Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 527, 2023 г.

Л. Н. Ихсанов

ТЕОРЕМЫ ТИПА ПАЛТАНИ, ИЛИ ОБ ОЦЕНКАХ ПРИБЛИЖЕНИЯ ПОЛОЖИТЕЛЬНЫМИ ДИСКРЕТНЫМИ ФУНКЦИОНАЛАМИ

Введение

Определения и обозначения. Обозначим через Ω множество, состоящее из пар (Y,γ), где $Y\subset\mathbb{R}$ – не более чем счётное множество, не имеющее точек сгущения на $\mathbb{R}$, содержащее по крайней мере два элемента, а $\gamma : Y\to(0,\infty)$, причём

$$\sum_{y\in Y}\gamma(y)|y|<\infty. \tag{1}$$

Через $I(Y)$ обозначим множество $[\inf Y,\sup Y]\cap\mathbb{R}$.

Через $\mathcal{F}(Y,\gamma)$ обозначим множество вещественнозначных функций, определённых на $I(Y)$, для которых

$$\sum_{y\in Y}\gamma(y)|f(y)|<\infty.$$

Кроме этого, мы будем пользоваться обозначениями $e_0(t)=1, e_1(t)=t$. Обращаем внимание, что $e_0,e_1\in\mathcal{F}(Y,\gamma)$ для любой пары $(Y,\gamma)\in\Omega$. Здесь же заметим, что если

$$F:\mathcal{F}(Y,\gamma)\to\mathbb{R},\quad F(f)=\sum_{y\in Y}\gamma(y)f(y),\quad x=\frac{F(e_1)}{F(e_0)},$$

то $x\in(\inf Y,\sup Y)$.

Напоминаем, что величина

$$\omega_2(f,h)=\sup_{\substack{x\in I,\\ 0\leqslant t\leqslant h,\\ x\pm t\in I}}|f(x-t)-2f(x)+f(x+t)|,$$

где $h>0$, называется вторым модулем непрерывности функции f на множестве I с шагом h.

Ключевые слова: положительные операторы, второй модуль непрерывности.

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект No. 18-11-00055).

Отрезок $[a, b]$, где $a > b$, считаем пустым множеством.

Историческая справка. В серии статей, объединённых в книге [1], Палтаня получил неравенство

$$\|B_n f - f\| \leqslant \omega_2 \left(f, \frac{1}{\sqrt{n}} \right),$$

где f – произвольная ограниченная на отрезке $[0, 1]$ функция, а равномерная норма $\| \cdot \|$ и второй модуль непрерывности берутся на этом же отрезке, B_n – оператор Бернштейна:

$$B_n f(x) = \sum_{i=0}^{n} C_n^i x^i (1-x)^{n-i} f \left(\frac{i}{n} \right).$$

Отметим, что константа 1 перед величиной $\omega_2 \left(f, \frac{1}{\sqrt{n}} \right)$ в этом неравенстве точна для любого натурального n, а порядок шага $\frac{1}{\sqrt{n}}$ не улучшаем. Доказательство строилось на проверке условий его результата (теорема A) о погрешности приближения дискретным положительным функционалом. Для формулировки этого результата нам потребуется следующее определение.

Пусть множество Y конечно. Будем говорить, что пара (u, v) принадлежит множеству $M_{x,h}$, если найдутся $k \in \mathbb{N}$ и такие наборы $u_0, \ldots, u_{k+1} \in I$, $y_0, \ldots, y_k \in Y$, что

$$\begin{gathered} y_0 < u_0 = x < y_1 < u_1 < \ldots < y_k < u_k = u < u_{k+1} = v, \\ u_i - h \leqslant y_i \quad \text{для } 0 \leqslant i \leqslant k, \\ u_{i+1} = y_i + 2^s (u_i - y_i) \quad \text{для } 0 \leqslant i \leqslant k, \\ \text{где} \quad s = \min\{r \in \mathbb{N} | 2^r (u_i - y_i) > h\}, \quad \max Y - y_k > 2h. \end{gathered}$$

