Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 527, 2023 г.

Е. С. Дубцов

ОБРАТНЫЕ МЕРЫ КАРЛЕСОНА ДЛЯ ПРОСТРАНСТВ ХАРДИ В ЕДИНИЧНОМ ШАРЕ

§1. Введение

Пусть B_d обозначает открытый единичный шар из $\mathbb{C}^d$, $d \geqslant 1$, и $\sigma = \sigma_d$ обозначает нормированную меру Лебега на единичной сфере ∂B_d. Для единичного круга B_1, меры σ_1 и единичной окружности ∂B_1 также будут использоваться символы $\mathbb{D}$, m и $\partial\mathbb{D}$ соответственно.

Пусть $\mathcal{H}ol(B_d)$ обозначает пространство голоморфных функций в шаре B_d. Для $0 < p < \infty$ пространство Харди $H^p = H^p(B_d)$ состоит из функций $f \in \mathcal{H}ol(B_d)$ таких, что

$$\|f\|_{H^p}^p = \sup_{0<r<1} \int\limits_{\partial B_d} |f(r\zeta)|^p \, d\sigma(\zeta) < \infty.$$

Как обычно, пространство Харди $H^p(B_d)$, $p > 0$, отождествляется с пространством $H^p(\partial B_d)$, которое состоит из соответствующих граничных значений. Дальнейшие детали о пространствах $H^p(B_d)$ и смежных объектах содержатся, например, в монографиях [8] и [10].

1.1. Меры Карлесона. Пусть $M_+(B_d)$ обозначает пространство конечных положительных борелевских мер, заданных на шаре B_d. Сначала предположим, что $d = 1$ и $\mu \in M_+(\mathbb{D})$. Классическая теорема Карлесона [3] утверждает, что $H^p(\mathbb{D})$ вкладывается в $L^p(\mathbb{D}, \mu)$, т.е. существует константа $C > 0$ такая, что

$$\|f\|_{L^p(\mathbb{D},\mu)} \leqslant C\|f\|_{H^p} \quad \text{для всех } f \in H^p, \tag{1.1}$$

тогда и только тогда, когда мера μ удовлетворяет следующему условию Карлесона: существует константа $C > 0$ такая, что

$$\mu(S_I) \leqslant Cm(I) \quad \text{для всех дуг } I \subset \partial\mathbb{D}, \tag{1.2}$$

Ключевые слова: пространства Харди, обратные меры Карлесона, пространства де Бранжа–Ровняка.

Исследования выполнены за счет гранта Российского научного фонда No. 19-11-00058, `https://rscf.ru/project/19-11-00058/`.

где
$$S_I = \left\{ z \in \overline{\mathbb{D}}:\ 1 - m(I) \leqslant |z| \leqslant 1,\ \frac{z}{|z|} \in I \right\}.$$

В случае произвольной размерности $d \geqslant 1$ рассмотрим множества
$$Q = Q(\zeta, \delta) = \{\xi \in \partial B_d : |1 - \langle \zeta, \xi \rangle| \leqslant \delta\}, \quad \zeta \in \partial B_d,\ \delta > 0.$$
Отметим, что Q является замкнутым шаром относительно неизотропной метрики
$$\rho(\zeta, \xi) = |1 - \langle \zeta, \xi \rangle|^{\frac{1}{2}}, \quad \zeta, \xi \in \partial B_d.$$
Для $r > 0$ и $Q = Q(\zeta, \delta)$ по определению полагаем $rQ = Q(\zeta, r\delta)$.

В силу теоремы о мерах Карлесона для пространств Харди в шаре (см., например, [10, гл. 5]) оценка
$$\|f\|_{L^p(B_d, \mu)} \leqslant C\|f\|_{H^p}, \quad f \in H^p, \tag{1.3}$$
эквивалентна следующему условию на меру μ:
$$\mu(S_Q) \leqslant C\sigma(Q) \quad \text{для всех неизотропных шаров } Q \subset \partial B_d, \tag{1.4}$$
где
$$S_Q = \left\{ z \in B_d :\ 1 - \sigma(Q) \leqslant |z| \leqslant 1,\ \frac{z}{|z|} \in Q \right\}$$
— это стандартное окно Карлесона.

1.2. Обратные меры Карлесона. Отметим, что Д. Люкинг [7] исследовал меры Карлесона для пространств Бергмана в круге вместе с мерами, для которых выполнено соответствующее обратное неравенство. В случае нескольких комплексных переменных упомянем недавние смежные результаты А. Грина и Н. Вагнера [4] о доминирующих множествах для пространств Бергмана на весьма общих областях из $\mathbb{C}^d$.

В первой части настоящей работы исследуется обратное неравенство Карлесона
$$\|f\|_{H^p} \leqslant C\|f\|_{L^p(\overline{B}_d, \mu)}, \quad f \in C(\overline{B}_d) \cap H^p(B_d),\ 1 < p < \infty, \tag{1.5}$$
для $\mu \in M_+(\overline{B}_d)$.

Отметим, что в сформулированной задаче предполагается, что мера μ задана на замкнутом шаре $\overline{B}_d$. На самом деле, для мер $\mu \in M_+(B_d)$ эта задача становится вырожденной и не имеет решений; см. сформулированную ниже теорему 1.

