

В. И. Васюнин, П. Б. Затицкий

НЕКОТОРЫЕ ЭКСТРЕМАЛЬНЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ МАРТИНГАЛЬНЫХ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ. I

§1. ВВЕДЕНИЕ

Настоящей статьёй мы начинаем серию работ, в которых предполагаем описать алгоритм построения функции Беллмана для экстремальной задачи, которая будет сформулирована ниже. Мы были вдохновлены удавшимся описанием алгоритма построения функций Беллмана для достаточно широкого класса интегральных экстремальных задач на классе ВМО, полученным в работах [2, 3], а также недавним обобщением этих результатов на более общие классы функций, включающие, среди прочего, классы Макенхаупта, см. [4]. Исходная экстремальная задача на бесконечномерном функциональном пространстве сводится к задаче о построении (поточечно) минимальной локально вогнутой функции в соответствующей двумерной области (параболической полосе в случае пространства ВМО) с заданным граничным условием, см. работу [8]. Минимальная локально вогнутая функция оказывается линейной вдоль какого-то направления в каждой внутренней точке своей области определения. Тем самым эта двумерная область замечается участками линейности функции – отрезками или двумерными подобластями, мы называем такую структуру фоллиацией. Если фоллиация построена, то по ней уже можно восстановить исходную функцию Беллмана и получить точные оценки в исходной экстремальной задаче.

Подобный подход применяется для получения точных оценок в различных вопросах теории мартингалов (и более общих случайных процессов). Он восходит к работе [1] и называется методом Буркхольдера. Большое количество примеров использования этого метода и обзор литературы по теме можно найти в книге [6]. При изучении оценок мартингальных преобразований вместо локально вогнутых функций

Ключевые слова: функция Беллмана, мартингальное преобразование, диагонально вогнутая функция.

Работа выполнена за счет Российского научного фонда, грант номер 19-71-10023.

возникают так называемые диагонально вогнутые – это функции, вогнутые вдоль прямых вида $x_1 \pm x_2 = \text{const}$ ¹.

Недавно было обнаружено, что некоторый круг экстремальных задач для мартингального преобразования тесно связан с соответствующими экстремальными задачами на ВМО. Метод Буркхольдера сводит задачу оценки распределения мартингального преобразования ограниченного мартингала к поиску минимальной диагонально вогнутой функции на горизонтальной полосе, удовлетворяющей определённому симметричному граничному условию на верхней и нижней границах полосы. Оказывается, что структура такой функции в некотором смысле совпадает со структурой минимальной локально вогнутой функции на параболической полосе с соответствующими граничными данными, подробности см. в работе [7]. После обнаружения этой связи возникло естественное желание рассмотреть более широкий класс задач на горизонтальной полосе, когда на границах полосы задаются произвольные, не обязательно одинаковые условия. Взявшись за эту задачу, мы исходили из двух соображений. Во-первых, такое обобщение нам казалось самым естественным и диктовалось логикой развития теории. То есть наше внимание не нацелено на конкретные функции Беллмана; скорее, мы хотим понять алгоритм, позволяющий строить нужную функцию для достаточно широкого класса задач. Поскольку мы руководствовались внутренними потребностями метода, мы не искали конкретных приложений. Хотя в данном цикле работ будет много примеров, все они иллюстрируют теорию и не являются внешними задачами. Во-вторых, так как интерес к различным оценкам мартингальных преобразований довольно велик (см. книгу [6]), мы не теряем надежды, что наша теория, возможно, когда-нибудь найдёт применение и к задачам, возникшим независимо. Однако мы просим читателя не искать таких приложений в предлагаемом тексте.

Перейдём к формальной постановке задачи. Пусть $(S, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ – стандартное вероятностное пространство, а $(\mathcal{F}_n)_{n=0}^{\infty}$ – плотная в \mathcal{F} фильтрация с тривиальной алгеброй \mathcal{F}_0 . Пусть $(\varphi_n, \mathcal{F}_n)_{n=0}^{\infty}$ и $(\psi_n, \mathcal{F}_n)_{n=0}^{\infty}$ – два мартингала на этом пространстве, порождённые суммируемыми функциями $\varphi, \psi \in L^1(S, \mathcal{F}, \mathbb{P})$:

$$\varphi_n = \mathbb{E}(\varphi \mid \mathcal{F}_n), \quad \psi_n = \mathbb{E}(\psi \mid \mathcal{F}_n).$$

¹В работах Буркхольдера такие функции называются зиг-заг вогнутыми (zig-zag concave).

Пусть $d\varphi_n = \varphi_n - \varphi_{n-1}$ и $d\psi_n = \psi_n - \psi_{n-1}$ при $n \geq 1$ – их мартингаловые разности. В силу тривиальности сигма-алгебры \mathcal{F}_0 имеем $\varphi_0 = \mathbb{E}\varphi$, $\psi_0 = \mathbb{E}\psi$. Будем говорить, что мартингал (ψ_n) является мартингаловым преобразованием мартингала (φ_n) , если найдётся такая последовательность функций $(\alpha_n)_{n=1}^\infty$ на $(S, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, что для каждого $n \geq 1$ функция α_n измерима относительно сигма-алгебры \mathcal{F}_{n-1} и $d\psi_n = \alpha_n d\varphi_n$. В дальнейшем мы ограничимся изучением случая, когда $|\alpha_n| = 1$ почти наверное.

Определение 1.1. Для заданного $\varepsilon > 0$ рассмотрим следующую двумерную область:

$$\Omega_\varepsilon \stackrel{\text{def}}{=} \{x = (x_1, x_2): -\infty < x_1 < \infty, -\varepsilon \leq x_2 \leq \varepsilon\}. \quad (1.1)$$

Пара функций (φ, ψ) , порождающих мартингалы (φ_n) и (ψ_n) , называется допустимой для точки $x \in \Omega_\varepsilon$, если $\varphi_0 = x_1$, $\psi_0 = x_2$ и $|\psi| = \varepsilon$ почти наверное. Множество всех допустимых пар для точки x обозначим символом $\text{Adm}_\varepsilon(x)$.

Определение 1.2. Пусть $f_\pm: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ – две измеримые функции. Положим $f(x_1, \pm\varepsilon) = f_\pm(x_1)$, $x_1 \in \mathbb{R}$. Определим функцию \mathbf{B} на Ω_ε формулой

$$\mathbf{B}(x) = \sup \left\{ \mathbb{E}f(\varphi, \psi): (\varphi, \psi) \in \text{Adm}_\varepsilon(x) \right\}, \quad x \in \Omega_\varepsilon. \quad (1.2)$$

Основная цель настоящего исследования – построение функции Беллмана \mathbf{B} для наперёд заданных функций f_\pm . Решая эту задачу, мы даём описание совместного распределения функции φ и её мартингалового преобразования ψ . В недавней работе [7] эта задача решается для случая симметричных граничных условий: дается описание функции \mathbf{B} при условии $f_+ = f_-$.

Определение 1.3. Определённая на некоторой двумерной области функция называется диагонально вогнутой, если она вогнута в направлениях $x_2 \pm x_1 = \text{const}$.

Следующая теорема восходит к Д. Буркхольдеру (доказательство см., например, в главе 2 книги [6]).

Теорема 1.4. Функция \mathbf{B} является диагонально вогнутой на полосе Ω_ε и удовлетворяет граничным условиям

$$\mathbf{B}(x_1, \pm\varepsilon) = f_\pm(x_1), \quad x_1 \in \mathbb{R}. \quad (1.3)$$

Более того, она является поточечно минимальной среди всех функций, обладающих данными свойствами.

Определение 1.5. Функция V , определённая на подобласти Ω области Ω_ε , называется беллмановским кандидатом (кандидатом на роль функции Беллмана) на Ω , если выполняются следующие условия:

- (1) V является диагонально вогнутой на Ω ;
- (2) V удовлетворяет граничным условиям (1.3) на $\Omega \cap \partial\Omega_\varepsilon$;
- (3) для любой точки y из Ω выполнено одно из двух условий:
 - существует идущий в одном из направлений $x_1 \pm x_2 = \text{const}$ прямолинейный отрезок, соединяющий y с какой-то точкой на $\partial\Omega_\varepsilon$, на котором функция V линейна;
 - функция V линейна в обоих направлениях $x_1 \pm x_2 = \text{const}$ в окрестности точки y .

В недавней работе [5] М. И. Новиков доказал замечательную теорему, позволяющую проверять, что данная диагонально вогнутая функция является минимальной с заданными граничными значениями. Мы приводим её упрощенную версию, теорему 1.5.3 из работы [7].

Определение 1.6. Пусть $G: \Omega_\varepsilon \rightarrow \mathbb{R}$ – диагонально вогнутая функция. Будем говорить, что она экстремальна в направлении $(1, \pm 1)$ в точке x , если x является концом некоторого отрезка ℓ , второй конец которого лежит на $\partial\Omega_\varepsilon$, ℓ параллелен вектору $(1, \pm 1)$, функция $G|_\ell$ линейна и G дифференцируема в направлении $(1, \pm 1)$ в x .

Теорема 1.7 ([5]). Пусть функция $G: \Omega_\varepsilon \rightarrow \mathbb{R}$ является диагонально вогнутой и полунепрерывной сверху с дискретным множеством разрывов. Пусть также $|G(x)| \lesssim e^{|x_1|/\tilde{\varepsilon}}$, $x \in \Omega_\varepsilon$, для некоторого $\tilde{\varepsilon} > \varepsilon$. Пусть для каждой внутренней точки $x \in \Omega_\varepsilon$ выполнено одно из следующих условий:

- 1) функция G линейна и экстремальна в направлении $(1, 1)$ в точке x ;
- 2) функция G линейна и экстремальна в направлении $(1, -1)$ в точке x ;
- 3) функция G экстремальна в обоих направлениях $(1, \pm 1)$ в точке x ;
- 4) функция G линейна в обоих направлениях $(1, \pm 1)$ в окрестности точки x .

Тогда функция G является поточечно минимальной среди всех диагонально вогнутых функций с теми же граничными данными.

В дальнейшем мы будем строить диагонально вогнутые функции на Ω_ε , удовлетворяющие предположениям теоремы 1.7, тем самым получающиеся минимальными. Согласно теореме 1.4, эти функции и будут функциями Беллмана (1.2) для исходных экстремальных задач.

Для простоты в дальнейшем мы предполагаем, что граничные функции f_\pm являются достаточно гладкими, хотя для большинства приведенных конструкций хватает C^3 -гладкости. Для того, чтобы использовать теорему 1.7, мы также предполагаем, что функции f_\pm удовлетворяют оценке $|f_\pm(x_1)| \leq C e^{|x_1|/\tilde{\varepsilon}}$ для некоторого $\tilde{\varepsilon} > \varepsilon$.

§2. ПРОСТЕЙШАЯ ФОЛИАЦИЯ

Поскольку мы ищем наименьшую возможную диагонально вогнутую функцию, её вогнутость должна быть вырожденной в каждой точке по крайней мере в одном направлении: либо вдоль отрезка прямой $x_2 - x_1 = \text{const}$, либо вдоль отрезка прямой $x_2 + x_1 = \text{const}$. Мы называем такие отрезки *экстремальями* или *экстремальными сегментами*; в первом случае мы называем их правыми экстремальями, а во втором – левыми.

В этом разделе мы рассмотрим самый простой случай, когда подобласть Ω_ε фолируется только одним типом экстремалей: либо только правыми, либо только левыми.

Определение 2.1. Обозначение $\Omega_\varepsilon^R(u_1, u_2)$ будет использоваться для подобласти Ω_ε , фолируемой правыми экстремальями $x_1 - x_2 = u$, где $u_1 \leq u \leq u_2$. Симметрично, символ $\Omega_\varepsilon^L(u_1, u_2)$ будет использоваться для подобласти Ω_ε , фолируемой левыми экстремальями $x_1 + x_2 = u$, где $u_1 \leq u \leq u_2$.