Теорема A. *Пусть $h > 0$, $(Y, \gamma) \in \Omega$, причём множество Y конечно,*

$$F : \mathcal{F}(Y, \gamma) \to \mathbb{R}, \quad F(f) = \sum_{y \in Y} \gamma(y) f(y),$$

а точка x определена равенством $F(e_1 - x e_0) = 0$, причём

$$(-\infty, x - h) \cap Y = \varnothing.$$

Если $\max\limits_{y_1, y_2 \in Y} |y_1 - y_2| \leqslant 2h$, то

$$|F(f) - F(e_0) f(x)| \leqslant F(e_0) \omega_2(f, h),$$

где второй модуль непрерывности берётся на множестве $I(Y)$. Иначе достаточно потребовать, чтобы

$$\sum_{y\in Y\cap(u,\infty)\cap[v-h,\infty)} \gamma(y)(v-y) \geqslant 0, \quad (u,v)\in M_{x,h}.$$

В работе [2] мы обобщили результат Палтани относительно полиномов Бернштейна, заменив величины $f\left(\frac{i}{n}\right)$ абстрактными функционалами. В дальнейшем мы планируем получить аналогичные результаты для различных сумматорных операторов. Настоящая работа посвящена результатам, обобщающим и развивающим идеи теоремы A.

Основные результаты работы таковы.

Теорема 1. *Пусть $h>0$, $(Y,\gamma)\in\Omega$, причём $Y\cap(-\infty,x-h)=\varnothing$,*

$$F:\mathcal{F}(Y,\gamma)\to\mathbb{R}, \quad F(f)=\sum_{y\in Y}\gamma(y)f(y), \quad x=\frac{F(e_1)}{F(e_0)},$$

и существует множество $Y^*\subset Y$, такое что

$$(Y\setminus Y^*)\cap(x+h,\infty)=Y^*\cap\left(x-\frac{3}{4}h, x-\frac{h}{2}\right)=\varnothing.$$

Кроме того, выполняются следующие условия:

1) $$\sum_{y\in Y^*}\gamma(y)(x-y)>0,$$

2) $$\sum_{y\in Y^*\cap[\max\{z-h,x\},\infty)}\gamma(y)(z-y)\geqslant 0, \quad z\in\left[x+\frac{3}{4}h, x+\frac{5}{4}h\right),$$

3) $$\sum_{y\in Y^*\cap\left[z-\frac{h}{2},\infty\right)}\gamma(y)(z-y)\geqslant 0, \quad z\in\left[x+\frac{5}{4}h, \sup Y\right),$$

Тогда

$$|F(f)-f(x)F(e_0)|\leqslant F(e_0)\omega_2(f,h), \quad f\in\mathcal{F}(Y,\gamma),$$

где второй модуль непрерывности берётся на множестве $I(Y)$.

Теорема 2. *Пусть $h>0$, $(Y,\gamma)\in\Omega$,*

$$F:\mathcal{F}(Y,\gamma)\to\mathbb{R}, \quad F(f)=\sum_{y\in Y}\gamma(y)f(y), \quad x=\frac{F(e_1)}{F(e_0)},$$

и существуют непересекающиеся множества $Y_+ \subset Y \cap [x-h, \infty)$, $Y_- \subset Y \cap (-\infty, x+h]$, *такие что*

$$(Y \setminus Y_+) \cap (x+h, \infty) = Y_+ \cap \left(x - \frac{3}{4}h, x - \frac{h}{2}\right) = \varnothing,$$

$$(Y \setminus Y_-) \cap (-\infty, x+h] = Y_- \cap \left(x + \frac{h}{2}, x + \frac{3}{4}h\right) = \varnothing.$$

Кроме того, выполняются следующие условия:

1.1) $\displaystyle\sum_{y \in Y_+} \gamma(y)(x-y) > 0,$

1.2) $\displaystyle\sum_{y \in Y_-} \gamma(y)(x-y) < 0,$

2.1) $\displaystyle\sum_{y \in Y_+ \cap [\max\{z-h, x\}, \infty)} \gamma(y)(z-y) \geqslant 0, \quad z \in \left[x + \frac{3}{4}h, x + \frac{5}{4}h\right),$