Заметим, что теорему о мерах Карлесона для $H^p(B_d)$ также можно формулировать при предположении $\mu \in M_+(\overline{B}_d)$. Действительно, в этом случае условие (1.3) имеет смысл для функций f из множества $C(\overline{B}_d) \cap H^p(B_d)$, которое является плотным в $H^p(B_d)$. Из условия (1.4) следует, что сужение $\mu_{|\partial B_d}$ абсолютно непрерывно относительно меры Лебега σ и производная Радона–Никодима $d\mu_{|\partial B_d}/d\sigma$ ограничена.

Для $d = 1$ и меры $\mu \in M_+(\overline{\mathbb{D}})$, удовлетворяющей условию (1.2), П. Лефевр, Д. Ли и др. [6] доказали, что свойство (1.5) эквивалентно условию

$$\mu(S_I) \geqslant Cm(I) \quad \text{для всех дуг } I \subset \partial\mathbb{D}.$$

Далее, в работе [5] этот результат доказан для всех $\mu \in M_+(\overline{\mathbb{D}})$, а также получены иные эквивалентные свойства.

Основной результат настоящей работы об обратных мерах Карлесона для пространств Харди $H^p(B_d)$ при $d \geqslant 1$ — это теорема 1, сформулированная в следующем разделе.

1.3. Обратные меры Карлесона для пространств Харди в шаре. Пусть $1 < p < \infty$. Для $w \in B_d$ рассмотрим ядра Коши

$$k_w(z) = \frac{1}{(1 - \langle z, w\rangle)^d}, \quad z \in B_d,$$

и соответствующие нормированные функции

$$K_w = \frac{k_w}{\|k_w\|_{H^p}}.$$

Предложение 1.4.10 из [8] гарантирует, что

$$\|k_w\|_p = (1 - |w|^2)^{-\frac{d}{q}}, \quad \text{где } \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

Для $d = 1$ следующий результат получен в работе [5].

Теорема 1. *Пусть $1 < p < \infty$ и $\mu \in M_+(\overline{B}_d)$, $d \geqslant 1$. Тогда перечисленные ниже утверждения эквивалентны.*

(i) *Существует константа $C > 0$ такая, что*

$$\int\limits_{\overline{B}_d} |f|^p \, d\mu \geqslant C\|f\|^p_{H^p} \quad \text{для всех } f \in C(\overline{B}_d) \cap H^p.$$

(ii) *Существует константа $C > 0$ такая, что*

$$\int\limits_{\overline{B}_d} |K_w|^p \, d\mu \geqslant C \quad \textit{для всех } w \in B_d.$$

(iii) *Существует константа $C > 0$ такая, что*

$$\mu(Q) \geqslant C\sigma(Q) \quad \textit{для всех неизотропных шаров } Q \subset \partial B_d.$$

Выше упоминалось, что задача об обратных мерах Карлесона для $H^p(B_d)$, $1 < p < \infty$, не имеет решений для мер μ, заданных на открытом единичном шаре B_d. Действительно, этот факт немедленно следует из свойства (iii) в теореме 1. Дальнейшие комментарии и доказательство теоремы 1 приведены в разделе 2.

1.4. Обратные меры Карлесона для пространств де Бранжа–Ровняка. Второй тип пространств, исследуемых в данной работе, — это пространства де Бранжа–Ровняка в шаре.

Пусть $b : B_d \to \mathbb{D}$ является голоморфной функцией. Непосредственная проверка показывает, что функция

$$\mathcal{K}^b(z, w) = \frac{1 - b(z)\overline{b(w)}}{(1 - \langle z, w \rangle)^d}, \quad z, w \in B_d,$$

имеет свойства воспроизводящего ядра. Обладающее воспроизводящим ядром $\mathcal{K}^b(z, w)$ гильбертово пространство $\mathcal{H}(b) \subset H^2$ называется пространством де Бранжа–Ровняка. Дальнейшие сведения об этих пространствах в круге приведены, например, в монографии [9].

С одной стороны, если $\|b\|_\infty < 1$, то пространство $\mathcal{H}(b)$ совпадает с H^2, с точностью до эквивалентной нормы. С другой стороны, пространство $\mathcal{H}(b)$ имеет явный вид для внутренней функции b. Напомним, что голоморфная функция $I : B_d \to \mathbb{D}$ называется *внутренней*, если $|I(\zeta)| = 1$ для σ_d-почти всех $\zeta \in \partial B_d$. Здесь и далее $I(\zeta)$ обозначает, как обычно, предел $\lim_{r \to 1-} I(r\zeta)$. Известно, что соответствующий предел существует σ_d-почти везде. Прямые вычисления воспроизводящего ядра для пространства $H^2 \ominus IH^2$ показывают, что $\mathcal{H}(b) = H^2 \ominus IH^2$. Если I — внутренняя функция в круге $\mathbb{D}$, то $H^2(\mathbb{D}) \ominus IH^2(\mathbb{D})$ — классическое модельное пространство.

Ряд результатов об обратных мерах Карлесона для пространств $\mathcal{H}(b)$ в круге получен в статье [2]. Для некоторых функций b в этой работе получены описания рассматриваемых мер и, в частности, показано, что обратное неравенство Карлесона достаточно проверять на соответствующих воспроизводящих ядрах. Для произвольных пространств $\mathcal{H}(b)$ в круге известно, что такой тезис о воспроизводящих ядрах не имеет места (см. [5]).

В заключительном разделе 3 настоящей работы аналог свойства (ii) из теоремы 1 используется при доказательстве свойств обратных мер Карлесона для пространств де Бранжа–Ровняка $\mathcal{H}(b)$ в единичном шаре. Результаты в этом направлении получены для невнутренних функций b и содержатся в теореме 2 и следствии 1, см. раздел 3.