Случаи правых и левых экстремалей симметричны. Предположим, что функция B линейна вдоль правых экстремалей, которые фолируют область $\Omega_\varepsilon^R(u_1, u_2)$. Это означает, что для любого u , $u_1 \leq u \leq u_2$, граничные точки $(u - \varepsilon, -\varepsilon)$ и $(u + \varepsilon, \varepsilon)$ соединены экстремалью, вдоль которой функция B является линейной, то есть

$$B(u + s, s) = \frac{\varepsilon + s}{2\varepsilon} f_+(u + \varepsilon) + \frac{\varepsilon - s}{2\varepsilon} f_-(u - \varepsilon), \quad |s| \leq \varepsilon,$$

или, эквивалентно,

$$B(x_1, x_2) = \frac{\varepsilon + x_2}{2\varepsilon} f_+(x_1 - x_2 + \varepsilon) + \frac{\varepsilon - x_2}{2\varepsilon} f_-(x_1 - x_2 - \varepsilon). \quad (2.1)$$

По построению функция B является линейной (и, следовательно, вогнутой) вдоль направления $x_2 - x_1 = \text{const}$, и нам нужно проверить её вогнутость вдоль направления $x_2 + x_1 = \text{const}$. Зафиксируем точку (x_1, x_2) , положим

$$\begin{aligned} h(s) &= B(x_1 - s, x_2 + s) \\ &= \frac{\varepsilon + x_2 + s}{2\varepsilon} f_+(x_1 - x_2 - 2s + \varepsilon) + \frac{\varepsilon - x_2 - s}{2\varepsilon} f_-(x_1 - x_2 - 2s - \varepsilon) \end{aligned}$$

и проверим, когда эта функция вогнута при $s = 0$. Вычислим производные:

$$\begin{aligned} h'(s) &= \frac{1}{2\varepsilon} (f_+ - f_-) - \frac{\varepsilon + x_2 + s}{\varepsilon} f'_+ - \frac{\varepsilon - x_2 - s}{\varepsilon} f'_-, \\ h''(s) &= -\frac{2}{\varepsilon} (f'_+ - f'_-) + 2 \frac{\varepsilon + x_2 + s}{\varepsilon} f''_+ + 2 \frac{\varepsilon - x_2 - s}{\varepsilon} f''_-. \end{aligned}$$

Здесь подразумевается, что значения функции f_+ и её производных рассматриваются в точках $x_1 - x_2 - 2s + \varepsilon$, а значения функции f_- и её производных – в точках $x_1 - x_2 - 2s - \varepsilon$.

Зафиксируем экстремаль, проходящую через точку $(u, 0)$, то есть прямую $x_1 - x_2 = u$. Вогнутость функции B во всех точках этой экстремали в ортогональном направлении означает, что неравенство

$$\frac{1}{2} h''(0) = -\frac{1}{\varepsilon} (f'_+(u+\varepsilon) - f'_-(u-\varepsilon)) + \frac{\varepsilon + x_2}{\varepsilon} f''_+(u+\varepsilon) + \frac{\varepsilon - x_2}{\varepsilon} f''_-(u-\varepsilon) \leq 0$$

выполнено при всех $x_2 \in [-\varepsilon, \varepsilon]$. Это выражение линейно по x_2 , поэтому оно неотрицательно для всех $x_2 \in [-\varepsilon, \varepsilon]$ тогда и только тогда, когда оно неотрицательно при $x_2 = \pm\varepsilon$. Таким образом, мы приходим к условиям

$$\begin{aligned} f'_+(u+\varepsilon) - f'_-(u-\varepsilon) - 2\varepsilon f''_+(u+\varepsilon) &\geq 0; \\ f'_+(u+\varepsilon) - f'_-(u-\varepsilon) - 2\varepsilon f''_-(u-\varepsilon) &\geq 0. \end{aligned} \quad (2.2)$$

Итак, мы доказали следующее утверждение.

Предложение 2.2. *Функция B , определённая формулой (2.1), является беллмановским кандидатом на области $\Omega_\varepsilon^R(u_1, u_2)$ тогда и только тогда, когда выполнены условия (2.2) для всех u , $u \in (u_1, u_2)$.*

В симметричном случае левых экстремалей беллмановский кандидат задаётся формулой

$$B(x_1, x_2) = \frac{\varepsilon + x_2}{2\varepsilon} f_+(x_1 + x_2 - \varepsilon) + \frac{\varepsilon - x_2}{2\varepsilon} f_-(x_1 + x_2 + \varepsilon). \quad (2.3)$$

Вместо условий (2.2) мы получаем следующие неравенства:

$$\begin{aligned} f'_-(u + \varepsilon) - f'_+(u - \varepsilon) - 2\varepsilon f''_+(u - \varepsilon) &\geq 0; \\ f'_-(u + \varepsilon) - f'_+(u - \varepsilon) - 2\varepsilon f''_-(u + \varepsilon) &\geq 0. \end{aligned} \quad (2.4)$$

Сформулируем симметричное утверждение, характеризующее беллмановского кандидата в этом случае.

Предложение 2.3. *Функция B , определённая формулой (2.3), является беллмановским кандидатом на области $\Omega_\varepsilon^L(u_1, u_2)$ тогда и только тогда, когда выполнены условия (2.4) для всех u , $u \in (u_1, u_2)$.*

При стремлении ε к 0 оба неравенства в условии (2.2) принимают одну и ту же предельную форму

$$f'_+(u) \geq f'_-(u). \quad (2.5)$$

Предельная форма условия (2.4) (при стремлении ε к 0) является противоположным неравенством

$$f'_+(u) \leq f'_-(u). \quad (2.6)$$

Это замечание приводит нас к следующему выводу.

Предложение 2.4. *Пусть $u \in \mathbb{R}$. Если $f'_+(u) > f'_-(u)$, то для достаточно малых значений ε существует такое δ , $\delta = \delta(\varepsilon)$, что функция B , определённая формулой (2.1), является беллмановским кандидатом на области $\Omega_\varepsilon^R(u - \delta, u + \delta)$. Если $f'_+(u) < f'_-(u)$, то для достаточно малых значений ε существует такое δ , $\delta = \delta(\varepsilon)$, что функция B , определённая формулой (2.3), является беллмановским кандидатом на области $\Omega_\varepsilon^L(u - \delta, u + \delta)$.*

Доказательство. Поскольку предполагается, что функции f_\pm достаточно гладкие, условие $f'_+(u) > f'_-(u)$ влечет выполнение условий (2.2) для достаточно малых значений ε не только для данного u , но и для всех точек в некоторой окрестности размером $O(\varepsilon)$. Поэтому утверждение следует из предложения 2.2. При условии $f'_+(u) < f'_-(u)$ вывод следует из предложения 2.3. \square

Предложение 2.5. Пусть функции f_{\pm}''' равномерно ограничены на всей оси. Если функция $f_+' - f_-'$ равномерно отделена от нуля, то при достаточно малых ε функция \mathbf{B} имеет простейшую правую фолиацию $\Omega_{\varepsilon}^{\mathbf{R}}(-\infty, +\infty)$ в случае $f_+' - f_-' > 0$ и простейшую левую фолиацию $\Omega_{\varepsilon}^{\mathbf{L}}(-\infty, +\infty)$ в случае $f_+' - f_-' < 0$.

Доказательство. Если $f_+' - f_-' > 0$, то утверждение предложения будет непосредственно ясным, если мы при помощи формулы Тейлора переписываем условия (2.2) в виде

$$\begin{aligned} f_+'(u-\varepsilon) - f_-'(u-\varepsilon) - 2\varepsilon^2 f_+''''(v) &\geq 0 \text{ для некоторого } v \in [u-\varepsilon, u+\varepsilon]; \\ f_+'(u+\varepsilon) - f_-'(u+\varepsilon) + 2\varepsilon^2 f_+''''(v) &\geq 0 \text{ для некоторого } v \in [u-\varepsilon, u+\varepsilon]. \end{aligned}$$

Аналогично мы переписываем условия (2.4) в случае $f_+' - f_-' < 0$. \square

§3. ПРИМЕРЫ. ЛИНЕЙНЫЕ И КВАДРАТИЧНЫЕ ФУНКЦИИ

Пусть $f_{\pm}(t) = a_1^{\pm}t + a_0^{\pm}$. Функции f_{\pm} тождественно равны константам a_1^{\pm} , поэтому оба выражения в левой части формулы (2.2) совпадают с $a_1^+ - a_1^-$. Если $a_1^+ > a_1^-$, то функция Беллмана задаётся формулой (2.1) и имеет простейшую фолиацию $\Omega_{\varepsilon}^{\mathbf{R}}(-\infty, +\infty)$ для всех ε . Симметрично, если $a_1^+ < a_1^-$, то оба выражения в левой части (2.4) совпадают с $a_1^- - a_1^+$, поэтому функция Беллмана задаётся формулой (2.3) и имеет простейшую фолиацию $\Omega_{\varepsilon}^{\mathbf{L}}(-\infty, +\infty)$. Если $a_1^+ = a_1^- \stackrel{\text{def}}{=} a_1$, то функция Беллмана является линейной:

$$\mathbf{B}(x_1, x_2) = a_1 x_1 + \frac{a_0^+ - a_0^-}{2\varepsilon} x_2 + \frac{a_0^+ + a_0^-}{2}.$$

Теперь предположим, что $f_{\pm}(t) = a_2^{\pm}t^2 + a_1^{\pm}t + a_0^{\pm}$. Пусть $a_2^- < a_2^+$ и $u_0 = \frac{a_1^- - a_1^+}{2(a_2^+ - a_2^-)}$. Тогда условие (2.2) выполняется для $u \geq u_0 + \varepsilon$, а условие (2.4) выполняется для $u \leq u_0 - \varepsilon$. Таким образом, у нас есть две области $\Omega_{\varepsilon}^{\mathbf{R}}(u_0 + \varepsilon, +\infty)$ и $\Omega_{\varepsilon}^{\mathbf{L}}(-\infty, u_0 - \varepsilon)$, имеющие простейшую фолиацию, и оставшийся треугольник с вершинами $(u_0 - 2\varepsilon, \varepsilon)$, $(u_0, -\varepsilon)$, $(u_0 + 2\varepsilon, \varepsilon)$. В этом треугольнике функция Беллмана линейна в обоих направлениях:

$$\mathbf{B}(x_1, x_2) = a_2^+(x_1^2 - x_2^2 + \varepsilon^2) + a_1^+ x_1 + \left(\frac{a_0^+ - a_0^-}{2\varepsilon} - \frac{(a_1^+ - a_1^-)^2}{8\varepsilon(a_2^+ - a_2^-)} \right) (x_2 - \varepsilon) + a_0^+.$$

Если $a_2^- > a_2^+$, то фолиация получается симметричной относительно оси x_1 (нужно поменять местами f_+ и f_-). Так что нам осталось

рассмотреть случай $a_2^+ = a_2^-$. Если $a_1^+ \geq a_1^-$, то при всех ε выполнены соотношения (2.2) и имеет место фолляция $\Omega_\varepsilon^R(-\infty, +\infty)$. Симметрично, если $a_1^+ \leq a_1^-$, то выполнены соотношения (2.4) и имеет место фолляция $\Omega_\varepsilon^L(-\infty, +\infty)$. В частности, если $a_1^+ = a_1^-$, то функция линейна вдоль обоих диагональных направлений:

$$\mathbf{B}(x_1, x_2) = a_2(x_1^2 - x_2^2 + \varepsilon^2) + a_1x_1 + \frac{a_0^+ - a_0^-}{2\varepsilon}x_2 + \frac{a_0^+ + a_0^-}{2}.$$

§4. ГОРИЗОНТАЛЬНЫЕ ЁЛКИ

Теперь мы будем рассматривать фолляции, которые могут возникать в окрестности точки, где

$$f'_+(u) = f'_-(u). \quad (4.1)$$

Если два семейства разнонаправленных экстремальных сегментов пересекаются в точках некоторой кривой, мы будем называть такую фолляцию *ёлкой*, рассматривая эту кривую как *ствол* ёлки, а экстремали, выходящие из точек ствола, как её *ветви*. Если ветви идут от ствола к одной и той же границе, мы называем такую ёлку *вертикальной* (см. рис. 1), а если они идут к противоположным границам полосы, то такую ёлку называем *горизонтальной*. Вертикальная ёлка может расти вверх или вниз. Горизонтальная ёлка может расти



Рис. 1. Вертикальные ёлки, растущие снизу вверх и сверху вниз.