2.2) $\displaystyle\sum_{y \in Y_- \cap (-\infty, \min\{z+h, x\}]} \gamma(y)(z-y) \leqslant 0, \quad z \in \left(x - \frac{5}{4}h, x - \frac{3}{4}h\right],$

3.1) $\displaystyle\sum_{y \in Y_+ \cap \left[z - \frac{h}{2}, \infty\right)} \gamma(y)(z-y) \geqslant 0, \quad z \in \left[x + \frac{5}{4}h, \sup Y\right),$

3.2) $\displaystyle\sum_{y \in Y_- \cap \left[-\infty, z + \frac{h}{2}\right]} \gamma(y)(z-y) \leqslant 0, \quad z \in \left(\inf Y, x - \frac{5}{4}h\right].$

Тогда

$$|F(f) - f(x)F(e_0)| \leqslant F(e_0)\omega_2(f, h), \quad f \in \mathcal{F}(Y, \gamma),$$

где второй модуль непрерывности берётся на множестве $I(Y)$.

Леммы

Далее I – отрезок или луч, $f : I \to \mathbb{R}$, второй модуль непрерывности берётся по I. В этом разделе мы даём вспомогательные результаты, необходимые для доказательства теорем.

Для начала приведём общеизвестный результат:

$$\left| f(x) - \frac{b-x}{b-a} f(a) - \frac{x-a}{b-a} f(b) \right| \leqslant \omega_2\left(f, \frac{b-a}{2}\right), \tag{2}$$

где $x \in [a, b] \subset I$.

Лемма 1. *Пусть $h > 0$, $a, b, a + 2h \in I$, причём $b - a \in (0, h]$. Тогда существует такая точка $x^* \in \left(b + \frac{h}{2}, a + 2h\right]$, что*

$$\left| f(x^*) - \frac{b - x^*}{b - a} f(a) - \frac{x^* - a}{b - a} f(b) \right| \leqslant \frac{x^* - b}{b - a} \omega_2(f, h). \tag{3}$$

При этом, если

$$b - a \in \left(0, \frac{h}{2}\right] \cup \left[\frac{3}{4}h, h\right],$$

то такая точка найдётся на отрезке $\left[b + \frac{3}{4}h, a + 2h\right]$.

Доказательство. Обе части неравенства (3) инварианты относительно линейной добавки. Поэтому достаточно доказать лемму для функции

$$g(x) = f(x) - \frac{x - a}{b - a} f(b) - \frac{b - x}{b - a} f(a).$$

Поскольку

$$g(a) = g(b) = 0, \quad \omega_2(g, \cdot) = \omega_2(f, \cdot),$$

неравенство принимает вид

$$|g(x^*)| \leqslant \frac{x^* - b}{b - a} \omega_2(g, h).$$

Пусть $n \in \mathbb{N}_0$ – такое число, что $b - a \in \left(\frac{h}{2^{n+1}}, \frac{h}{2^n}\right]$. Для начала покажем, что

$$|g(b + (2^{n+1} - 1)(b - a))| \leqslant (2^{n+1} - 1)\omega_2(g, h). \tag{4}$$

Доказательство проведём по индукции. Для $n = 0$ имеем

$$|g(b + (b - a))| = |g(a) - 2g(b) + g(b + (b - a))| \leqslant \omega_2(g, h).$$

Пусть утверждение верно для $n - 1$. Тогда

$$\begin{aligned}
&|g(b + (2^{n+1} - 1)(b - a))| \\
&= |g(a) - 2g(b + (2^n - 1)(b - a)) + 2g(b + (2^n - 1)(b - a)) + g(b + (2^{n+1} - 1)(b - a))| \\
&\leqslant |g(a) - 2g(b + (2^n - 1)(b - a)) + g(b + (2^{n+1} - 1)(b - a))| + 2|g(b + (2^n - 1)(b - a))| \\
&\qquad \leqslant \omega_2(g, h) + 2(2^n - 1)\omega_2(g, h) = (2^{n+1} - 1)\omega_2(g, h).
\end{aligned}$$