Обозначения. Как обычно, $C > 0$ обозначает константу, значение которой может изменяться от строки к строке.

§2. Обратные меры Карлесона для пространств Харди

В данном разделе доказана теорема 1 и приведено еще одно описание исследуемых мер в терминах стандартных окон Карлесона S_Q, см. предложение 1 ниже.

2.1. Вспомогательные результаты. Для $0 < h \leqslant 1$ и неизотропного шара Q зададим h-окно Карлесона $S_{Q,h}$ с помощью равенства

$$S_{Q,h} = \left\{ z \in B_d :\ 1-h \leqslant |z| \leqslant 1,\ \frac{z}{|z|} \in Q \right\}. \tag{2.1}$$

Пусть $\nu = \nu_d$ обозначает меру Лебега на пространстве $\mathbb{C}^d$.

Лемма 1. *Пусть $Q \subset \partial B_d$ является неизотропным шаром. Для $0 < h \leqslant 1$ положим*

$$\Phi_h(z) = \frac{1}{h} \int\limits_{S_{Q,h}} \frac{(1-|w|^2)^{pd-d}}{|1-\langle z, w\rangle|^{pd}}\, d\nu(w), \quad z \in \overline{B}_d. \tag{2.2}$$

Тогда

(a) $\Phi_h(z) \leqslant C$ *для всех* $z \in \overline{B}_d$ *и* $0 < h \leqslant 1$;
(b) $\lim_{h\to 0} \Phi_h(z) = 0$ *для всех* $z \in \overline{B}_d \setminus Q$.

Доказательство. (a) Очевидно, что

$$\Phi_h(z) \leqslant \frac{1}{h} \int\limits_{1-h\leqslant|w|\leqslant 1} \frac{(1-|w|^2)^{pd-d}}{|1-\langle z,w\rangle|^{pd}}\, d\nu(w), \quad z\in B_d.$$

Далее, интегрируя в полярных координатах, имеем

$$\begin{aligned}\Phi_h(z) &\leqslant C(d)\frac{1}{h}\int\limits_{1-h}^{1}(1-r^2)^{pd-d}\int\limits_{\partial B_d}\frac{d\sigma(\xi)}{|1-r\langle z,\xi\rangle|^{pd}}\,dr\\ &\leqslant C(d)\frac{1}{h}\int\limits_{1-h}^{1}(1-r^2)^{pd-d}(1-r|z|)^{d-pd}\,dr\\ &\leqslant C(d)\frac{1}{h}\int\limits_{1-h}^{1}dr \leqslant C(d)\end{aligned}$$

в силу предложения 1.4.10 из монографии [8].

(b) Пусть $z\notin Q$. Тогда существует число $\delta=\delta(z)>0$ такое, что $|1-\langle z,w\rangle|\geqslant\delta$ для всех $w\in S_{Q,h}$, $0<h\leqslant 1$. Следовательно,

$$\begin{aligned}0\leqslant\Phi_h(z) &\leqslant \frac{1}{h}\int\limits_{S_{Q,h}}\frac{(1-|w|^2)^{pd-d}}{\delta^{pd}}d\nu(w)\\ &\leqslant C\frac{1}{h}\frac{\sigma(Q)h^{pd-d+1}}{\delta^{pd}}\to 0 \quad \text{при } h\to 0+\,.\end{aligned}$$

Доказательство леммы завершено. □

2.2. Доказательство теоремы 1. (i) ⇒ (ii) Эта импликация является тривиальной, так как $\|K_w\|_{H^p}=1$, $w\in B_d$.

(ii) ⇒ (iii) Зафиксируем неизотропный шар $Q\subset\partial B_d$. Интегрируя оценку из условия (ii) по множеству

$$\widetilde{S}_{Q,h}=\left\{z\in B_d:\ 1-h\leqslant|z|<1,\ \frac{z}{|z|}\in Q\right\}, \quad 0<h\leqslant 1,$$

относительно меры ν, имеем

$$C_{\mathrm{ii}}|Q|h \leqslant \int\limits_{\widetilde{S}_{Q,h}} \int\limits_{\overline{B}_d} |K_w|^p \, d\mu \, d\nu(w)$$

$$= \int\limits_{\overline{B}_d} \int\limits_{\widetilde{S}_{Q,h}} \frac{(1-|w|^2)^{\frac{pd}{q}}}{|1-\langle z,w\rangle|^{pd}} \, d\nu(w) \, d\mu(z).$$

Последнее выражение не изменяется при замене во внутреннем интеграле множества $\widetilde{S}_{Q,h}$ на $S_{Q,h}$. Таким образом, полученная оценка имеет следующий вид в терминах функции Φ_h, заданной равенством (2.2):

$$\int\limits_{\overline{B}_d} \Phi_h(z) \, d\mu(z) \geqslant C_{\mathrm{ii}}\sigma(Q). \tag{2.3}$$

С одной стороны, свойства (a) и (b) из леммы 1 гарантируют, что

$$\lim_{h\to 0+} \int\limits_{\overline{B}_d \setminus Q} \Phi_h(z) \, d\mu(z) = 0. \tag{2.4}$$

С другой стороны, в силу свойства (b) из леммы 1 имеем

$$\int\limits_{Q} \Phi_h(z) \, d\mu(z) \leqslant C\mu(Q) \quad \text{для всех } h > 0. \tag{2.5}$$

Применяя свойства (2.3)–(2.5), получаем

$$C\mu(Q) \geqslant C_{\mathrm{ii}}\sigma(Q),$$

что и требовалось доказать.