слева направо или справа налево, и в зависимости от направления роста мы называем её *левой* или *правой* соответственно, указывая, откуда она растет (см. рис. 2). Горизонтальная ёлка, ствол которой соединяет две противоположные границы области, называется *пробоем*. Пробой может иметь одно из четырех направлений. Если правый пробой начинается от нижней границы, мы называем его *юго-восточным* (SE-пробой); если он начинается от верхней границы, мы называем его *северо-восточным* (NE-пробой). Если левый пробой начинается от



Рис. 2. Горизонтальные ёлки, левая и правая.

нижней границы, мы называем его *юго-западным* (SW-пробой); если он начинается от верхней границы, мы называем его *северо-западным* (NW-пробой), см. рис. 3. Отметим, что во всех случаях название пробоа указывает, откуда он начинается.

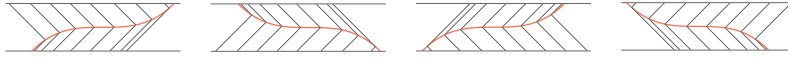


Рис. 3. Пробои: SW, NW, NE, SE.

В разделе 6 мы рассмотрим различные пробои как границы между подобластями левой и правой фолиации. Здесь мы начинаем исследование локального поведения горизонтальных ёлок. Будем рассматривать только случай левой ёлки (растущей слева направо), а для правой всё будет симметрично.

Предположим, что ствол левой ёлки является графиком C^1 -функции T на некотором интервале, скажем, $[u_1, u_2]$, а фолиация определена следующим образом. Из каждой точки $(u, T(u))$, $u \in [u_1, u_2]$, то есть точки ствола, стартуют две ветви: одна идёт в точку $(u + T(u) - \varepsilon, \varepsilon)$ на верхней границе, другая идёт в точку $(u - T(u) - \varepsilon, -\varepsilon)$ на нижней границе, см. левую часть рис. 2. Сам параметр u может рассматриваться как функция переменной точки x , лежащей в заметаемой ветвями области. Экстремали, идущие к нижней границе, замечают область, расположенную между экстремалиями $x_2 = x_1 - u_1 + T(u_1)$ и $x_2 = x_1 - u_2 + T(u_2)$ под стволом нашей ёлки. Будем называть эту область нижними ветвями. На ней функция $x \mapsto u(x)$ задаётся неявно тождеством $x_1 - x_2 = u - T(u)$, при этом выполнено соотношение $x_2 \leq T(u)$. Соответственно верхними ветвями будем называть экстремали, идущие от ствола к верхней границе. На них выполняется тождество $x_1 + x_2 = u + T(u)$, при этом выполнено соотношение $x_2 \geq T(u)$.

Условие $|T'| \leq 1$ явно необходимо для такой фоллиации. Мы предполагаем выполнение строгого неравенства $|T'| < 1$, за исключением, возможно, конечных точек ствола.

Если функция B нам известна на стволе (обозначим её буквой A : $A = A(u) \stackrel{\text{def}}{=} B(u, T(u))$), то мы можем восстановить её значения на ветвях по линейности. Прежде чем записывать формулу для B , договоримся о следующем упрощении обозначений: в дальнейшем мы будем опускать аргументы функций, считая, что A , T и их производные всегда вычисляются в точке u , значения функции f_- и её производных берутся в точке $u - T - \varepsilon = x_1 - x_2 - \varepsilon$, а значения функции f_+ и её производных вычисляются в точке $u + T - \varepsilon = x_1 + x_2 - \varepsilon$. Во всех специальных случаях, когда аргументы не удовлетворяют этому правилу, они будут явно выписаны.

Запишем формулу для беллмановского кандидата на левой ёлке:

$$B(x) = \begin{cases} \frac{\varepsilon - x_2}{\varepsilon - T} A + \frac{x_2 - T}{\varepsilon - T} f_+, & x_2 \geq T(u); \\ \frac{\varepsilon + x_2}{\varepsilon + T} A + \frac{T - x_2}{\varepsilon + T} f_-, & x_2 \leq T(u). \end{cases} \quad (4.2)$$

Функции A и T должны быть полностью определены граничными условиями f_{\pm} , но в качестве первого шага мы выведем важное соотношение, связывающее функции A и T .

Предложение 4.1. *Если беллмановский кандидат B является C^1 -гладкой функцией и соответствующая ему фоллиация – это левая ёлка, описанная выше, то*

$$2A' = (1 - T') \frac{A - f_+}{\varepsilon - T} + (1 + T') \frac{A - f_-}{\varepsilon + T}, \quad (4.3)$$

где $f_+ = f_+(u + T(u) - \varepsilon)$ и $f_- = f_-(u - T(u) - \varepsilon)$.

В случае правой ёлки соотношение имеет вид:

$$2A' = (1 - T') \frac{f_- - A}{\varepsilon + T} + (1 + T') \frac{f_+ - A}{\varepsilon - T}, \quad (4.4)$$

где $f_+ = f_+(u - T(u) + \varepsilon)$ и $f_- = f_-(u + T(u) + \varepsilon)$.

Доказательство. Мы рассмотрим только случай левой ёлки. Симметричный случай можно рассмотреть абсолютно аналогично, однако соотношение (4.4) может быть формально получено из формулы (4.3)

с помощью симметрии. Для этого нам нужно изменить направление оси x_1 , т. е. изменить знак всех первых производных.

Рассмотрим плоскость P , содержащую следующие три точки:

$$\begin{aligned} z &= (u, T, A), \\ z_- &= (u - T - \varepsilon, -\varepsilon, f_-), \\ z_+ &= (u + T - \varepsilon, \varepsilon, f_+). \end{aligned}$$

Отрезки $[z, z_{\pm}]$ принадлежат графику функции B , потому что B линейна в соответствующих направлениях. Поскольку функция B диагонально вогнутая и C^1 -гладкая, плоскость P является касательной плоскостью к графику функции B в точке z . Следовательно, вектор $(1, T', A')$, который касается графика функции B вдоль ствола ёлки, параллелен плоскости P . Поэтому

$$\det \begin{pmatrix} 1 & T' & A' \\ \varepsilon + T & \varepsilon + T & A - f_- \\ \varepsilon - T & T - \varepsilon & A - f_+ \end{pmatrix} = 0,$$

что совпадает с (4.3). \square

Покажем, что уравнение (4.3) является не только необходимым, но и достаточным условием для того, чтобы функция (4.2) была C^1 -гладкой. Прежде чем доказать это, для упрощения дальнейших вычислений мы введём три дополнительных функции от переменной u :

$$R_- \stackrel{\text{def}}{=} \frac{A - f_-}{\varepsilon + T}, \quad R_+ \stackrel{\text{def}}{=} \frac{A - f_+}{\varepsilon - T} \quad \text{и} \quad R \stackrel{\text{def}}{=} R_- + R_+. \quad (4.5)$$

Формула (4.3) может быть переписана следующим образом:

$$2A' = (1 - T')R_+ + (1 + T')R_-, \quad (4.6)$$

а формула (4.2) принимает следующий вид:

$$B(x) = \begin{cases} (\varepsilon - x_2)R_+ + f_+, & \text{если } x_2 \geq T(u); \\ (\varepsilon + x_2)R_- + f_-, & \text{если } x_2 \leq T(u). \end{cases} \quad (4.7)$$

Заметим, что из этой формулы виден смысл коэффициентов R_{\pm} : это (с точностью до знака) коэффициенты линейности функции B на соответствующих экстремальных.

Предложение 4.2. При условии (4.3) функция B , определённая равенством (4.2), является C^1 -гладкой.

Доказательство. Мы начнем с некоторых вспомогательных формул дифференцирования, которые будут полезны в дальнейшем. Во-первых, соотношение

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = u + T, & \text{если } x_2 \geq T(u); \\ x_1 - x_2 = u - T, & \text{если } x_2 \leq T(u), \end{cases} \quad (4.8)$$

влечёт тождества

$$u_{x_1} = \begin{cases} \frac{1}{1+T'}, & \text{если } x_2 \geq T(u); \\ \frac{1}{1-T'}, & \text{если } x_2 \leq T(u), \end{cases} \quad \text{и} \quad u_{x_2} = \begin{cases} \frac{1}{1+T'}, & \text{если } x_2 \geq T(u); \\ -\frac{1}{1-T'}, & \text{если } x_2 \leq T(u). \end{cases} \quad (4.9)$$

Прежде чем дифференцировать функцию B , вычислим производные функций R_+ и R_- по переменной u , используя уравнения (4.3) в эквивалентной форме (4.6):

$$\begin{aligned} R'_+ &= \frac{A' - (1+T')f'_+}{\varepsilon - T} + \frac{A - f_+}{(\varepsilon - T)^2} T' \\ &= \frac{1}{\varepsilon - T} \left(\frac{1}{2}(1 - T')R_+ + \frac{1}{2}(1 + T')R_- - (1 + T')f'_+ + R_+ T' \right) \quad (4.10) \\ &= \frac{1 + T'}{\varepsilon - T} \left(\frac{1}{2}R - f'_+ \right). \end{aligned}$$

Здесь мы учли, что

$$\frac{d}{du} f_+ = \frac{d}{du} f_+(u + T(u) - \varepsilon) = (1 + T')f'_+.$$

Введём ещё два обозначения:

$$N_+ \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\frac{1}{2}R - f'_+}{\varepsilon - T} \quad \text{и} \quad N_- \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\frac{1}{2}R - f'_-}{\varepsilon + T}. \quad (4.11)$$

Тогда соотношение (4.10) можно переписать в виде

$$R'_+ = (1 + T')N_+. \quad (4.12)$$

Аналогично можно получить соотношение

$$R'_- = (1 - T')N_-. \quad (4.13)$$

Теперь мы можем продифференцировать выражение (4.7) по x_1 :

$$B_{x_1}(x) = \begin{cases} (\varepsilon - x_2)N_+ + f'_+, & \text{если } x_2 \geq T(u); \\ (\varepsilon + x_2)N_- + f'_-, & \text{если } x_2 \leq T(u). \end{cases} \quad (4.14)$$

Мы видим, что производная B_{x_1} непрерывна с обеих сторон ствола и предел с любой стороны в точке (u, T) на стволе равен $\frac{1}{2}R$, т. е. производная B_{x_1} непрерывна. Поскольку функция A является C^1 -гладкой, этого достаточно для непрерывности градиента, но легко также проверить непрерывность производной B_{x_2} напрямую.

Используя формулы (4.9), продифференцируем выражение (4.7) по переменной x_2 :

$$B_{x_2}(x) = \begin{cases} -R_+ + B_{x_1}(x), & \text{если } x_2 \geq T(u); \\ R_- - B_{x_1}(x), & \text{если } x_2 \leq T(u). \end{cases} \quad (4.15)$$

Поэтому производная B_{x_2} непрерывна с обеих сторон ствола, и предел с любой стороны в точке (u, T) на стволе равен $\frac{1}{2}(R_- - R_+)$. \square

Функция, определённая уравнением (4.2), является беллмановским кандидатом при условии, что она вогнута в направлениях $x_1 \pm x_2 = \text{const}$. Для C^2 -функций такая вогнутость эквивалентна неравенству $B_{x_1x_1} + B_{x_2x_2} \pm B_{x_1x_2} \leq 0$. Мы проверяем эти неравенства отдельно на каждой части ёлки, но благодаря C^1 -гладкости это означает желаемую вогнутость всюду на ёлке.