Теперь обозначим $x^* = b + (2^{n+1} - 1)(b - a)$. Поскольку

$$\frac{x^* - b}{b - a} = 2^{n+1} - 1,$$

неравенство (4) принимает вид

$$|g(x^*)| \leqslant \frac{x^* - b}{b - a}\omega_2(g, h).$$

Далее, по построению,

$$b + \frac{h}{2} \leqslant b + \frac{2^{n+1} - 1}{2^{n+1}}h < x^* = a + 2^{n+1}(b - a) \leqslant a + 2h.$$

Проверим, что точка x^* находится в требуемом промежутке. В самом деле, если $n = 0$ и $\frac{3}{4}h \leqslant b - a \leqslant h$, то $x^* = 2b - a \geqslant b + \frac{3}{4}h$, а если $n > 0$, то $x^* \geqslant b + \frac{2^{n+1}-1}{2^{n+1}}h \geqslant b + \frac{3}{4}h$. $\square$

Следующая лемма была доказана автором в работе [2] и представляет собой модификацию теоремы A.

Лемма 2. *Пусть $h > 0$, $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$, $Y \subset [0, 1]$ – конечное множество,*

$$F = \sum_{y \in Y} \gamma(y) f(y),$$

а точка x определена равенством

$$F(e_1 - xe_0) = 0.$$

Пусть найдётся такое множество $Z \subset (0, 1)$, а для каждого $z \in Z$ такие непересекающиеся непустые множества $I(z), J(z) \subset Y$ со свойством

$$y_1 < z \leqslant y_2 \quad \text{при } y_1 \in I(z) \ \text{ и } y_2 \in J(z),$$

что выполнены следующие условия:

1) *$x \in Z$, причём $I(x) \cup J(x) = Y$,*

2) *для любого $z \in Z$ выполнено неравенство*

$$\sum_{y \in I(z) \cup J(z)} \gamma(y)(z - y) \geqslant 0,$$

3) *для любого $z \in Z$ и для любого $y_1 \in I(z)$ выполнено хотя бы одно из двух: или*

$$\left| \frac{y_2 - z}{y_2 - y_1} f(y_1) + \frac{z - y_1}{y_2 - y_1} f(y_2) - f(z) \right| \leqslant \omega_2(f, h), \quad y_2 \in J(z), \qquad (5)$$

или найдётся такая точка $z^* \in Z$, что $I(z^*), J(z^*) \subset J(z)$,

$$\left| \frac{y_2 - z}{y_2 - y_1} f(y_1) + \frac{z - y_1}{y_2 - y_1} f(y_2) - f(z) \right| \leqslant \omega_2(f, h), \quad y_2 \in J(z) \backslash J(z^*), \ (6)$$

и

$$\left|\frac{z-z^*}{z-y_1}f(y_1)+\frac{z^*-y_1}{z-y_1}f(z)-f(z^*)\right|\leqslant\frac{z^*-z}{z-y_1}\omega_2(f,h). \tag{7}$$

Тогда

$$|F(f)-F(e_0)f(x)|\leqslant F(e_0)\omega_2(f,h).$$

При доказательстве теоремы мы будем использовать следующий результат, основанный на леммах 1 и 2.

Лемма 3. *Пусть* $h>0$, $(Y,\gamma)\in\Omega$,

$$F:\mathcal{F}(Y,\gamma)\to\mathbb{R},\quad F=\sum_{y\in Y}\gamma(y)f(y),\quad x=\frac{F(e_1)}{F(e_0)}$$

и выполняются следующие условия:

1) $$y\in Y\cap(-\infty,x)\Rightarrow x-y\in\left(0,\frac{h}{2}\right]\cup\left[\frac{3}{4}h,h\right], \tag{8}$$

2) $$\sum_{y\in Y\cap[\max\{z-h,x\},\infty)}\gamma(y)(z-y)\geqslant 0\quad\forall z\in\left[x+\frac{3}{4}h,x+\frac{5}{4}h\right), \tag{9}$$

3) $$\sum_{y\in Y\cap\left[z-\frac{h}{2},\infty\right)}\gamma(y)(z-y)\geqslant 0\quad\forall z\in\left[x+\frac{5}{4}h,\sup Y\right), \tag{10}$$

Тогда

$$|F(f)-F(e_0)f(x)|\leqslant F(e_0)\omega_2(f,h)\quad\forall f\in\mathcal{F}(Y,\gamma),$$

где второй модуль непрерывности берётся на множестве $I(Y)$.