(iii) $\Rightarrow$ (i) Рассмотрим разложение Лебега

$$\mu_{|\partial B_d} = g\sigma + \mu^s_{|\partial B_d},$$

где $\mu^s_{|\partial B_d} \perp \sigma$ и $g \in L^1(\sigma)$ обозначает соответствующую производную Радона–Никодима. Теоремы 5.3.1 и 5.3.2 из монографии [8] гарантируют, что

$$g(\zeta) = \lim_{\delta\to 0+} \frac{\mu_{|\partial B_d}(Q(\zeta,\delta))}{\sigma(Q(\zeta,\delta))}$$

для σ-почти всех $\zeta \in \partial B_d$. Поэтому из условия (iii) следует, что $g \geqslant C > 0$ σ-почти везде. Таким образом,

$$\int\limits_{\overline{B}_d} |f|^p \, d\mu \geqslant \int\limits_{\partial B_d} |f|^p \, d\mu \geqslant C \int\limits_{\partial B_d} |f|^p \, d\sigma = C\|f\|^p_{H^p}$$

для всех $f \in H^p \cap C(\overline{B}_d)$. Доказательство теоремы 1 завершено.

2.3. Комментарии и замечания.

Замечание 1. Эквивалентность свойств (i) и (ii) в теореме 1 означает, что для доказательства обратного неравенство Карлесона достаточно проверить это неравенство на воспроизводящих ядрах k_w, $w \in B_d$. Иными словами, тезис о воспроизводящих ядрах выполнен для задачи об обратных мерах Карлесона для H^p, $1 < p < \infty$.

Замечание 2. С одной стороны, условие (iii) гарантирует, что заданная на сфере ∂B_d мера Лебега σ абсолютно непрерывна относительно сужения $\mu_{|\partial B_d}$. С другой стороны, как показано при доказательстве теоремы 1, производная Радона–Никодима $d\mu^a_{|\partial B_d}/d\sigma$ отделена от нуля положительной константой. Здесь $\mu^a_{|\partial B_d}$ обозначает абсолютно непрерывную (относительно σ) часть меры $\mu_{|\partial B_d}$.

Следующее утверждение показывает, что условие (iii) из теоремы 1 эквивалентно своему аналогу в терминах множеств S_Q, используемых при описании классических мер Карлесона.

Предложение 1. *Эквивалентные свойства из теоремы* 1 *равносильны следующему условию: существует константа* $C > 0$ *такая, что*

$$\mu(S_Q) \geqslant C\sigma(Q) \quad \text{для всех неизотропных шаров } Q \subset \partial B_d. \tag{2.6}$$

Доказательство. Очевидно, что свойство (iii) из теоремы 1 влечет (2.6). Для доказательства обратной импликации предположим, что выполнено свойство (2.6). Зафиксируем $\delta > 0$ и неизотропный шар $Q = Q(\zeta, \delta) \subset \partial B_d$ для некоторой точки $\zeta \in \partial B_d$. Для $0 < h < \delta$, выберем максимальное семейство попарно непересекающихся неизотропных шаров $Q_j = Q_j(\zeta_j, h) \subset 2Q$, $j = 1, \dots, J$. Отметим, что $Q \subset \cup_{1\leqslant j\leqslant J} 2Q_j$. Так как h-окно $S_{Q_j,h}$ совпадает с множеством S_{Q_j}

для $j = 1, \dots, J$, то условие (iii) гарантирует, что

$$\begin{aligned} \mu(S_{2Q,h}) &\geqslant \mu \sum_{j=1}^{J} S_{Q_j,h} = \sum_{j=1}^{J} \mu(S_{Q_j,h}) \\ &\overset{\text{(iii)}}{\geqslant} C \sum_{j=1}^{J} \sigma(Q_j) = C(d) \sum_{j=1}^{J} \sigma(2Q_j) \\ &\geqslant C(d)\sigma(Q) = C(d)\sigma(2Q). \end{aligned} \tag{2.7}$$

Если $Q \subset G \subset \overline{B}_d$ и множество G относительно открыто в $\overline{B}_d$, то $G \supset S_{Q,h}$ для достаточно малого параметра $h > 0$. Поэтому в силу формулы (2.7) для Q вместо $2Q$ и внешней регулярности рассматриваемой меры $\mu \in M_+(\overline{B}_d)$ имеем

$$\begin{aligned} \mu(Q) &= \inf\{\mu(G) : Q \subset G, \text{ множество } G \text{ открыто в } \overline{B}_d\} \\ &\geqslant \inf_{h>0} \mu(S_{Q,h}) \geqslant C(d)\sigma(Q), \end{aligned}$$

что и требовалось доказать. □

§3. Обратные меры Карлесона для пространств де Бранжа–Ровняка

В свойстве (1.5), определяющем обратную меру Карлесона μ для $H^p(B_d)$, норма $\|f\|_{L^p(\overline{B}_d,\mu)}$ вычисляется только для $f \in H^p(B_d) \cap C(\overline{B}_d)$. Для пространств $\mathcal{H}(b)$ будет использован иной подход, основанный на следующем понятии.