Предложение 4.3. Пусть функция B определена равенством (4.2) с помощью функции A , удовлетворяющей условию (4.3). В этом случае функция B вогнута в направлениях $x_1 \pm x_2 = \text{const}$ тогда и только тогда, когда выполняется условие

$$\max\{f''_-, f''_+\} \leq \frac{f'_+ - f'_-}{2T},$$

а функция A определяется функцией T и граничными условиями f_{\pm} следующим образом:

$$A = \frac{\varepsilon^2 - T^2}{2\varepsilon T} \left[(\varepsilon + T)f'_+ - (\varepsilon - T)f'_- \right] + \frac{(\varepsilon + T)f_+ + (\varepsilon - T)f_-}{2\varepsilon}. \quad (4.16)$$

Доказательство. Сначала продифференцируем выражение (4.15) по x_1 :

$$B_{x_1x_2} = \begin{cases} -N_+ + B_{x_1x_1}, & \text{если } x_2 \geq T(u), \\ N_- - B_{x_1x_1}, & \text{если } x_2 \leq T(u). \end{cases} \quad (4.17)$$

Затем продифференцируем то же выражение по x_2 :

$$B_{x_2x_2} = \begin{cases} -N_+ + B_{x_1x_2} = -2N_+ + B_{x_1x_1}, & \text{если } x_2 \geq T(u), \\ -N_- - B_{x_1x_2} = -2N_- + B_{x_1x_1}, & \text{если } x_2 \leq T(u). \end{cases} \quad (4.18)$$

Следовательно,

$$B_{x_1x_1} + B_{x_2x_2} + 2B_{x_1x_2} = \begin{cases} 4(B_{x_1x_1} - N_+), & \text{если } x_2 \geq T(u), \\ 0, & \text{если } x_2 \leq T(u), \end{cases} \quad (4.19)$$

и

$$B_{x_1x_1} + B_{x_2x_2} - 2B_{x_1x_2} = \begin{cases} 0, & \text{если } x_2 \geq T(u), \\ 4(B_{x_1x_1} - N_-), & \text{если } x_2 \leq T(u). \end{cases} \quad (4.20)$$

Итак, для доказательства диагональной вогнутости функции B нам необходимо вычислить $B_{x_1x_1}$ и сравнить полученное выражение с N_{\pm} . Сначала рассмотрим случай $x_2 > T(u)$. Дифференцируя уравнение (4.14) по x_1 , получаем

$$B_{x_1x_1} - N_+ = (\varepsilon - x_2)N'_+u_{x_1} + f''_+ - N_+,$$

$$\begin{aligned} N'_+ &= \frac{\frac{1}{2}R'_+ + \frac{1}{2}R'_- - (1+T')f''_+}{\varepsilon - T} + \frac{\frac{1}{2}R - f'_+}{(\varepsilon - T)^2}T' \\ &= \frac{1}{\varepsilon - T} \left(\frac{1}{2}(1+T')N_+ + \frac{1}{2}(1-T')N_- - (1+T')f''_+ + N_+T' \right), \end{aligned}$$

откуда

$$B_{x_1x_1} - N_+ = \frac{1}{2} \cdot \frac{\varepsilon - x_2}{\varepsilon - T} \left(\frac{1 + 3T'}{1 + T'}N_+ + \frac{1 - T'}{1 + T'}N_- - 2f''_+ \right) + f''_+ - N_+. \quad (4.21)$$

Это выражение линейно на каждой экстремали (т. е. для фиксированного u), поэтому оно неположительно при всех значениях x_2 , $x_2 \in [T, \varepsilon]$ тогда и только тогда, когда оно неположительно в конечных точках $x_2 = \varepsilon$ и $x_2 = T$. Таким образом, мы получаем следующие необходимые условия:

$$f''_+ - N_+ \leq 0; \quad (4.22)$$

$$\frac{1 - T'}{1 + T'}(N_- - N_+) \leq 0. \quad (4.23)$$

Теперь рассмотрим нижнюю половину ёлки, т. е. ту часть, где $x_2 < T$. Аналогично получаем

$$B_{x_1x_1} - N_- = \frac{1}{2} \cdot \frac{\varepsilon + x_2}{\varepsilon + T} \left(\frac{1 + T'}{1 - T'}N_+ + \frac{1 - 3T'}{1 - T'}N_- - 2f''_- \right) + f''_- - N_-, \quad (4.24)$$

откуда вытекают необходимые условия:

$$f'' - N_- \leq 0; \quad (4.25)$$

$$\frac{1+T'}{1-T'}(N_+ - N_-) \leq 0. \quad (4.26)$$

Отметим, что условия (4.22), (4.23), (4.25) и (4.26) являются не только необходимыми, но и достаточными для того, чтобы функция B являлась диагонально вогнутой.

Сравнивая формулы (4.23) и (4.26), получаем необходимое условие $N_+ = N_-$ или

$$(\varepsilon + T)f'_+ - (\varepsilon - T)f'_- = TR = T\left(\frac{A - f_-}{\varepsilon + T} + \frac{A - f_+}{\varepsilon - T}\right), \quad (4.27)$$

что эквивалентно условию (4.16). Это равенство определяет функцию A на стволе, если задана отличная от нуля функция T . При выполнении этого условия мы получаем

$$N_+ = N_- = \frac{1}{2T}((\varepsilon + T)N_- - (\varepsilon - T)N_+) = \frac{f'_+ - f'_-}{2T}, \quad (4.28)$$

и оставшиеся условия (4.22) и (4.25) превращаются в

$$f''_+ \leq \frac{f'_+ - f'_-}{2T}, \quad (4.29)$$

$$f''_- \leq \frac{f'_+ - f'_-}{2T}. \quad (4.30)$$

□

Замечание 4.4. Формула (4.27) показывает, что левая горизонтальная ёлка может пересекать ось абсцисс только в такой точке $(u_0, 0)$, для которой $f'_+(u_0 - \varepsilon) = f'_-(u_0 - \varepsilon)$. В такой точке мы не можем непосредственно восстановить значение функции A из формулы (4.16). Тем не менее, если такая точка изолирована, то мы можем в формуле (4.16) перейти к пределу $T \rightarrow 0$, $u \rightarrow u_0$, и восстановить значение $A(u_0)$ непосредственно в терминах граничных значений и наклона ствола ёлки в этой точке:

$$A(u_0) = \frac{1}{2}((f_+ + f_-) + \varepsilon(f'_+ + f'_-) + \varepsilon^2(f''_+ + f''_-)) + \frac{\varepsilon^2}{2T'(u_0)}(f''_+ - f''_-). \quad (4.31)$$

Отметим, что все значения функций f_{\pm} и их производных берутся в точке $u_0 - \varepsilon$. В случае $T'(u_0) = 0$ эта формула не работает, но такое может случиться только если $f''_+ = f''_-$, то есть $u_0 - \varepsilon$ является кратным

корнем разности $f'_+ - f'_-$. Этот случай будет рассмотрен в одной из последующих работ.

Симметрично, правая горизонтальная ёлка может пересекать ось x_1 только в такой точке $(u_0, 0)$, для которой $f'_+(u_0 + \varepsilon) = f'_-(u_0 + \varepsilon)$ (см. (4.44)).

Если ствол горизонтальной ёлки не просто пересекает ось x_1 , а совпадает с ней на некотором участке, то условие (4.27) показывает, что это возможно только в том случае, если функции f_+ и f_- отличаются на соответствующем интервале на постоянную. При малых ε внутри такого интервала функция Беллмана будет напоминать ту функцию, которая построена для симметричной полосы, то есть, когда $f_+ = f_-$ всюду (см. [7]). Однако сейчас мы ещё не готовы рассматривать такой случай и его обсуждение нам придётся отложить.

Итак, теперь у нас есть два уравнения (4.16) и (4.3) для двух неизвестных функций A и T . Мы рассматриваем равенство (4.16) как определение функции A в терминах T . А функция T определяется дифференциальным уравнением (4.32), которое мы получим, подставляя выражение (4.16) в уравнение (4.3).

Предложение 4.5. *Если функция T определяет ствол левой горизонтальной ёлки в фолiaции диагонально возгнутой функции с граничными значениями f_{\pm} , то она удовлетворяет следующему дифференциальному уравнению*

$$T' = \frac{(\varepsilon - T)D_-^L - (\varepsilon + T)D_+^L}{(\varepsilon - T)D_-^L + (\varepsilon + T)D_+^L}, \quad (4.32)$$

где

$$D_+^L = \frac{f'_+ - f'_-}{2T} - f''_+ \geq 0 \quad u \quad D_-^L = \frac{f'_+ - f'_-}{2T} - f''_- \geq 0. \quad (4.33)$$

Доказательство. Дифференцируя формулу (4.27), получаем

$$(f'_+ + f'_-)T' + (\varepsilon + T)(1 + T')f''_+ - (\varepsilon - T)(1 - T')f''_- = T'R + TR'. \quad (4.34)$$

Используя формулы (4.12), (4.13) и условие (4.28), мы видим, что

$$TR' = T(1 + T')N_+ + T(1 - T')N_- = f'_+ - f'_-.$$

Равенство (4.27) можно записать в виде

$$R = f'_+ + f'_- + \frac{\varepsilon}{T}(f'_+ - f'_-).$$

Подставляя эти формулы в (4.34) и собирая слагаемые с T' , получаем
 $T'[(\varepsilon + T)f_+'' + (\varepsilon - T)f_-'' - \frac{\varepsilon}{T}(f_+' - f_-')] = (\varepsilon - T)f_-'' - (\varepsilon + T)f_+'' + f_+' - f_-'$
или

$$T'[-(\varepsilon + T)D_+^L - (\varepsilon - T)D_-^L] = -(\varepsilon - T)D_-^L + (\varepsilon + T)D_+^L,$$

что совпадает с уравнением (4.32). \square

Мы заканчиваем этот раздел перечислением изменений в формулах для левой горизонтальной ёлки, которые необходимо проделать для перехода к правой ёлке. Как уже упоминалось в начале доказательства утверждения 4.1, мы должны изменить направление оси x_1 , то есть формально поменять знак всех первых производных. Когда мы хотим различать случаи правых и левых ёлок, мы будем использовать индексы R и L. Например, T_R и T_L – это функции, определяющие стволы правой и левой ёлок, A_R и A_L – значения функции B на соответствующих стволах и т. д.

До конца этого раздела мы рассматриваем правую ёлку, поэтому все объекты могут быть помечены индексом R, но обычно эти индексы будут опускаться.

Следующее замечание заключается в скрытом изменении, которое следует иметь в виду: аргумент функции f_+ и её производных теперь всегда равен $u - T + \varepsilon = x_1 - x_2 + \varepsilon$, а аргумент функции f_- равен $u + T + \varepsilon = x_1 + x_2 + \varepsilon$. Функция $u = u(x)$ удовлетворяет соотношению

$$\begin{cases} x_1 - x_2 = u - T, & \text{если } x_2 \geq T(u), \\ x_1 + x_2 = u + T, & \text{если } x_2 \leq T(u), \end{cases} \quad (4.35)$$

вместо (4.8). Поэтому вместо выражений (4.9) мы получаем формулы

$$u_{x_1} = \begin{cases} \frac{1}{1-T'}, & \text{если } x_2 \geq T(u), \\ \frac{1}{1+T'}, & \text{если } x_2 \leq T(u), \end{cases} \quad \text{и} \quad u_{x_2} = \begin{cases} -\frac{1}{1-T'}, & \text{если } x_2 \geq T(u), \\ \frac{1}{1+T'}, & \text{если } x_2 \leq T(u). \end{cases} \quad (4.36)$$

Определение (4.2) функции B остается тем же, так же как и определение (4.5) вспомогательных функций R_{\pm} и R . Мы меняем знаки всех производных в равенстве (4.6), и оно принимает вид

$$2A' = -(1 - T')R_- - (1 + T')R_+. \quad (4.37)$$

Эта формула приведена в утверждении 4.1, см. (4.4).

