 \leqslant a_{k,j} \leqslant 1 \quad \text{и} \quad \sum_k a_{k,j}^{1/4} \leqslant C \tag{1}$$
равномерно по j. Первое неравенство здесь очевидно, второе фактически доказано в лемме 1 в [2]. Впрочем, похожее вычисление в несколько иной ситуации будет проделано ниже (см. лемму 2).

Второй нужный нам факт непосредственно следует из леммы 4 в [1] и свойств регулярных весов.

Предложение 2. *Пусть u – регулярный вес, и пусть $\alpha \in L^{1/2}(ud\mu)$, $\alpha \geqslant 0$. Найдутся натуральное число l и постоянная C (зависящие только от параметров в определении регулярного веса; в частности, не зависящие от α) такие, что существует функция Φ из X со следующими свойствами:*
$$|\Phi| \leqslant C\bigl(1+\alpha^{1/l}\bigr)^{-2l}, \quad \|1-\Phi\|_{L^{1/2}(ud\mu)} \leqslant C\|\alpha\|_{L^{1/2}(ud\mu)}.$$

Применим предложение 2 следующим образом. Пусть $\lambda > 0$, $\alpha = (\max\{1, (\lambda^{-1}|f|)^{1/l}\} - 1)^l$. Веса $w_0 a_{k_1,1}^{1/2} \dots a_{k_N,N}^{1/2}$ регулярны с одинаковыми параметрами для всех наборов $(k_1, \dots, k_N)$ (см. лемму 6 в [1]). Из предложения 2 получаем, что существуют функции $\Phi^{(\lambda)} = \Phi^{(\lambda)}_{k_1,\dots,k_N}$ из X, удовлетворяющие условиям:
$$|\Phi^{(\lambda)}| \leqslant C(1+\alpha^{1/l})^{-2l}$$
и
$$\|1-\Phi^{(\lambda)}\|_{L^{1/2}(w_0 a_{k_1,1}^{1/2} \dots a_{k_N,N}^{1/2}\mu)} \leqslant C\Bigl(\int_S |\alpha|^{1/2} w_0 a_{k_1,1}^{1/2} \dots a_{k_N,N}^{1/2} d\mu\Bigr)^2.$$

Теперь напишем
$$\begin{aligned} f\psi_{k_1,1}\cdots\psi_{k_N,N} &= \Phi^{(\lambda)} f\psi_{k_1,1}\cdots\psi_{k_N,N} + (1-\Phi^{(\lambda)})(f\psi_{k_1,1}\cdots\psi_{k_N,N}) \\ &\stackrel{\text{def}}{=} g^{(\lambda)}_{k_1,\dots,k_N} + h^{(\lambda)}_{k_1,\dots,k_N} \end{aligned}$$
и оценим слагаемые по отдельности. Первое допускает поточечную оценку
$$\begin{aligned} |g^{(\lambda)}_{k_1,\dots,k_N}| &\leqslant C|\psi_{k_1,1}|\dots|\psi_{k_N,N}|\,|f| \min\Bigl(1, \frac{\lambda^2}{|f|^2}\Bigr) \\ &= C\lambda|\psi_{k_1,1}|\dots|\psi_{k_N,N}| \min\Bigl\{\frac{|f|}{\lambda}, \frac{\lambda}{|f|}\Bigr\}. \end{aligned}$$

Второе слагаемое оценим в пространстве $L^{1/2}(w_0\mu)$:

$$\int\limits_S |h^{(\lambda)}_{k_1,\dots,k_N}|^{1/2} w_0\,d\mu \leqslant C\int\limits_S |1-\Phi^{(\lambda)}|^{1/2}|f|^{1/2}a^{1/2}_{k_1,1}\dots a^{1/2}_{k_N,N}w_0\,d\mu$$
$$= \int\limits_{|f|>\lambda}\dots + \int\limits_{|f|\leqslant\lambda}\dots = I_1 + I_2.$$

Первый интеграл, разумеется, не превосходит величины

$$C\int\limits_{|f|>\lambda}|f|^{1/2}a^{1/2}_{k_1,1}\dots a^{1/2}_{k_N,N}w_0 d\mu.$$