Определение 1. Пусть $\mu \in M_+(\overline{B}_d)$. Функция $f \in \mathcal{H}ol(B_d)$ называется μ-допустимой, если f имеет радиальные пределы μ-почти везде на сфере ∂B_d. Для голоморфной функции $b : B_d \to \mathbb{D}$ множество всех μ-допустимых функций из пространства $\mathcal{H}(b)$ обозначается символом $\mathcal{H}_\mu(b)$.

Предположим теперь, что $f \in \mathcal{H}_\mu(b)$. На носителе меры $\mu_{|\partial B_d}$ функция f задается с помощью радиальных пределов. В результате величина $\|f\|_{L^2(\overline{B}_d,\mu)}$ принимает значение в бесконечном интервале $[0, +\infty]$.

Определение 2. Пусть функция $b : B_d \to \mathbb{D}$ является голоморфной. Мера $\mu \in M_+(\overline{B}_d)$ называется обратной мерой Карлесона для пространства $\mathcal{H}(b)$, если

$$\|f\|_{\mathcal{H}(b)} \leqslant C\|f\|_{L^2(\overline{B}_d,\mu)}$$

для всех $f \in \mathcal{H}_\mu(b)$.

Основной результат данного раздела — следующая теорема о свойствах обратных мер Карлесона. Для $d = 1$ этот результат был доказан в работе [2].

Теорема 2. *Пусть $\mu \in M_+(\overline{B}_d)$ и $b : B_d \to \mathbb{D}$ — μ-допустимая голоморфная функция. Положим*

$$g = \frac{d\mu_{|\partial B_d}}{d\sigma}.$$

Предположим, что μ является обратной мерой Карлесона для пространства $\mathcal{H}(b)$. Тогда

$$1 - |b(\zeta)|^2 \leqslant C(1 - |b(\zeta)|^2)^2 g(\zeta) \tag{3.1}$$

для σ_d-почти всех точек $\zeta \in \partial B_d$ и универсальной константы $C > 0$.

С одной стороны, при $|b(\zeta)| = 1$ условие (3.1) не накладывает никаких ограничений на точку ζ. В частности, это условие полностью вырождается для внутренней функции b. С другой стороны, условие (3.1) естественным образом упрощается при $|b(\zeta)| < 1$ и дает следующую явную информацию.

Следствие 1. *Пусть $\mu \in M_+(\overline{B}_d)$ и $b : B_d \to \mathbb{D}$ — μ-допустимая голоморфная функция, которая не является внутренней. Предположим, что μ — обратная мера Карлесона для пространства $\mathcal{H}(b)$. Тогда*

$$\frac{d\mu_{|\partial B_d}}{d\sigma} \neq \mathbf{0}$$

и

$$\int\limits_{\{\zeta\in\partial B_d\colon |b(\zeta)|<1\}} \frac{1}{1-|b|}\, d\sigma < \infty. \tag{3.2}$$

Доказательство. Во-первых, в силу теоремы 2 имеет место неравенство (3.1), которое гарантирует, что $g \neq \mathbf{0}$, так как функция b не является внутренней. Во-вторых, из свойства (3.1) следует, что

$$\frac{1}{1 - |b(\xi)|} \leqslant C g(\xi)$$

для σ-почти всех $\xi \in \{\zeta \in \partial B_d : |b(\zeta)| < 1\}$. Так как $g \in L^1(\partial B_d, \sigma)$, то получаем искомое свойство (3.2). $\square$

Отметим, что свойство (3.2) накладывает ограничение на функции b такие, что множество обратных мер Карлесона для пространства $\mathcal{H}(b)$ не является пустым.

Следствие 2. *Существует голоморфная функция $b : B_d \to \mathbb{D}$, обладающая следующим свойством: если $\mu \in M_+(\overline{B}_d)$ и b является μ-допустимой, то μ не является обратной мерой Карлесона для пространства $\mathcal{H}(b)$.*

Доказательство. Выберем положительную функцию $\psi \in C(\partial B_d)$ такую, что $\psi(\zeta_0) = 1$, $0 < \psi(\zeta) < 1$ для $\zeta \in \partial B_d \setminus \{\zeta_0\}$ и

$$\int\limits_{\partial B_d} \frac{1}{1-\psi}\, d\sigma = \infty.$$

В силу следствия 2 из работы [1] существует голоморфная функция $b : B_d \to \mathbb{D}$ такая, что $|b| = \psi$ σ-почти везде на сфере ∂B_d. Таким образом, если $\mu \in M_+(\overline{B}_d)$ и функция b является μ-допустимой, то условие (3.2) не выполнено. Поэтому μ не является обратной мерой Карлесона для $\mathcal{H}(b)$ в силу следствия 1. $\square$

Далее, следствие 1 дает отрицательную информацию о последовательностях семплинга для $\mathcal{H}(b)$. Напомним, что последовательность $\{w_j\}_{j=1}^{\infty} \subset B_d$ называется последовательностью семплинга для $\mathcal{H}(b)$, если существуют константы $C_2 \geqslant C_1 > 0$ такие, что

$$C_1 \|f\|^2_{\mathcal{H}(b)} \leqslant \sum_{j=1}^{\infty} \frac{|f(w_j)|^2}{\|\mathcal{K}_{w_j}\|^2_{\mathcal{H}(b)}} \leqslant C_2 \|f\|^2_{\mathcal{H}(b)}$$

для всех $f \in \mathcal{H}(b)$. Для $d = 1$ следующее утверждение доказано в работе [2].