Доказательство. Пусть множество Y конечно. Не умаляя общности можно считать, что $I=[0,1]$, так как иначе мы можем прибегнуть к помощи сжатия и сдвига. Проверим условия леммы 2. В качестве множества Z возьмём $\{x\}\cup\left[x+\frac{3}{4}h,\max Y\right)$. Определим множества $I(z)$ и $J(z)$ следующим образом:

$$J(z)=\{y\in Y|\,y\geqslant z\},$$

$$I(z)=\begin{cases}\{y\in Y|y<x\}, & z=x,\\ \{y\in Y|y\in[\max\{z-h,x\},z)\}, & z\in\left[x+\frac{3}{4}h,x+\frac{5}{4}h\right),\\ \{y\in Y|y\in\left[z-\frac{h}{2},z\right)\}, & z\in\left[x+\frac{5}{4}h,\max Y\right).\end{cases}$$

Эти множества не пусты в силу условий (9), (10) и того факта, что $\min Y<x<\max Y$.

Первое условие леммы 2 выполнено по построению.

Выполнение второго условия легко следует из (9) и (10), а для точки x оно выполнено по определению.

Разберём выполнение третьего условия.

Пусть для каких-то z и y из $I(z)$ не выполнено неравенство (5). Это означает, что $y+2h<\max Y$, иначе свойство (5) следовало бы из (2). Покажем, что тогда найдётся необходимая точка $z^*\in Z$. Поскольку $z-y\in(0,h]$, точка z^* со свойством (7) существует согласно лемме 1, а в силу (8) и того, что $y+2h<\max Y$, выполнено $z^*\in Z$. При этом, если $z\neq x$, то $z^*\geqslant z+\frac{h}{2}\geqslant x+\frac{5}{4}h$, а в случае $z=x$ имеем $z^*\geqslant x+\frac{3}{4}h$ в силу условия (8). Таким образом, $I(z^*)\subset J(z)$. Условие $J(z^*)\subset J(z)$ выполнено по построению. Условие (6) при этом выполняется в силу неравенства (2), поскольку $z^*-y\leqslant 2h$. Таким образом, мы проверили все условия леммы 2, что завершает доказательство в том случае, если Y конечно.

Теперь пусть множество Y счётно и $I=[0,\infty)$ (иначе прибегнем к сдвигу), $\varepsilon>0$, $f\in\mathcal{F}(Y,\gamma)$. В силу условия (1) и определения множества $\mathcal{F}(Y,\gamma)$ существует такое число $b_\varepsilon>x$, а с ним и множество $Y_\varepsilon=Y\cap[0,b_\varepsilon]$, что

$$\sum_{y\in Y\setminus Y_\varepsilon}\gamma(y)|f(y)|,\qquad \sum_{y\in Y\setminus Y_\varepsilon}\gamma(y)y,\qquad \sum_{y\in Y\setminus Y_\varepsilon}\gamma(y)<\varepsilon. \tag{11}$$

Обозначим

$$\lambda_\varepsilon=\frac{\sum\limits_{y\in Y_\varepsilon\cap[x,b_\varepsilon]}\gamma(y)(y-x)}{\sum\limits_{y\in Y\cap[0,x)}\gamma(y)(x-y)},$$

$$\gamma_\varepsilon(y)=\begin{cases}\lambda_\varepsilon\gamma(y), & y\in Y_\varepsilon, y<x,\\ \gamma(y), & y\in Y_\varepsilon, y\geqslant x,\end{cases}$$

$$F_\varepsilon(f)=\sum_{y\in Y_\varepsilon}\gamma_\varepsilon(y)f(y).$$

Несложно видеть, что функция γ_ε отображает множество Y_ε в $(0,\infty)$ и совпадает с γ на множестве $Y_\varepsilon\cap[x,b_\varepsilon]$. Кроме того, в силу формул