Второй мажорируется той же величиной:

$$I_2 \leqslant \lambda^{1/2}\int\limits_S |1-\Phi^{(\lambda)}|^{1/2}a^{1/2}_{k_1,1}\dots a^{1/2}_{k_N,N}w_0 d\mu$$
$$\leqslant C\lambda^{1/2}\int\limits_S \alpha^{1/2}a^{1/2}_{k_1,1}\dots a^{1/2}_{k_N,N}w_0 d\mu$$
$$\leqslant C\lambda^{1/2}\int\limits_{|f|>\lambda}\Big(\frac{|f|}{\lambda}\Big)^{1/2}a^{1/2}_{k_1,1}\dots a^{1/2}_{k_N,N}w_0 d\mu.$$

Множитель $\lambda^{1/2}$ сокращается, и мы получаем требуемое.

Теперь положим $\lambda = 2^n$ $(n\in\mathbb{Z})$ и будем писать индекс n у соответствующих функций внизу (вместо индекса 2^n наверху):

$$f\psi_{k_1,1}\dots\psi_{k_N,N} = g_{n;k_1,\dots,k_N} + h_{n;k_1,\dots,k_N},$$

где

$$|g_{n;k_1,\dots,k_N}| \leqslant C2^n|\psi_{k_1,1}|\dots|\psi_{k_N,N}|\min\Big\{\frac{|f|}{2^n},\frac{2^n}{|f|}\Big\}$$

и

$$\|h_{n;k_1,\dots,k_N}\|_{L^{1/2}(a^{1/2}_{k_1,1}\dots a^{1/2}_{k_N,N}w_0 d\mu)} \leqslant C\int\limits_{|f|>2^n}|f|^{1/2}a^{1/2}_{k_1,1}\dots a^{1/2}_{k_N,N}w_0 d\mu.$$

После этого введем функции $\varphi_{n,k_1,\dots,k_N} = g_{n+1;k_1,\dots,k_N} - g_{n;k_1,\dots,k_N}$. Легко видеть (см. формулу (3) ниже), что

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}}\varphi_{n,k_1,\dots,k_N} = f\psi_{k_1,1}\dots\psi_{k_N,N} \tag{2}$$

для любого набора индексов $k_1, \dots, k_N \in \mathbb{Z}$, причем сходимость абсолютная.

С другой стороны, одновременно

$$|\varphi_{n,k_1,\dots,k_N}| \leqslant C2^n |\psi_{k_1,1}| \dots |\psi_{k_N,N}| \min\left\{\frac{|f|}{2^n}, \frac{2^n}{|f|}\right\} \tag{3}$$

и

$$\int\limits_S |\varphi_{n,k_1,\dots,k_N}|^{1/2} w_0 d\mu \leqslant C \int\limits_{|f|>2^n} |f|^{1/2} a_{k_1,1}^{1/2} \dots a_{k_N,N}^{1/2} w_0 d\mu. \tag{4}$$

Теперь все готово к тому, чтобы определить частичную ретракцию T. Пусть $\Omega_n = \{|f| > 2^n\}$; для $g \in L^\infty + L^1(w_1\mu) + \dots + L^1(w_N\mu)$ положим

$$T_{n;k_1,\dots,k_N}(g) = \frac{\int\limits_{\Omega_n} \operatorname{sign}(f) g |f|^{-1/2} a_{k_1,1}^{1/2} \dots a_{k_N,N}^{1/2} w_0 d\mu}{\int\limits_{\Omega_n} |f|^{1/2} a_{k_1,1}^{1/2} \dots a_{k_N,N}^{1/2} w_0 d\mu}.$$

Если $\mu(\Omega_n) = 0$, считаем это частное равным нулю. Наконец, пусть

$$T(g) = \sum_{n,k_1,\dots,k_N \in \mathbb{Z}} T_{n;k_1,\dots,k_N}(g) \varphi_{n,k_1,\dots,k_N}.$$

Из формулы (2) и предложения 1 (см. еще формулу (1)) вытекает, что $Tf = f$ (заметим, что $\varphi_{n,k_1,\dots,k_N} = 0$, если $\mu(\Omega_n) = 0$). Осталось проверить ограниченность оператора T во всех пространствах L^∞ и $L^1(w_j\mu)$. Действительно, из (3) и аналога граничного принципа максимума модуля, доказанного в [1], нетрудно усмотреть, что

$$\varphi_{n,k_1,\dots,k_N} \in Y \cap Y^{1,w_1} \cap \dots \cap Y^{1,w_N},$$

так что оценки, проведенные ниже при доказательстве ограниченности, показывают также, что $T(L^\infty) \subset Y$ и $T(L^1(w_j\mu)) \subset Y^{1,w_j}$, $j = 1, \dots, N$.