Следствие 3. *Пусть голоморфная функция $b : B_d \to \mathbb{D}$ не является внутренней. Тогда не существует последовательности семплинга для пространства $\mathcal{H}(b)$.*

Доказательство. Предположим, что $\{w_j\}_{j=1}^{\infty} \subset B_d$ является последовательностью семплинга для $\mathcal{H}(b)$. Тогда

$$\mu = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\delta_{w_j}}{\|\mathcal{K}_{w_j}\|^2_{\mathcal{H}(b)}}$$

является обратной мерой Карлесона для $\mathcal{H}(b)$. Это противоречит следствию 1, так как $d\mu_{|\partial B_d}/d\sigma = \mathbf{0}$. $\square$

Теперь обратимся к доказательству теоремы 2.

3.1. Вспомогательные результаты. Напомним, что для голоморфной функции $F : B_d \to \mathbb{D}$ граничная функция $F(\xi)$ определена для σ-почти всех $\xi \in \partial B_d$ в смысле радиальных пределов. Следующее утверждение уточняет лемму 1 при $p = 2$.

Лемма 2. *Пусть $Q \subset \partial B_d$ — неизотропный шар и $F : B_d \to \mathbb{D}$ — голоморфная функция. Тогда предел*

$$\lim_{r\to 1-} \int\limits_{Q} |F(r\xi)| \frac{(1-r^2)^d}{|1-\langle z, r\xi\rangle|^{2d}} d\sigma(\xi)$$

(a) *равен нулю для $z \in \overline{B}_d \setminus Q$,*
(b) *равен $|F(z)|$ для σ-почти всех z из внутренности множества Q.*

Доказательство. (a) Так как F — ограниченная функция, то достаточно применить часть (b) леммы 1 для $p = 2$.

(b) Пусть $\zeta \in \partial B_d$. Отметим, что

$$\lim_{r\to 1-} \int\limits_{\partial B_d \setminus \widetilde{Q}(\zeta,\tau)} \frac{(1-r^2)^d}{|1-\langle \zeta, r\xi\rangle|^{2d}} d\sigma(\xi) = 0,$$

где $\widetilde{Q}(\zeta,\tau) \subset \partial B_d$ — это неизотропный шар. Поэтому для доказательства свойства (b) достаточно проверить, что

$$\lim_{r\to 1-} \int\limits_{\partial B_d} |F(r\xi)| \frac{(1-r^2)^d}{|1-\langle \zeta, r\xi\rangle|^{2d}} d\sigma(\xi) = |F(\zeta)| \tag{3.3}$$

для σ-почти всех точек $\zeta \in \partial B_d$.

Для доказательства свойства (3.3) теперь предположим, что $\zeta \in \partial B_d$ является точкой Лебега для функции $F(\xi)$, т.е.

$$\lim_{\tau\to 0+} \int\limits_{\widetilde{Q}(\zeta,\tau)} |F(\xi) - F(\zeta)|\, d\sigma(\xi) = 0. \tag{3.4}$$

Рассмотрим интеграл Пуассона

$$u(w) = \int\limits_{\partial B_d} |F(\xi) - F(\zeta)| \frac{(1-|w|^2)^d}{|1-\langle w, \xi\rangle|^{2d}} d\sigma(\xi), \quad w \in B_d.$$

Отметим, что $\lim_{r\to 1-} u(r\zeta) = 0$ в силу равенства (3.4) и теоремы 5.4.8 из [8].

Функция $|F(w) - F(\zeta)|$, $w \in B_d$, является плюрисубгармонической, следовательно,

$$0 \leqslant \limsup_{r\to 1-} \int\limits_{\partial B_d} |F(r\xi) - F(\zeta)| \frac{(1-r^2)^d}{|1-\langle \zeta, r\xi\rangle|^{2d}}\, d\sigma(\xi)$$
$$\leqslant \limsup_{r\to 1-} \int\limits_{\partial B_d} u(r\xi) \frac{(1-r^2)^d}{|1-\langle r\zeta, \xi\rangle|^{2d}}\, d\sigma(\xi) = \limsup_{r\to 1-} u(r^2\zeta) = 0.$$

Имеем $||F(r\xi)| - |F(\zeta)|| \leqslant |F(r\xi) - F(\zeta)|$, поэтому полученная оценка гарантирует искомое свойство (3.3) в рассматриваемой точке $\zeta \in \partial B_d$. Для завершения рассуждения остается напомнить, что свойство (3.4) имеет место для σ-почти всех $\zeta \in \partial B_d$. □

3.2. Доказательство теоремы 2. Функция $\mathcal{K}_w^b$, $w \in B_d$, является μ-допустимой, так как b — это μ-допустимая функция по условию теоремы. Следовательно, по определению обратной меры Карлесона имеем

$$\|\mathcal{K}_w^b\|^2_{\mathcal{H}(b)} \leqslant C \|\mathcal{K}_w^b\|^2_{L^2(\mu)}$$

для всех $w \in B_d$. Переписывая это неравенство в явных терминах, получаем

$$\frac{1-|b(w)|^2}{(1-|w|^2)^d} \leqslant C \int\limits_{\overline{B}_d} \left| \frac{1-b(z)\overline{b(w)}}{(1-\langle z, w\rangle)^d} \right|^2 d\mu(z). \tag{3.5}$$