Естественно внести изменение в определение функций N_{\pm} , а именно, изменить знаки производных. Вместо (4.11) мы записываем

$$N_+^R \stackrel{\text{def}}{=} -\frac{\frac{1}{2}R + f'_+}{\varepsilon - T} \quad \text{и} \quad N_-^R \stackrel{\text{def}}{=} -\frac{\frac{1}{2}R + f'_-}{\varepsilon + T}. \quad (4.38)$$

Тогда вместо равенств (4.12) и (4.13) получаем

$$R'_+ = (1 - T')N_+ \quad \text{и} \quad R'_- = (1 + T')N_-. \quad (4.39)$$

Формула (4.14) для B_{x_1} остается неизменной, а в формуле (4.15) нам нужно изменить знак при производной B_{x_1} :

$$B_{x_2} = \begin{cases} -R_+ - B_{x_1}, & \text{если } x_2 \geq T(u), \\ R_- + B_{x_1}, & \text{если } x_2 \leq T(u). \end{cases} \quad (4.40)$$

Вместо условий (4.19) и (4.20) получаем

$$B_{x_1x_1} + B_{x_2x_2} + 2B_{x_1x_2} = \begin{cases} 0, & \text{если } x_2 \geq T(u), \\ 4(B_{x_1x_1} + N_-), & \text{если } x_2 \leq T(u), \end{cases} \quad (4.41)$$

и

$$B_{x_1x_1} + B_{x_2x_2} - 2B_{x_1x_2} = \begin{cases} 4(B_{x_1x_1} + N_+), & \text{если } x_2 \geq T(u), \\ 0, & \text{если } x_2 \leq T(u). \end{cases} \quad (4.42)$$

Условие диагональной вогнутости приводит к тому же соотношению $N_+ = N_-$, что даёт нам определение функции A , в котором теперь будет другой знак перед R . Вместо уравнения (4.27) получаем

$$(\varepsilon - T)f'_- - (\varepsilon + T)f'_+ = TR = T\left(\frac{A - f'_-}{\varepsilon + T} + \frac{A - f'_+}{\varepsilon - T}\right), \quad (4.43)$$

откуда

$$A = \frac{\varepsilon^2 - T^2}{2\varepsilon T} \left[(\varepsilon - T)f'_- - (\varepsilon + T)f'_+ \right] + \frac{(\varepsilon + T)f'_+ + (\varepsilon - T)f'_-}{2\varepsilon} \quad (4.44)$$

вместо (4.16). Выражение (4.28) для N_{\pm} остаётся таким же

$$N_+ = N_- = \frac{f'_+ - f'_-}{2T}, \quad (4.45)$$

но мы должны изменить знаки в условиях диагональной вогнутости (4.29) и (4.30):

$$f''_+ \leq \frac{f'_- - f'_+}{2T}, \quad (4.46)$$

$$f''_- \leq \frac{f'_- - f'_+}{2T}. \quad (4.47)$$

В этой ситуации естественно ввести функции

$$D_+^R = \frac{f'_- - f'_+}{2T} - f''_+ \quad \text{и} \quad D_-^R = \frac{f'_- - f'_+}{2T} - f''_-. \quad (4.48)$$

С таким определением условие диагональной вогнутости остается неизменным: $D_\pm^R \geq 0$. Наконец, аналогом уравнения (4.32) является следующее уравнение:

$$T'_R = \frac{(\varepsilon + T_R)D_+^R - (\varepsilon - T_R)D_-^R}{(\varepsilon + T_R)D_+^R + (\varepsilon - T_R)D_-^R}. \quad (4.49)$$

До сих пор мы использовали обозначения D_\pm^R и D_\pm^L для функций переменной u . Теперь мы введём функции D_\pm , определённые во всей плоскости, кроме оси $x_2 = 0$.

Определение 4.6.

$$D_+(x) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{f'_+(x_1 + x_2) - f'_-(x_1 - x_2)}{2x_2} - f''_+(x_1 + x_2); \quad (4.50)$$

$$D_-(x) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{f'_+(x_1 + x_2) - f'_-(x_1 - x_2)}{2x_2} - f''_-(x_1 - x_2). \quad (4.51)$$

Функции D_\pm^R и D_\pm^L , определённые выше для случая правой или левой ёлки со стволовыми функциями T_R и T_L соответственно, могут быть выражены через D_\pm следующим образом:

$$D_\pm^L(u) = D_\pm(u - \varepsilon, T_L(u)), \quad D_\pm^R(u) = D_\pm(u + \varepsilon, -T_R(u)).$$

Теперь мы можем утверждать, что условия $D_\pm \geq 0$ являются необходимыми и достаточными условиями для диагональной вогнутости не только на ёлках, но и на областях Ω_ε^R и Ω_ε^L . Условие (2.2) вогнутости на Ω_ε^R может быть переписано как $D_\pm(u, \varepsilon) \geq 0$, а условие (2.4) вогнутости на Ω_ε^L как $D_\pm(u, -\varepsilon) \geq 0$.

§5. ИССЛЕДОВАНИЕ ВЕКТОРНОГО ПОЛЯ УРАВНЕНИЯ (4.32)

В этом разделе мы исследуем поведение интегральных кривых векторного поля дифференциального уравнения (4.32), описывающих левые ёлки. Мы сдвинем первую координату на ε : вместо $u - \varepsilon$ будем писать x_1 , в то время как T остаётся второй координатой x_2 . Тогда для левой ёлки у функции f_+ аргументом будет $x_1 + x_2$ вместо $u + T - \varepsilon$, а у функции f_- аргументом будет $x_1 - x_2$ вместо $u - T - \varepsilon$. Так нам будет удобнее рассматривать эволюцию интегральных кривых при увеличении параметра ε . Если $f'_+(u_0) = f'_-(u_0)$ для некоторого u_0 , то узел

$(u_0, 0)$ не меняет своего положения при росте ε , а соответствующая точка, где левая ёлка пересекает среднюю линию полосы, это $(u_0 + \varepsilon, 0)$, т.е. левая ёлка движется вправо.

В дальнейшем мы будем рассматривать параметризацию $x = x(t)$ исследуемых интегральных кривых, удовлетворяющую уравнениям

$$\begin{cases} 2\dot{x}_1 = (\varepsilon - x_2)[f'_+(x_1 + x_2) - f'_-(x_1 - x_2) - 2x_2 f''_-(x_1 - x_2)] \\ \quad + (\varepsilon + x_2)[f'_+(x_1 + x_2) - f'_-(x_1 - x_2) - 2x_2 f''_+(x_1 + x_2)], \\ 2\dot{x}_2 = (\varepsilon - x_2)[f'_+(x_1 + x_2) - f'_-(x_1 - x_2) - 2x_2 f''_-(x_1 - x_2)] \\ \quad - (\varepsilon + x_2)[f'_+(x_1 + x_2) - f'_-(x_1 - x_2) - 2x_2 f''_+(x_1 + x_2)]. \end{cases} \quad (5.1)$$

Чтобы получить более компактные формулы, мы опустим аргументы функций f_{\pm} и их производных, предполагая, что функции со знаком \pm всегда имеют аргумент $x_1 \pm x_2$. Таким образом, вместо (5.1) мы будем писать

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = (\varepsilon - x_2)\left[\frac{1}{2}(f'_+ - f'_-) - x_2 f''_-\right] + (\varepsilon + x_2)\left[\frac{1}{2}(f'_+ - f'_-) - x_2 f''_+\right], \\ \dot{x}_2 = (\varepsilon - x_2)\left[\frac{1}{2}(f'_+ - f'_-) - x_2 f''_-\right] - (\varepsilon + x_2)\left[\frac{1}{2}(f'_+ - f'_-) - x_2 f''_+\right] \end{cases} \quad (5.2)$$

или

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = \varepsilon(f'_+ - f'_-) - x_2(\varepsilon - x_2)f''_- - x_2(\varepsilon + x_2)f''_+, \\ \dot{x}_2 = x_2(f'_- - f'_+) - x_2(\varepsilon - x_2)f''_- + x_2(\varepsilon + x_2)f''_+. \end{cases} \quad (5.3)$$

Мы начинаем с описания стационарных точек системы, то есть точек, где правая часть уравнения обращается в ноль. Прежде всего рассмотрим стационарные точки на средней линии $x_2 = 0$. Они имеют вид $(u_0, 0)$, где u_0 определяется уравнением

$$f'_+(u_0) - f'_-(u_0) = 0. \quad (5.4)$$

Интервалы средней линии между этими стационарными точками являются интегральными кривыми векторного поля. Любая левая ёлка может пересекать среднюю линию полосы только в точках $(u_0 + \varepsilon, 0)$, где u_0 – решение уравнения (5.4). Симметрично, точки пересечения правых ёлок со средней линией могут иметь только вид $(u_0 - \varepsilon, 0)$.

Чтобы описать поведение интегральной кривой в окрестности стационарной точки, мы вычислим матрицу Якоби системы (5.2):

$$\begin{aligned}
J(x) &= \begin{pmatrix} J_{11}(x) & J_{12}(x) \\ J_{21}(x) & J_{22}(x) \end{pmatrix}, \quad \text{где} \\
J_{11}(x) &= \varepsilon(f_+'' - f_-'') - x_2(\varepsilon - x_2)f_-''' - x_2(\varepsilon + x_2)f_+''', \\
J_{12}(x) &= 2x_2(f_-'' - f_+'') + x_2(\varepsilon - x_2)f_-''' - x_2(\varepsilon + x_2)f_+''', \\
J_{21}(x) &= x_2(f_-'' - f_+'') - x_2(\varepsilon - x_2)f_-''' + x_2(\varepsilon + x_2)f_+''', \\
J_{22}(x) &= (f_-' - f_+'') - (\varepsilon - x_2)(f_-'' - x_2f_-''') + (\varepsilon + x_2)(f_+'' + x_2f_+''').
\end{aligned} \tag{5.5}$$

Пусть u_0 – корень уравнения (5.4). Тогда в стационарной точке $x = (u_0, 0)$ имеет место равенство

$$J(u_0, 0) = \varepsilon((f_+''(u_0) - f_-''(u_0)) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

В дальнейшем мы предполагаем, что уравнение (5.4) имеет только конечное число простых корней. Поэтому $f_+''(u_0) - f_-''(u_0) \neq 0$, и якобиан с точностью до скалярного множителя является тождественным оператором. Это означает, что стационарная точка $(u_0, 0)$ всегда является дикритическим узлом и локальное поведение интегральных кривых показано на рис. 4².

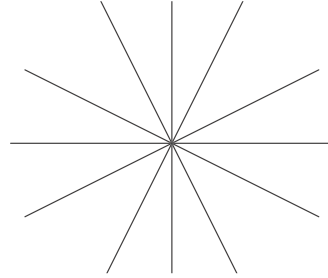


Рис. 4. Интегральные кривые в окрестности узла $(u_0, 0)$.