Сначала рассмотрим пространство L^∞: пусть $\|g\|_{L^\infty(\mu)} \leqslant 1$, тогда

$$|T_{n;k_1,\dots,k_N}(g)| \leqslant \|g\|_{L^\infty(\mu)} \frac{\int\limits_{\Omega_n} |f|^{-1} |f|^{1/2} a_{k_1,1}^{1/2} \dots a_{k_N,N}^{1/2} w_0 d\mu}{\int\limits_{\Omega_n} |f|^{1/2} a_{k_1,1}^{1/2} \dots a_{k_N,N}^{1/2} w_0 d\mu} \leqslant 2^{-n}.$$

Поэтому

$$|T(g)| \leqslant \sum_{k_1,\dots,k_N\in\mathbb{Z}} |\psi_{k_1,1}|\dots|\psi_{k_N,N}| \sum_{n\in\mathbb{Z}} \min\left\{\frac{|f|}{2^n}, \frac{2^n}{|f|}\right\} \leqslant C$$

в силу предложения 1, формулы (1) и простых вычислений.

Для доказательства случая L^1-метрики потребуется следующее утверждение.

Лемма 2. *При всех $j = 1,\dots,N$ справедливо неравенство*

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} 2^{-k} a_{k,j}^{1/2} w_0 \leqslant C w_j.$$

Доказательство. Для $t\in\mathbb{Z}$ положим $e_t = \{2^t \leqslant \frac{w_j}{w_0} < 2^{t+1}\}$. Таким образом, $w_j \asymp 2^t w_0$ на множестве e_t. Имеем, вспомнив определение функций $a_{k,j}$:

$$\begin{aligned}
\sum_{k\in\mathbb{Z}} 2^{-k} a_{k,j}^{1/2} w_0 &\leqslant C \sum_{k\in\mathbb{Z}}\sum_{t\in\mathbb{Z}} \chi_{e_t} 2^{-k} a_{k,j}^{1/2} 2^{-t} w_j \\
&\leqslant C w_j \sum_{k\in\mathbb{Z}} \Big(\sum_{t\leqslant -k} 2^{-k}2^{-t}(2^k 2^t)^4 \chi_{e_t} + \sum_{t>-k} 2^{-k}(2^{-k}2^{-t})^2 2^t \chi_{e_t} \Big) \\
&= C w_j \sum_{t\in\mathbb{Z}} \Big(\sum_{k\geqslant -t} 2^{3k}2^{3t}\chi_{e_t} + \sum_{k<-t} 2^{-3k}2^{-3t}\chi_{e_t} \Big) \\
&\leqslant C' w_j \sum_{t\in\mathbb{Z}} \chi_{e_t} = C' w_j.
\end{aligned}$$

□

Теперь фиксируем j и докажем, что оператор T непрерывно отображает пространство $L^1(w_j\mu)$ в себя. В силу симметрии, можем считать, что $j=1$. Из определения функций $a_{k,j}$ (см. предложение 1 и формулу (1)) следует, что $a_{k,j}\leqslant 1$, поэтому, в частности, $a_{k,1}^{1/2} \leqslant a_{k,1}^{1/4} \leqslant \frac{w_0}{2^k w_1}$, $k\in\mathbb{Z}$; иначе говоря, $a_{k,1}^{1/2} w_1 \leqslant 2^{-k} w_0$.