Рассмотрим разложение Лебега

$$\mu_{|\partial B_d} = g\sigma_d + \eta,$$

где $\eta \perp \mu_{|\partial B_d}$ и g обозначает производную Радона–Никодима $\frac{d\mu_{|\partial B_d}}{d\sigma_d}$. Положим

$$\rho := \mu_{|B_d} = \mu - g\sigma - \eta.$$

В этих терминах оценка (3.5) имеет следующий вид:

$$\begin{aligned}C(1-|b(w)|^2)\leqslant&\int\limits_{B_d}\frac{(1-|w|^2)^d}{|1-\langle z,w\rangle|^{2d}}|1-b(z)\overline{b(w)}|^2\,d\rho(z)\\&+\int\limits_{\partial B_d}\frac{(1-|w|^2)^d}{|1-\langle z,w\rangle|^{2d}}|1-b(z)\overline{b(w)}|^2\,d\eta(z)\\&+\int\limits_{\partial B_d}\frac{(1-|w|^2)^d}{|1-\langle z,w\rangle|^{2d}}|1-b(z)\overline{b(w)}|^2\,g(z)\,d\sigma_d(z)\\&:=J_1+J_2+J_3.\end{aligned}\tag{3.6}$$

Теперь выберем точку $\zeta\in\partial B_d$ и рассмотрим неизотропный шар $Q=(\zeta,\tau)\subset\partial B_d$, $\tau>0$. Напомним, что h-окно Карлесона $S_{Q,h}$ для $0<h\leqslant1$ задается с помощью равенства

$$S_{Q,h}=\left\{z\in B_d:\ 1-h\leqslant|z|\leqslant1,\ \frac{z}{|z|}\in Q\right\}.$$

Проинтегрируем обе части неравенства (3.6) по множеству $S_{Q,h}$ относительно объёмной меры Лебега ν, разделим на h и исследуем поведение полученных выражений при $h\to0+$.

Во-первых, для указанного интеграла от левой части неравенства (3.6) после интегрирования в полярных координатах имеем

$$\begin{aligned}&\frac{C}{h}\int\limits_{S_{Q,h}}(1-|b(w)|^2)\,d\nu(w)=\frac{C(d)}{h}\int\limits_{1-h}^{1}\int\limits_{Q}(1-|b(r\xi)|^2)\,d\sigma(\xi)\,r^{2d-1}dr\\&\quad\to C(d)\int\limits_{Q}(1-|b(\xi)|^2)\,d\sigma(\xi)\end{aligned}\tag{3.7}$$

при $h\to0$.

Во-вторых, применяя теорему Фубини, получаем

$$\begin{aligned}&\frac{C(d)}{h}\int\limits_{S_{Q,h}}J_1(w)\,d\nu(w)\\&=\int\limits_{B_d}\frac{1}{h}\int\limits_{1-h}^{1}\int\limits_{Q}\frac{(1-r^2)^d}{|1-\langle z,r\xi\rangle|^{2d}}|1-b(z)\overline{b(r\xi)}|^2\,d\sigma(\xi)\,r^{2d-1}dr\,d\rho(z).\end{aligned}$$

Заметим, что

$$\begin{aligned}\int\limits_Q \frac{(1-r^2)^d}{|1-\langle z, r\xi\rangle|^{2d}} |1-b(z)\overline{b(r\xi)}|^2\, d\sigma(\xi)& \\ \leqslant C \int\limits_Q \frac{(1-r^2)^d}{|1-\langle z, r\xi\rangle|^{2d}}\, d\sigma(\xi) \leqslant C&\end{aligned} \tag{3.8}$$

для всех $z \in \overline{B}_d$, а также

$$\frac{1}{h}\int\limits_{1-h}^{1}\int\limits_Q \frac{(1-r^2)^d}{|1-\langle z, r\xi\rangle|^{2d}}\, d\sigma(\xi)\, r^{2d-1} dr \xrightarrow{h\to 0} 0 \quad \text{для всех } z \in B_d$$

в силу части (a) леммы 2, использованной для $F \equiv 1$. Таким образом,

$$\frac{1}{h}\int\limits_{S_{Q,h}} J_1(w)\, d\nu(w) \xrightarrow{h\to 0} 0. \tag{3.9}$$

Далее,

$$\frac{1}{h}\int\limits_{1-h}^{1}\int\limits_Q \frac{(1-r^2)^d}{|1-\langle z, r\xi\rangle|^{2d}}\, d\sigma(\xi)\, r^{2d-1} dr \xrightarrow{h\to 0} 0 \quad \text{для всех } z \in \partial B_d \setminus Q$$

в силу части (a) леммы 2, использованной для $F \equiv 1$. Поэтому, применяя теорему Фубини и свойство (3.8), получаем

$$\begin{aligned}&\frac{C(d)}{h}\int\limits_{S_{Q,h}} J_2(w)\, d\nu(w) \\ &= \int\limits_{\partial B_d} \frac{1}{h}\int\limits_{1-h}^{1}\int\limits_Q \frac{(1-r^2)^d}{|1-\langle z, r\xi\rangle|^{2d}} |1-b(z)\overline{b(r\xi)}|^2\, d\sigma(\xi)\, r^{2d-1} dr\, d\eta(z) \\ &\leqslant \int\limits_Q d\eta + \varepsilon(h),\end{aligned} \tag{3.10}$$

где $\varepsilon(h) \to 0$ при $h \to 0$.