²На локальных рисунках мы изображаем поведение интегральных кривых ли-
неаризованной системы, отличающееся от исходной системы диффеоморфизмом с
единичным якобианом

Как уже было сказано, мы предполагаем выполнение следующих условий: $f'_+(u_0) = f'_-(u_0)$ и $f''_+(u_0) \neq f''_-(u_0)$. Рассмотрим две кривые в окрестности точки $(u_0, 0)$, определённые уравнениями (5.6) и (5.7):

$$f'_+(x_1 + x_2) - f'_-(x_1 - x_2) - 2x_2 f''_+(x_1 + x_2) = 0 \quad (5.6)$$

(это означает $D_+ = 0$ при $x_2 \neq 0$) и

$$f'_+(x_1 + x_2) - f'_-(x_1 - x_2) - 2x_2 f''_-(x_1 - x_2) = 0 \quad (5.7)$$

(это означает $D_- = 0$ при $x_2 \neq 0$). Если f_{\pm} — гладкие функции, то каждое из уравнений (5.6) и (5.7) в окрестности точки $(u_0, 0)$ имеет единственное гладкое решение $x_1 = x_1(x_2)$. Это следует из теоремы о неявной функции и того, что производные левых частей равенств (5.6) и (5.7) по x_1 в точке $(u_0, 0)$ равны $f''_+(u_0) - f''_-(u_0) \neq 0$. Эти кривые пересекаются в узле $(u_0, 0)$. Далее мы увидим, что при малых ε пересечение кривой (5.6) с границей $x_2 = \varepsilon$ и пересечение кривой (5.7) с границей $x_2 = -\varepsilon$ дают нам ещё две стационарные точки векторного поля: (u_+, ε) и $(u_-, -\varepsilon)$.

Предложение 5.1. *Кривая $D_+(x) = 0$ в окрестности точки $(u_0, 0)$ описывается уравнением*

$$x_1 = u_0 + x_2 + \varkappa_+ x_2^2 + O(x_2^3). \quad (5.8)$$

Кривая $D_-(x) = 0$ в окрестности точки $(u_0, 0)$ описывается уравнением

$$x_1 = u_0 - x_2 + \varkappa_- x_2^2 + O(x_2^3). \quad (5.9)$$

Здесь

$$\varkappa_{\pm} = \pm \frac{2f'''_{\pm}(u_0)}{f''_+(u_0) - f''_-(u_0)}. \quad (5.10)$$

Знак функции D_{\pm} справа от кривой $D_{\pm} = 0$ совпадает со знаком выражения $x_2(f''_+(u_0) - f''_-(u_0))$, а слева — противоположен ему.

Доказательство. Рассмотрим функцию D_+ при фиксированном $x_2 \neq 0$ как функцию от x_1 на интервале $[u_0, u_0 + 2x_2]$. Если x_2 достаточно мало, то эта функция имеет противоположные знаки на концах

интервала:

$$\begin{aligned} D_+(u_0, x_2) &= \frac{f'_+(u_0) + x_2 f''_+(u_0) - f'_-(u_0) + x_2 f''_-(u_0)}{2x_2} - f''_+(u_0) + O(x_2) \\ &= \frac{1}{2}(f''_-(u_0) - f''_+(u_0)) + O(x_2), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} D_+(u_0 + 2x_2, x_2) &= \frac{f'_+(u_0) + 3x_2 f''_+(u_0) - f'_-(u_0) - x_2 f''_-(u_0)}{2x_2} - f''_+(u_0) + O(x_2) \\ &= \frac{1}{2}(f''_+(u_0) - f''_-(u_0)) + O(x_2). \end{aligned}$$

Следовательно, внутри интервала существует корень $x_1 = x_1(x_2)$. Единственность корня гарантируется упомянутой выше теоремой о неявной функции.

Знак функции D_+ справа от кривой $D_+ = 0$ совпадает со знаком производной

$$\begin{aligned} \frac{\partial D_+(x)}{\partial x_1} &= \frac{f''_+(x_1 + x_2) - f''_-(x_1 - x_2)}{2x_2} - f'''_+(x_1 + x_2) \\ &= \frac{f''_+(u_0) - f''_-(u_0)}{2x_2} + O(1), \end{aligned}$$

а слева знак противоположен.

Чтобы доказать представление (5.8), мы разложим функцию $x_1(x_2)$ до членов второго порядка по x_2 : $x_1 = u_0 + c_1 x_2 + c_2 x_2^2 + O(x_2^3)$. Тогда

$$\begin{aligned} 0 = D_+(x_1, x_2) &= \frac{1}{2x_2} \left(f'_+(u_0) + f''_+(u_0)((c_1 + 1)x_2 + c_2 x_2^2) \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2} f'''_+(u_0)((c_1 + 1)x_2)^2 + O(x_2^3) \right. \\ &\quad \left. - f'_-(u_0) - f''_-(u_0)((c_1 - 1)x_2 + c_2 x_2^2) - \frac{1}{2} f'''_-(u_0)((c_1 - 1)x_2)^2 + O(x_2^3) \right) \\ &\quad - f''_+(u_0) - (c_1 + 1)x_2 f'''_+(u_0) + O(x_2^2) \\ &= \frac{c_1 - 1}{2} (f''_+(u_0) - f''_-(u_0)) + \left(\frac{c_2}{2} (f''_+(u_0) - f''_-(u_0)) \right. \\ &\quad \left. + \frac{c_1^2 - 2c_1 - 3}{4} f'''_+(u_0) - \frac{(c_1 - 1)^2}{4} f'''_-(u_0) \right) x_2 + O(x_2^2). \end{aligned}$$

Постоянный член даёт значение $c_1 = 1$, а затем коэффициент при x_2 даёт $c_2 = \varkappa_+$.

Доказательство второй части предложения полностью аналогично: вместо функции D_+ мы рассматриваем функцию D_- . \square

Сосчитаем наклон кривой $D_+ = 0$:

$$d(2x_2 D_+) = (f_+'' - f_-'' - 2x_2 f_+''') dx_1 + (f_+'' + f_-'' - 2f_+'' - 2x_2 f_+''') dx_2 = 0.$$

Поэтому

$$\frac{dx_2}{dx_1} = \frac{f_+'' - f_-'' - 2x_2 f_+'''}{f_+'' - f_-'' + 2x_2 f_+'''} = 1 - \frac{4x_2 f_+'''}{f_+'' - f_-'' + 2x_2 f_+'''} = 1 - 2\kappa_+ x_2 + O(x_2^2).$$

Аналогично для наклона кривой $D_- = 0$ получаем выражение:

$$\frac{dx_2}{dx_1} = -1 + 2\kappa_- x_2 + O(x_2^2).$$

Итак, мы делаем следующий вывод.

Замечание 5.2. При малых ε наклон кривой $D_+ = 0$ положителен и, если $\kappa_+ > 0$, то он меньше единицы в верхней половине полосы и больше единицы в нижней половине полосы. При малых ε наклон кривой $D_- = 0$ отрицателен.

Следствие 5.3. Если ε достаточно мало, то существует единственный корень u_+ (u_+^L) уравнения $D_+(u, \varepsilon) = 0$, то есть

$$f_+'(u + \varepsilon) - f_-'(u - \varepsilon) - 2\varepsilon f_+''(u + \varepsilon) = 0, \quad (5.11)$$

такой, что $u_+ \in (u_0, u_0 + 2\varepsilon)$. Более того,

$$u_+ = u_0 + \varepsilon + \kappa_+ \varepsilon^2 + O(\varepsilon^3). \quad (5.12)$$

Аналогично, существует единственный корень u_- (u_-^L) уравнения $D_-(u, -\varepsilon) = 0$, то есть

$$f_-'(u + \varepsilon) - f_+'(u - \varepsilon) - 2\varepsilon f_-''(u + \varepsilon) = 0, \quad (5.13)$$

такой, что $u_- \in (u_0, u_0 + 2\varepsilon)$. Более того,

$$u_- = u_0 + \varepsilon + \kappa_- \varepsilon^2 + O(\varepsilon^3). \quad (5.14)$$

При рассмотрении поведения интегральных кривых поля (5.2) важную роль будет играть следующее простое утверждение.

Предложение 5.4. Наклон интегральной кривой поля (5.2) в точке x строго возрастает с ростом ε , если $x_2 D_+(x) D_-(x) > 0$, и строго убывает, если $x_2 D_+(x) D_-(x) < 0$.

Доказательство. Формула (5.2) даёт нам следующее выражение для наклона интегральной кривой:

$$\frac{\dot{x}_2}{\dot{x}_1} = \frac{(\varepsilon - x_2)D_- - (\varepsilon + x_2)D_+}{(\varepsilon - x_2)D_- + (\varepsilon + x_2)D_+}. \quad (5.15)$$

Дифференцирование этого выражения по ε даёт нам формулу, которая непосредственно влечёт нужный результат:

$$\frac{\partial}{\partial \varepsilon} \left(\frac{\dot{x}_2}{\dot{x}_1} \right) = \frac{4x_2 D_- D_+}{[(\varepsilon - x_2)D_- + (\varepsilon + x_2)D_+]^2}. \quad (5.16)$$

□

Теперь мы исследуем векторное поле около стационарной точки (u_+, ε) . Поскольку u_+ удовлетворяет уравнению (5.11), формула (5.5) принимает вид

$$J(u_+, \varepsilon) = \varepsilon (f_+''(u_+ + \varepsilon) - f_-''(u_+ - \varepsilon) - 2\varepsilon f_+'''(u_+ + \varepsilon)) \begin{pmatrix} 1 & -2 - 3\varepsilon \kappa_+ \\ -1 & \varepsilon \kappa_+ \end{pmatrix}, \quad (5.17)$$

где

$$\kappa_+ = \frac{2f_+'''(u_+ + \varepsilon)}{f_+''(u_+ + \varepsilon) - f_-''(u_+ - \varepsilon) - 2\varepsilon f_+'''(u_+ + \varepsilon)} \quad (5.18)$$

и $\kappa_+ \rightarrow \varkappa_+$ при $\varepsilon \rightarrow 0$. Для малых значений параметра ε имеем

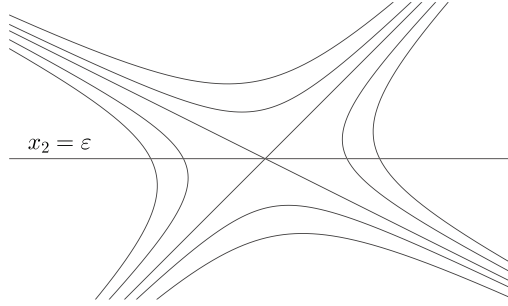
$$J(u_+, \varepsilon) = \varepsilon (f_+''(u_0) - f_-''(u_0)) \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} + O(\varepsilon^2).$$

Собственные значения матрицы в правой части равны -1 и 2 , то есть это седловая точка. Собственные векторы имеют вид $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$, то есть две интегральные кривые, проходящие через эту стационарную точку, имеют наклоны 1 и $-\frac{1}{2}$ (с точностью до $O(\varepsilon)$). Поведение интегральных кривых около стационарной точки (u_+, ε) показано на рис. 5.

Нам нужно более подробное приближение собственного вектора (5.17), соответствующего собственному значению λ , которое стремится к -1 при $\varepsilon \rightarrow 0$. Легко вычислить, что $\lambda = -1 - \frac{1}{3}\varkappa_+\varepsilon + O(\varepsilon^2)$, и соответствующий собственный вектор с точностью до $O(\varepsilon^2)$ равен

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 - \frac{4}{3}\varkappa_+\varepsilon \end{pmatrix}. \quad (5.19)$$

Это означает, что наклон соответствующей интегральной кривой в точке (u_+, ε) равен $1 - \frac{4}{3}\varkappa_+\varepsilon + O(\varepsilon^2)$.


 Рис. 5. Интегральные кривые вокруг седла (u_+^t, ε) .

Нам будет важно сравнить наклон этой кривой в данной точке с наклоном кривой $D_+(x) = 0$. Из формулы (5.8) получаем формулу для наклона кривой $D_+(x) = 0$:

$$\frac{dx_2}{dx_1} = 1 - 2\kappa_+ x_2 + O(x_2^2). \quad (5.20)$$

Таким образом, взаимное расположение этих двух кривых около точки (u_+, ε) определяется знаком выражения κ_+ .