(11) и оценки

$$\lambda_\varepsilon = \frac{\sum\limits_{y\in Y_\varepsilon\cap[x,b_\varepsilon]}\gamma(y)(y-x)}{\sum\limits_{y\in Y\cap[0,x)}\gamma(y)(x-y)} = \frac{\sum\limits_{y\in Y_\varepsilon\cap[x,b_\varepsilon]}\gamma(y)(y-x)}{\sum\limits_{y\in Y\cap[x,\infty)}\gamma(y)(y-x)}$$

$$= 1-\frac{\sum\limits_{y\in Y\setminus Y_\varepsilon}\gamma(y)(y-x)}{\sum\limits_{y\in Y\cap[x,\infty)}\gamma(y)(y-x)} \geqslant 1-\varepsilon C_1(Y,\gamma),$$

где $C_1(Y,\gamma)$ – положительная константа, не зависящая от ε, имеем

$$|F(e_0)-F_\varepsilon(e_0)|,\quad |F(e_1)-F_\varepsilon(e_1)|,\quad |F(f)-F_\varepsilon(f)|\leqslant \varepsilon C_2(f,Y,\gamma),$$

где $C_2(f,Y,\gamma)$ – положительная константа, не зависящая от ε. Также несложно убедится, что

$$x=\frac{F_\varepsilon(e_1)}{F_\varepsilon(e_0)}.$$

Для функционала F_ε выполняются условия леммы, и, поскольку, множество Y_ε конечно, по доказанному

$$\begin{aligned}
&|F(f)-f(x)F(e_0)|\\
&\quad = |F(f)-F_\varepsilon(f)-f(x)F(e_0)+f(x)F_\varepsilon(e_0)+F_\varepsilon(f)-f(x)F_\varepsilon(e_0)|\\
&\quad \leqslant |F(f)-F_\varepsilon(f)|+|f(x)|\cdot|F(e_0)-F_\varepsilon(e_0)|+|F_\varepsilon(f)-f(x)F_\varepsilon(e_0)|\\
&\quad \leqslant \varepsilon C_3(f,Y,\gamma)+F_\varepsilon(e_0)\omega_2(f,h)\\
&\quad \leqslant \varepsilon(C_3(f,Y,\gamma)+C_2(f,Y,\gamma)\omega_2(f,h))+F(e_0)\omega_2(f,h),
\end{aligned}$$

где $C_3(f,Y,\gamma)$ – положительная константа, не зависящая от ε, из чего следует требуемое. □

Следствие 1. *Пусть* $h>0$, $(Y,\gamma)\in\Omega$,

$$F:\mathcal{F}(Y,\gamma)\to\mathbb{R},\quad F=\sum_{y\in Y}\gamma(y)f(y),\quad x=\frac{F(e_1)}{F(e_0)},$$

и выполняются следующие условия:

1) $y\in Y\cap(x,\infty)\Rightarrow y-x\in\left(0,\dfrac{h}{2}\right]\cup\left[\dfrac{3}{4}h,h\right]$,

2) $\displaystyle\sum_{y\in Y\cap(-\infty,\min\{z+h,x\}]}\gamma(y)(z-y)\leqslant 0,\quad z\in\left(x-\frac{5}{4}h,x-\frac{3}{4}h\right]$,

3) $$\sum_{y\in Y\cap\left(-\infty,z+\frac{h}{2}\right]} \gamma(y)(z-y)\leqslant 0,\quad z\in\left(\inf Y, x-\frac{5}{4}h\right],$$

Тогда

$$|F(f)-F(e_0)f(x)|\leqslant F(e_0)\omega_2(f,h),\quad f\in\mathcal{F}(Y,\gamma),$$

где второй модуль непрерывности берётся на множестве $I(Y)$.