Наконец, после применения теоремы Фубини имеем

$$\frac{C(d)}{h} \int\limits_{S_{Q,h}} J_3(w)\, d\nu(w)$$
$$= \int\limits_{\partial B_d} \frac{1}{h} \int\limits_{1-h}^{1} \int\limits_{Q} \frac{(1-r^2)^d}{|1-\langle z, r\xi\rangle|^{2d}} |1-b(r\xi)\overline{b(z)}|^2 d\sigma(\xi) r^{2d-1} dr g(z) d\sigma(z).$$

Применяя лемму 2 для $F(w) = (1-b(w)\overline{b(\zeta)})^2$, получаем

$$C \geqslant \int\limits_{Q} \frac{(1-r^2)^d}{|1-\langle z, r\xi\rangle|^{2d}} |1-b(r\xi)\overline{b(z)}|^2\, d\sigma(\xi) \overset{r\to 1-}{\longrightarrow} (1-|b(z)|^2)^2 \chi_Q(z)$$

для σ-почти всех $z \in \partial B_d$. Таким образом,

$$\frac{1}{h} \int\limits_{S(Q,h)} J_3(w)\, d\nu(w) \to \int\limits_{Q} (1-|b|^2)^2 g\, d\sigma \tag{3.11}$$

при $h \to 0$.

Напомним, что $Q = Q(\zeta,\tau)$. Итак, объединяя свойства (3.7) и (3.9)–(3.11), получаем

$$\int\limits_{Q(\zeta,\tau)} (1-|b|^2)\, d\sigma \leqslant C \int\limits_{Q(\zeta,\tau)} (1-|b|^2)^2 g\, d\sigma + C \int\limits_{Q(\zeta,\tau)} d\eta$$

для всех $\zeta \in \partial B_d$.

Теперь разделим обе части последней оценки на $\sigma(Q(\zeta,\tau))$ и устремим τ к нулю. Так как η — сингулярная мера, то теорема 5.3.2 из монографии [8] гарантирует, что

$$\frac{1}{\sigma(Q(\zeta,\tau))} \int\limits_{Q(\zeta,\tau)} d\eta \overset{\tau\to 0}{\longrightarrow} 0$$

для σ-почти всех $\zeta \in \partial B_d$. Таким образом, искомое неравенство (3.1) имеет место для σ-почти всех $\zeta \in \partial B_d$ в силу теоремы о дифференцировании мер на сфере ∂B_d (см. [8, теорема 5.3.1]). Доказательство теоремы 2 завершено.

Список литературы

1. А. Б. Александров, *Существование внутренних функций в шаре.* — Матем. сб. **118(160)**, No. 2(6) (1982), 147–163.
2. A. Blandignères, E. Fricain, F. Gaunard, A. Hartmann, W. T. Ross, *Direct and reverse Carleson measures for $\mathcal{H}(b)$ spaces.* — Indiana Univ. Math. J. **64**, No. 4 (2015), 1027–1057.
3. L. Carleson, *An interpolation problem for bounded analytic functions.* — Amer. J. Math. **80** (1958), 921–930.
4. A. W. Green, N. A. Wagner, *Dominating sets in Bergman spaces on strongly pseudoconvex domains*, Constr. Approx. (2023), `https://doi.org/10.1007/s00365-023-09639-z`.
5. A. Hartmann, X. Massaneda, A. Nicolau, J. Ortega-Cerdà, *Reverse Carleson measures in Hardy spaces.* — Collect. Math. **65**, No. 3 (2014), 357–365.
6. P. Lefèvre, D. Li, H. Queffélec, L. Rodríguez-Piazza, *Some revisited results about composition operators on Hardy spaces.* — Rev. Mat. Iberoam. **28**, No. 1 (2012), 57–76.
7. D. H. Luecking, *Forward and reverse Carleson inequalities for functions in Bergman spaces and their derivatives.* — Amer. J. Math. **107**, No. 1 (1985), 85–111.
8. W. Rudin, *Function theory in the unit ball of* $\mathbf{C}^n$, Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften, Vol. 241, Springer-Verlag, New York-Berlin, 1980.
9. D. Sarason, *Sub-Hardy Hilbert spaces in the unit disk*, University of Arkansas Lecture Notes in the Mathematical Sciences, Vol. 10, John Wiley & Sons, Inc., New York, 1994, A Wiley-Interscience Publication.
10. K. Zhu, *Spaces of holomorphic functions in the unit ball*, Graduate Texts in Mathematics, Vol. 226, Springer-Verlag, New York, 2005.

Dubtsov E. S. Reverse Carleson measures for Hardy spaces in the unit ball.

Let $H^p = H^p(B_d)$ denote the Hardy space in the open unit ball B_d of $\mathbb{C}^d$, $d \geqslant 1$. We characterize the reverse Carleson measures for H^p, $1 < p < \infty$, that is, we describe all finite positive Borel measures μ defined on the closed ball $\overline{B}_d$ and such that

$$\|f\|_{H^p} \leqslant c\|f\|_{L^p(\overline{B}_d,\mu)}$$

for all $f \in H^p(B_d) \cap C(\overline{B}_d)$ and a universal constant $c > 0$. Given a noninner holomorphic function $b : B_d \to B_1$, we obtain properties of the reverse Carleson measures for the de Branges–Rovnyak space $\mathcal{H}(b)$.

С.-Петербургский
государственный университет,
и С.-Петербургское отделение
Математического института им. В. А. Стеклова РАН,
Санкт-Петербург, Россия
E-mail: dubtsov@pdmi.ras.ru

Поступило 23 сентября 2023 г.