Теперь рассмотрим стационарную точку $(u_-, -\varepsilon)$. Поскольку значение u_- удовлетворяет уравнению (5.13), формула (5.5) принимает вид

$$J(u_-, -\varepsilon) = \varepsilon(f_+''(u_- - \varepsilon) - f_-''(u_- + \varepsilon) + 2\varepsilon f_-'''(u_- + \varepsilon)) \begin{pmatrix} 1 & 2 + 3\varepsilon\kappa_- \\ 1 & \varepsilon\kappa_- \end{pmatrix},$$

где

$$\kappa_- = \frac{2f_-'''(u_- + \varepsilon)}{f_-''(u_- + \varepsilon) - f_+''(u_- - \varepsilon) - 2\varepsilon f_-'''(u_- + \varepsilon)}.$$

Поэтому для малых ε имеем

$$J(u_-, -\varepsilon) \approx \varepsilon(f_+''(u_0) - f_-''(u_0)) \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Матрица имеет те же собственные значения -1 и 2 , то есть это также седловая точка. Теперь собственные векторы равны $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, то есть две интегральные кривые, проходящие через эту стационарную

точку, имеют наклоны -1 и $\frac{1}{2}$. Поведение интегральных линий вблизи стационарной точки $(u_-, -\varepsilon)$ показано на рис. 6.

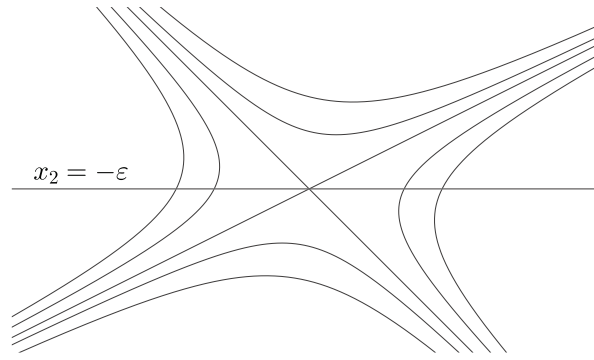


Рис. 6. Интегральные кривые вокруг седла $(u_-^L, -\varepsilon)$.

Собирая всю эту информацию, мы можем понять поведение интегральных кривых векторного поля вблизи этих трех стационарных точек при малых значениях ε . Общая картина показана на рис. 7.

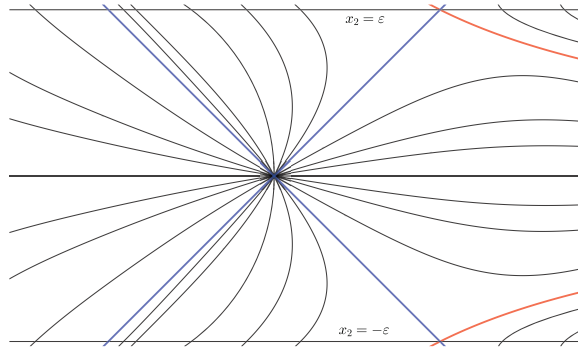


Рис. 7. Интегральные кривые вблизи узла $(u_0, 0)$ при малых значениях ε .

В конце этого раздела мы перечислим некоторые изменения, которые должны быть внесены, если мы рассмотрим векторное поле уравнения (4.49), интегральная кривая которого может быть стволом правой ёлки. В этом случае у нас, конечно, будет симметричная картина. При достаточно малых ε у нас есть следующие три стационарные точки: $(u_0, 0)$, (u_+^R, ε) и $(u_-^R, -\varepsilon)$, где u_+^R – единственное решение уравнения

$$f'_+(u - \varepsilon) - f'_-(u + \varepsilon) + 2\varepsilon f''_+(u - \varepsilon) = 0 \quad (5.21)$$

в интервале $(u_0 - 2\varepsilon, u_0)$ и u_-^R – единственное решение уравнения

$$f'_-(u - \varepsilon) - f'_+(u + \varepsilon) + 2\varepsilon f''_-(u - \varepsilon) = 0 \quad (5.22)$$

в том же интервале. Более того,

$$u_{\pm}^R = u_0 - \varepsilon + \varkappa_{\pm}\varepsilon^2 + o(\varepsilon^2), \quad (5.23)$$

где величины \varkappa_{\pm} определены в (5.10).

§6. ПРОВОИ

Теперь мы готовы построить фолиацию, которую мы назвали пробоем. Сначала рассмотрим левые пробой. Напомним, что это горизонтальная ёлка, растущая слева направо от одной границы до другой. Любой пробой должен пересекать среднюю линию полосы, то есть должно существовать значение u , при котором $T(u) = 0$. Из предыдущего раздела мы знаем, что точка $(u, 0)$ должна быть стационарной точкой, где $f'_+(u - \varepsilon) = f'_-(u - \varepsilon)$. Это можно также видеть непосредственно из соотношения (4.27). (Для правой ёлки это условие $f'_+(u + \varepsilon) = f'_-(u + \varepsilon)$). То есть это именно те точки, в окрестности которых мы не смогли построить ни правую, ни левую простую фолиацию при малых ε , см. раздел 2.

В этом разделе мы строим фолиацию пробоя для достаточно малых ε вблизи точки u_0 , решая уравнение (4.1). SW-пробой показан на рис. 8. Название “SW-пробой” означает, что пробой приходит с юго-запада. Другими словами, это горизонтальная ёлка, растущая слева направо от нижней границы до верхней. Мы обозначаем область, фолируемую этим пробоем, символом $\Omega_{\varepsilon}^{sw}(v, u)$. Здесь u и v – абсциссы концов интервала пересечения заматаемой области со средней линией.

Построить такую фолиацию можно не для всех возможных граничных значений. Поэтому мы налагаем следующие дополнительные условия:

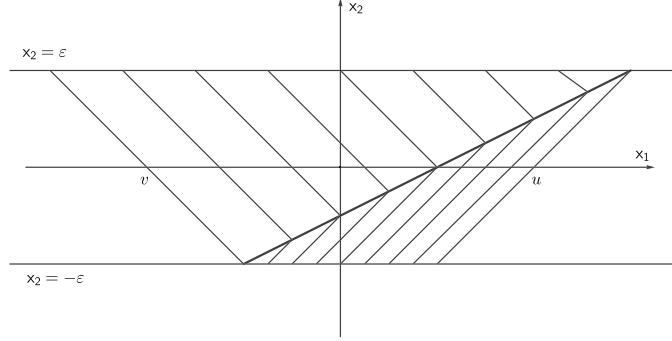


Рис. 8. SW-пробой на его области $\Omega_\varepsilon^{\text{SW}}(v, u)$.

- u_0 – простой корень уравнения (4.1), то есть

$$f'_+(u_0) = f'_-(u_0) \quad \text{и} \quad f''_+(u_0) \neq f''_-(u_0);$$

-

$$f'''_+(u_0) \neq 0, \quad \text{если} \quad f''_+(u_0) > f''_-(u_0),$$

и

$$f'''_-(u_0) \neq 0, \quad \text{если} \quad f''_+(u_0) < f''_-(u_0).$$

Фолиации, которые возникают в случае, когда эти дополнительные условия не выполняются, являются более сложными и будут рассмотрены позже.

Наша цель – доказать следующее утверждение.

Предложение 6.1. Пусть $f'_+(u_0) = f'_-(u_0)$, $f''_+(u_0) > f''_-(u_0)$, $f'''_+(u_0) > 0$, и пусть $u_+ = u_+^L$ является корнем уравнения (5.11), описанным в следствии 5.3. Тогда для достаточно малых ε существует такой SW-пробой с определённой на некотором интервале $[v_- + \varepsilon, u_+ + \varepsilon]$ стволочной функцией $T = T_L$, что

- $T(u_0 + \varepsilon) = 0$, $T(u_+ + \varepsilon) = \varepsilon$;
- $v_- = v_-^L$, $v_- < u_0 - \varepsilon$, решает уравнение $T(v_- + \varepsilon) = -\varepsilon$;

- формула (4.2) с функцией $A = A_L$, определённой равенством (4.16), задаёт беллмановский кандидат на области $\Omega_\varepsilon^{\text{sw}}(v_-, u_+)$, фоллированной данным пробоем;
- существует число $\delta = \delta(\varepsilon)$, для которого стандартные беллмановские кандидаты на $\Omega_\varepsilon^{\text{R}}(u_+, u_+ + \delta)$ и на $\Omega_\varepsilon^{\text{L}}(v_- - \delta, v_-)$ (см. формулы (2.1) и (2.3)) вместе с описанным кандидатом на $\Omega_\varepsilon^{\text{sw}}(v_-, u_+)$ образуют C^1 -гладкий беллмановский кандидат на объединении этих трёх областей.

Знаки второй и третьей производных определяют направление соответствующего пробоя. Так, отражение относительно прямой $x_1 = u_0$ даёт нам SE-пробой.

Предложение 6.2. Пусть $f'_+(u_0) = f'_-(u_0)$, $f''_+(u_0) > f''_-(u_0)$, $f'''_+(u_0) < 0$, и пусть $u_+ = u_+^{\text{R}}$ является корнем уравнения (5.21). Тогда для достаточно малых ε существует такой SE-пробой с определённой на некотором интервале $[v_- - \varepsilon, u_+ - \varepsilon]$ стволовой функцией $T = T_{\text{R}}$, что

- $T(u_0 - \varepsilon) = 0$, $T(u_+ - \varepsilon) = \varepsilon$;
- $v_- = v_-^{\text{R}}$, $v_- > u_0 + \varepsilon$, решает уравнение $T(v_- - \varepsilon) = -\varepsilon$;
- формула (4.2) с функцией $A = A_{\text{R}}$, определённой равенством (4.44), задаёт беллмановский кандидат на области $\Omega_\varepsilon^{\text{SE}}(u_+, v_-)$, фоллированной данным пробоем;
- существует число $\delta = \delta(\varepsilon)$, для которого стандартные беллмановские кандидаты на $\Omega_\varepsilon^{\text{R}}(u_+ - \delta, u_+)$ и на $\Omega_\varepsilon^{\text{L}}(v_- - \delta, v_-)$ (см. формулы (2.1) и (2.3)) вместе с описанным кандидатом на $\Omega_\varepsilon^{\text{SE}}(u_+, v_-)$ порождают C^1 -гладкий беллмановский кандидат на объединении этих трёх областей.

Отражение относительно прямой $x_2 = 0$ меняет местами f_+ и f_- . Это приводит к следующим двум утверждениям.

Предложение 6.3. Пусть $f'_+(u_0) = f'_-(u_0)$, $f''_+(u_0) < f''_-(u_0)$, $f'''_-(u_0) > 0$, и пусть $u_- = u_-^{\text{L}}$ является корнем уравнения (5.13), описанного в следствии 5.3. Тогда для достаточно малых ε существует такой NW-пробой с определённой на некотором интервале $[v_+ + \varepsilon, u_- + \varepsilon]$ стволовой функцией $T = T_{\text{L}}$, что

- $T(u_0 + \varepsilon) = 0$, $T(u_- + \varepsilon) = -\varepsilon$;
- $v_+ = v_+^{\text{L}}$, $v_+ < u_0 - \varepsilon$, решает уравнение $T(v_+ + \varepsilon) = \varepsilon$;

- формула (4.2) с функцией $A = A_L$, определённой равенством (4.16), задаёт беллмановский кандидат на области $\Omega_\varepsilon^{\text{NW}}(v_+, u_-)$, фоллированной данным пробоем;
- существует число $\delta = \delta(\varepsilon)$, для которого стандартные беллмановские кандидаты на $\Omega_\varepsilon^{\text{R}}(u_-, u_- + \delta)$ и на $\Omega_\varepsilon^{\text{L}}(v_+ - \delta, v_+)$ (см. формулы (2.1) и (2.3)) вместе с описанным кандидатом на $\Omega_\varepsilon^{\text{NW}}(v_+, u_-)$ порождают C^1 -гладкий беллмановский кандидат на объединении этих трёх областей.