Доказательство. Доказательство сразу следует из леммы 3, если воспользоваться симметрией. □

Доказательство теорем

Доказательство теоремы 1. Обозначим

$$\lambda=\frac{\sum\limits_{y\in Y^*\cap[x,\infty)}\gamma(y)(y-x)}{\sum\limits_{y\in Y^*\cap[x-h,x)}\gamma(y)(x-y)},$$

$$\gamma^*:Y^*\to(0,\infty),\quad \gamma^*(y)=\begin{cases}\lambda\gamma(y), & y<x,\\ \gamma(y), & y\geqslant x.\end{cases}$$

Обращаем внимание, что $0<\lambda<1$. Это следует из того, что условие 1) можно переписать в виде

$$\sum_{y\in Y^*\cap[x-h,x)}\gamma(y)(x-y)>\sum_{y\in Y^*\cap[x,\infty)}\gamma(y)(y-x).$$

Обозначим также

$$Y_0=Y\setminus(Y^*\cap[x,\infty))$$

$$\gamma_0:Y_0\to(0,\infty),\quad \gamma_0(y)=\begin{cases}(1-\lambda)\gamma(y), & y\in Y^*\cap[x-h,x),\\ \gamma(y), & y\in(Y\setminus Y^*)\cap[x-h,x+h],\end{cases}$$

$$F^*(f)=\sum_{y\in Y^*}\gamma^*(y)f(y),\quad F_0(f)=\sum_{y\in Y_0}\gamma_0(y)f(y).$$

Поскольку $F=F^*+F_0$, достаточно доказать, что

$$|F^*(f)-F^*(e_0)f(x)|\leqslant F^*(e_0)\omega_2(f,h), \tag{12}$$

$$|F_0(f)-F_0(e_0)f(x)|\leqslant F_0(e_0)\omega_2(f,h). \tag{13}$$

Начнём с неравенства (12). Проверим условия леммы 3. Несложно убедиться, что $(Y^*,\gamma^*)\in\Omega$, $x=\frac{F^*(e_1)}{F^*(e_0)}$ и $f\in\mathcal{F}(Y^*,\gamma^*)$. Условие **1**) леммы 3 следует из условия на множество Y^*, а условия **2**) и **3**) леммы 3 следуют из условий **2**) и **3**) теоремы.

Перейдём к проверке неравенства (13). Воспользуемся теоремой A. Поскольку $Y_0\subset[x-h,x+h]$, множество Y_0 конечно. Докажем, что оно содержит по крайней мере два элемента. Если

$$(Y\setminus Y^*)\cap[x,x+h]=\varnothing,$$

то

$$\begin{aligned}\sum_{y\in Y^*\cap[x,\infty)}\gamma(y)(y-x)&=\sum_{y\in Y\cap[x,\infty)}\gamma(y)(y-x)\\&=\sum_{y\in Y\cap[x-h,x)}\gamma(y)(x-y)\geqslant\sum_{y\in Y^*\cap[x-h,x)}\gamma(y)(x-y),\end{aligned}$$

что противоречит условию **1**) теоремы. Следовательно, существует элемент $y_1\in(Y\setminus Y^*)\cap[x,x+h]\subset Y_0$. Как уже отмечалось, $\inf Y<x<\sup Y$. Следовательно, найдётся элемент $y_2\in Y\cap[x-h,x)\subset Y_0$.

Таким образом, $(Y_0,\gamma_0)\in\Omega$, что завершает доказательство. $\square$

При помощи симметрии из теоремы 1 сразу вытекает такой факт.