Поэтому в силу формулы (3)

$$\begin{aligned}
|\varphi_{n,k_1,\dots,k_N}|^{1/2} w_1 \leqslant C 2^{n/2} w_1 |a_{k_1,1}|^{1/2} \dots |a_{k_N,N}|^{1/2} \min\left(\frac{|f|}{2^n}, \frac{2^n}{|f|}\right)^{1/2} \\
\leqslant C 2^{n/2} 2^{-k_1} w_0.
\end{aligned}$$

Взяв $g \in L^1(w_1\mu)$, можем написать

$$\int\limits_S |T(g)|w_1 d\mu \leqslant \sum_{n,k_1,\dots,k_N\in\mathbb{Z}} |T_{n,k_1,\dots,k_N}(g)| \int\limits_S |\varphi_{n,k_1,\dots,k_N}|w_1 d\mu$$
$$\leqslant C \sum_{n,k_1,\dots,k_N\in\mathbb{Z}} |T_{n,k_1,\dots,k_N}(g)|2^{n/2}2^{-k_1} \int\limits_S |\varphi_{n,k_1,\dots,k_N}|^{1/2} w_0 d\mu.$$

Теперь продолжаем оценку, пользуясь неравенством (4):

$$\dots \leqslant C \sum_{n,k_1,\dots,k_N\in\mathbb{Z}} 2^{n/2}2^{-k_1}|T_{n,k_1,\dots,k_N}(g)| \int\limits_{\Omega_n} |f|^{1/2} a_{k_1,1}^{1/2} \dots a_{k_N,N}^{1/2} w_0 d\mu$$
$$\leqslant C \sum_{n,k_1,\dots,k_n\in\mathbb{Z}} 2^{n/2}2^{-k_1} \int\limits_{\Omega_n} |g|\,|f|^{-1/2} a_{k_1,1}^{1/2} \dots a_{k_N,N}^{1/2} w_0 d\mu.$$

Пользуясь леммой 2 и тем, что $\sum\limits_s a_{s,j}^{1/2} \leqslant C$ при всех $j = 1, \dots, N$ (см. формулу (1)), получаем:

$$\int\limits_S |T(g)|w_1\, d\mu \leqslant C \sum_{n\in\mathbb{Z}} 2^{n/2} \int\limits_{\Omega_n} |g|\,|f|^{-1/2} w_1\, d\mu.$$

Правую часть в последнем неравентсве перепишем так:

$$\dots = C \int\limits_S |g| \sum_{n\in\mathbb{Z}} 2^{n/2}\chi_{\Omega_n}|f|^{-1/2} w_1\, d\mu.$$

Это то, что нам нужно, поскольку

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} 2^{n/2}\chi_{\Omega_n}|f|^{-1/2} = \sum_{n\in\mathbb{Z}}\sum_{s\geqslant n} 2^{n/2}\chi_{\Omega_s\setminus\Omega_{s+1}}|f|^{-1/2}$$
$$= \sum_{s\in\mathbb{Z}}\sum_{n\leqslant s} 2^{n/2}|f|^{-1/2}\chi_{\Omega_s\setminus\Omega_{s+1}} \leqslant C\sum_{s\in\mathbb{Z}} \chi_{\Omega_s\setminus\Omega_{s+1}} \leqslant C. \qquad \square$$

Замечание. Похожими, но более простыми вычислениями можно доказать, что оператор T непрерывен в пространстве $L^1(w_0\mu)$.

Список литературы

1. В. А. Боровицкий, С. В. Кисляков, *Интерполяция абстрактных пространств типа Харди.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **503** (2021), 25–56.
2. S. Kisliakov, Q. Xu, *Partial retractions for weighted Hardy spaces.* — Studia Math. **138**, No. 3 (2000), 251–264.

3. S. Kisliakov, *Interpolation of Hardy spaces: some recent developments.* – Israel Math. Conf. Proc. **13** (1999), 102–140.

Kislyakov S. V. Partial retractions for abstract Hardy-type spaces.

The existence of partial retractions is proved for Hardy-type spaces in the framework of a recent abstract approach by Borovitskiy and the author. The starting point for this abstract construction is a certain uniform algebra more general than a w^*-Dirichlet algebra.

С.-Петербургское отделение Математического института им. В. А. Стеклова РАН
Фонтанка 27, 191023, С.-Петербург, Россия
E-mail: skis@pdmi.ras.ru

Поступило 14 ноября 2023 г.