Следствие 2. *Пусть $h>0$, $(Y,\gamma)\in\Omega$, причём $Y\cap(x+h,\infty)=\varnothing$,*

$$F:\mathcal{F}(Y,\gamma)\to\mathbb{R},\quad F(f)=\sum_{y\in Y}\gamma(y)f(y),\quad x=\frac{F(e_1)}{F(e_0)},$$

и существует множество $Y^*\subset Y$, такое что

$$(Y\setminus Y^*)\cap(-\infty,x-h)=Y^*\cap\left(x+\frac{h}{2},x+\frac{3}{4}h\right)=\varnothing.$$

Кроме того, пусть выполняются следующие условия:

1) $\displaystyle\sum_{y\in Y^*}\gamma(y)(x-y)<0,$

2) $\displaystyle\sum_{y\in Y^*\cap(-\infty,\min\{z+h,x\}]}\gamma(y)(z-y)\leqslant 0,\quad z\in\left[x-\frac{5}{4}h,x-\frac{3}{4}h\right),$

3) $\displaystyle\sum_{y\in Y^*\cap\left(-\infty,z-\frac{h}{2}\right]}\gamma(y)(z-y)\leqslant 0,\quad z\in\left(-\infty,x-\frac{5}{4}h\right].$

Тогда

$$|F(f) - f(x)F(e_0)| \leqslant F(e_0)\omega_2\,(f,h)\,, \quad f \in \mathcal{F}(Y,\gamma),$$

где второй модуль непрерывности берётся на множестве $I(Y)$.

Доказательство теоремы 2. Обозначим

$$\lambda = \frac{\sum\limits_{y\in Y_+\cap[x,\infty)} \gamma(y)(y-x)}{\sum\limits_{y\in Y_+\cap[x-h,x)} \gamma(y)(x-y)},$$

$$\gamma_+ : Y_+ \to (0,\infty), \quad \gamma_+(y) = \begin{cases} \lambda\gamma(y), & y < x, \\ \gamma(y), & y \geqslant x. \end{cases}$$

Обращаем внимание, что $0 < \lambda < 1$. Обозначим также

$$\widetilde{Y} = Y \setminus (Y_+ \cap [x,\infty))$$

$$\widetilde{\gamma} : \widetilde{Y} \to (0,\infty), \quad \widetilde{\gamma}(y) = \begin{cases} (1-\lambda)\gamma(y), & y \in Y_+ \cap [x-h,x), \\ \gamma(y), & y \in (Y \setminus Y_+) \cap [x-h,x+h], \end{cases}$$

$$F_+(f) = \sum_{y\in Y_+} \gamma_+(y)f(y), \quad \widetilde{F}(f) = \sum_{y\in\widetilde{Y}} \widetilde{\gamma}(y)f(y).$$

Поскольку $F = F_+ + \widetilde{F}$, достаточно доказать, что

$$|F_+(f) - F_+(e_0)f(x)| \leqslant F_+(e_0)\omega_2(f,h), \tag{14}$$

$$|\widetilde{F}(f) - \widetilde{F}(e_0)f(x)| \leqslant \widetilde{F}(e_0)\omega_2(f,h). \tag{15}$$

Неравенство (14) проверяется при помощи леммы 3 аналогично предыдущему доказательству. Столь же легко повторить доказательство того, что $(\widetilde{Y},\widetilde{\gamma}) \in \Omega$. Неравенство (15) выполняется в силу следствия из теоремы 1, где в качестве множества Y^* выступает Y_-.

□

Список литературы

1. R. Paltanea, *Approximation theory using positive linear operators.* Boston, Birkhäuser (2004).
2. Л. Н. Ихсанов, *Точная оценка приближения абстрактными операторами типа Канторовича через второй модуль непрерывности.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **491** 66–93 (2020).

Ikhsanov L. N. Paltanea type theorems on estimation by positive discrete functionals.

The article is concerned with inequalities of the type

$$|F(f) - F(e_0)f(x)| \leqslant F(e_0)\omega_2(f, h),$$

there F is a functional of the form $F(f) = \sum\limits_{y \in Y} \gamma(y)f(y)$, and Y is an at most countable set with no accumulation points on $\mathbb{R}$, $\gamma : Y \to (0, \infty)$.

Санкт-Петербургский
Государственный Университет,
Университетская наб., Д.7/9,
199034 Санкт-Петербург, Россия
E-mail: `lv.ikhs@gmail.com`

Поступило 2 ноября 2022 г.