Предложение 6.4. Пусть $f'_+(u_0) = f'_-(u_0)$, $f''_+(u_0) < f''_-(u_0)$, $f'''_+(u_0) < 0$, и пусть $u_- = u_-^{\text{R}}$ является корнем уравнения (5.22). Тогда для достаточно малых ε существует такой NE-пробой с определённой на некотором интервале $[v_+ - \varepsilon, u_- - \varepsilon]$ стволовой функцией $T = T_{\text{R}}$, что

- $T(u_0 - \varepsilon) = 0$, $T(u_- - \varepsilon) = -\varepsilon$;
- $v_+ = v_+^{\text{R}}$, $v_+ > u_0 + \varepsilon$, решает уравнение $T(v_+ - \varepsilon) = \varepsilon$;
- формула (4.2) с функцией $A = A_{\text{R}}$, определённой равенством (4.44), задаёт беллмановский кандидат на области $\Omega_\varepsilon^{\text{NE}}(u_-, v_+)$, фоллированной данным пробоем;
- существует число $\delta = \delta(\varepsilon)$, для которого стандартные беллмановские кандидаты на $\Omega_\varepsilon^{\text{R}}(u_- - \delta, u_-)$ и на $\Omega_\varepsilon^{\text{L}}(v_+, v_- + \delta)$ (см. формулы (2.1) и (2.3)) вместе с описанным кандидатом на $\Omega_\varepsilon^{\text{NE}}(u_+, v_-)$ порождают C^1 -гладкий беллмановский кандидат на объединении этих трёх областей.

Будем рассматривать только случай SW-пробоя в окрестности точки u_0 , где $f'_+(u_0) = f'_-(u_0)$, $f''_+(u_0) > f''_-(u_0)$ и $f'''_+(u_0) > 0$. Для этого мы должны решить уравнение (4.32). Мы ищем решение T на некотором интервале $[v_- + \varepsilon, u_+ + \varepsilon]$ с граничными условиями $T(v_- + \varepsilon) = -\varepsilon$, $T(u_+ + \varepsilon) = \varepsilon$ и удовлетворяющее условиям выпуклости (4.33).

Доказательство предложения 6.1. Исследуя векторное поле (5.1) в предыдущем разделе, мы утверждали, что существует ровно одна интегральная кривая этого поля, соединяющая узел $(u_0, 0)$ с седловой точкой на верхней границе (u_+, ε) . Сейчас мы докажем это утверждение и более детально исследуем свойства этой кривой.

Как мы помним, поле (5.1) сдвинуто горизонтально на ε по сравнению с полем, порождённым уравнением (4.32). Указанная интегральная кривая даст нам верхнюю половину ствола ёлки между точками $(u_0 + \varepsilon, 0)$ и $(u_+ + \varepsilon, \varepsilon)$. Чтобы получить нижнюю половину ствола, мы

должны взять единственную интегральную кривую, начинающуюся в том же узле, но направленную к нижней границе и такую, что вместе с верхней половиной они образуют гладкую кривую класса C^1 в натуральной параметризации (см. одну из жирных кривых на рисунке 7). Нам нужно будет только проверить, что выполняются условия выпуклости (4.33). Они гарантируют нам, что

- угловой коэффициент ствола не превышает 1, т. е. мы можем построить желаемую фолиацию (см. рис. 8);
- соответствующая функция диагонально вогнута.

Обозначим символом ℓ_ε интегральную кривую поля (5.2), которая выходит из точки (u_+, ε) с положительным наклоном. Мы знаем, что такая кривая существует и единственна. Более того, для её наклона в точке (u_+, ε) существует выражение (см. (5.19)):

$$1 - \frac{4}{3}\varkappa_+\varepsilon + O(\varepsilon^2). \quad (6.1)$$

Наложённые на производные функций f_\pm условия обеспечивают неравенство $\varkappa_+ > 0$. Из формулы (5.20) мы видим, что наклон кривой $D_+ = 0$ в точке (u_+, ε) равен $1 - 2\varkappa_+\varepsilon + O(\varepsilon^2)$, т. е. меньше наклона кривой ℓ_ε . Как уже отмечалось в предложении 5.1, область, где $D_+ > 0$, находится справа от кривой $D_+ = 0$ в верхней половине полосы и слева от этой кривой в нижней половине полосы (см. рис. 9).

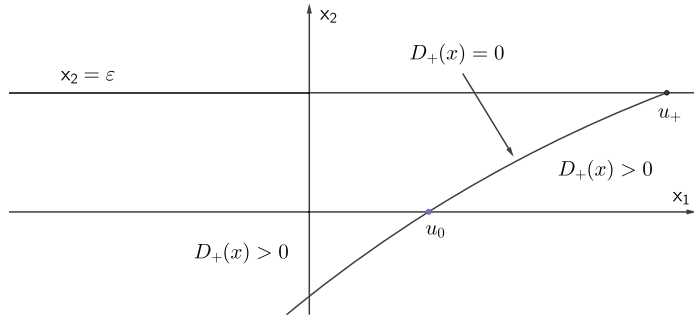


Рис. 9. Области, где $D_+ > 0$.

Рассмотрим открытую подобласть ω верхней половины полосы, ограниченную кривой $D_+ = 0$, средней линией $x_2 = 0$ и вертикальной

прямой $x_1 = u_+$. В этой области выполнено неравенство $D_+ > 0$. Как мы только что пояснили, кривая ℓ_ε , выходящая из седловой точки (u_+, ε) , в окрестности этой точки лежит ниже кривой $D_+ = 0$, поэтому она заходит в область ω . Докажем, что второй раз она пересекает границу ω в узле $(u_0, 0)$.

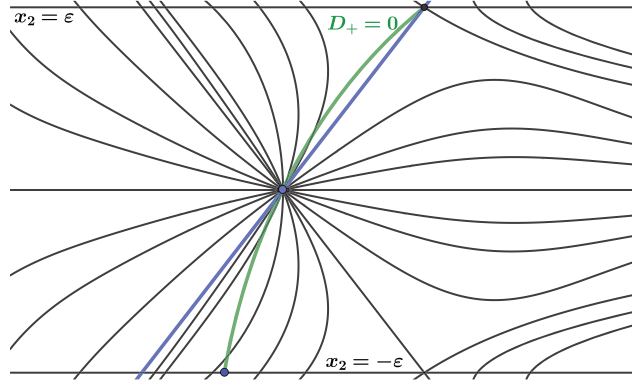
Отметим, что в силу предположения $f'_+(u_0) > f'_-(u_0)$ неравенство $f''_+ > f''_-$ выполнено в некоторой окрестности точки $(u_0, 0)$, поэтому при достаточно малом ε оно выполнено в ω . Неравенство $f''_+ > f''_-$ при $x_2 > 0$ влечет $D_- > D_+$, поэтому в области ω также выполнено неравенство $D_- > 0$. Но тогда выполнено и $\dot{x}_1 > 0$ (см. (5.2)). Это означает, что интегральная кривая векторного поля (5.2) в области ω является графиком некоторой функции первой координаты.

Угловым коэффициентом любой интегральной кривой поля (5.2) равен 1 в точках пересечения с кривой $D_+ = 0$ (за исключением, возможно, стационарных точек), в то время как наклон самой кривой $D_+ = 0$, согласно формуле (5.20), в верхней половине полосы строго меньше 1. То есть интегральные кривые в верхней половине полосы пересекают кривую $D_+ = 0$ сверху вниз при движении справа налево. Поэтому интегральная кривая ℓ_ε не может выйти из области ω через границу $D_+ = 0$ в верхней половине полосы. Далее, две интегральные кривые векторного поля могут пересекаться только в стационарных точках, то есть среднюю линию кривая ℓ_ε может пересечь лишь в узле $(u_0, 0)$. Тем самым, мы доказали, что интегральная кривая ℓ_ε соединяет две стационарные точки: седло (u_+, ε) и узел $(u_0, 0)$ (см. рис. 10).

Зафиксируем $\varepsilon > 0$ и временно будем рассматривать $\delta \leq \varepsilon$. Наклон кривой $\delta \mapsto (u_+(\delta), \delta)$ равен

$$\frac{1}{1 + 2\kappa_+\delta + O(\delta^2)} = 1 - 2\kappa_+\delta + O(\delta^2)$$

(см. (5.12)), в то время как наклон кривой ℓ_ε в точке $(u_+(\varepsilon), \varepsilon)$ равен $1 - \frac{4}{3}\kappa_+\varepsilon + O(\varepsilon^2)$ (см. (6.1)), то есть в окрестности этой точки последняя кривая идёт круче. Следовательно, если δ достаточно близко к ε , то точка $(u_+(\delta), \delta)$ находится над кривой ℓ_ε , поэтому кривая ℓ_δ тоже находится над ℓ_ε в некоторой окрестности этой точки. Теперь допустим, что кривая ℓ_δ пересекла в некоторой точке кривую ℓ_ε . Поскольку до первой точки пересечения она шла выше кривой ℓ_ε , в точке пересечения её наклон должен быть не меньше, чем наклон кривой ℓ_ε , что согласно предложению 5.4 невозможно внутри области ω . В силу непрерывности кривой ℓ_δ по δ , мы заключаем, что для любого $\delta < \varepsilon$


 Рис. 10. Интегральные кривые и кривая $D_+ = 0$.

кривая ℓ_δ лежит левее (и выше) кривой ℓ_ε . Таким образом, все кривые ℓ_ε пересекаются только в узле $(u_0, 0)$.

Мы доказали, что $D_\pm > 0$ на любой интегральной кривой ℓ_ε при $x_2 > 0$, поэтому наклон кривой ℓ_ε строго меньше единицы в верхней половине полосы, и теперь нам нужно проверить это в узле $(u_0, 0)$. Фактически, нам нужно проверить, что ℓ_ε не является интегральной кривой, у которой наклон равен единице в узле.

Для этой цели мы вычислим эту интегральную кривую с точностью до второго порядка (по x_2) и сравним с кривой $D_+ = 0$, то есть с уравнением (5.8).

Итак, пусть интересующая нас интегральная кривая задаётся уравнением $x_1 = u_0 + x_2 + \alpha x_2^2 + O(x_2^3)$. Тогда из системы (5.3) получаем

$$\begin{aligned} \frac{\dot{x}_1}{x_2} &= \varepsilon \frac{f'_+(u_0 + 2x_2 + \alpha x_2^2) - f'_-(u_0 + \alpha x_2^2)}{x_2} \\ &\quad - (\varepsilon - x_2)f''_-(u_0) - (\varepsilon + x_2)f''_+(u_0 + 2x_2) + O(x_2^2) \\ &= \varepsilon [(2 + \alpha x_2)f''_+(u_0) + 2x_2 f'''_+(u_0) - \alpha x_2 f''_-(u_0)] \\ &\quad - (\varepsilon - x_2)f''_-(u_0) - (\varepsilon + x_2)(f''_+(u_0) + 2x_2 f'''_+(u_0)) + O(x_2^2) \\ &= (f''_+(u_0) - f''_-(u_0))(\varepsilon - (1 - \alpha\varepsilon)x_2) + O(x_2^2) \end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned}
\frac{\dot{x}_2}{x_2} &= f'_-(u_0) - f'_+(u_0 + 2x_2) - (\varepsilon - x_2)f''_-(u_0) + (\varepsilon + x_2)f''_+(u_0 + 2x_2) + O(x_2^2) \\
&= -2x_2f''_+(u_0) - (\varepsilon - x_2)f''_-(u_0) + (\varepsilon + x_2)(f''_+(u_0) + 2x_2f'''_+(u_0)) + O(x_2^2) \\
&= (f''_+(u_0) - f''_-(u_0))(\varepsilon - (1 - \varkappa_+\varepsilon)x_2) + O(x_2^2).
\end{aligned}$$

Напомним, что параметр \varkappa_+ задан формулой (5.10).

С другой стороны, для гладкой интегральной кривой $x_1 = u_0 + x_2 + \alpha x_2^2 + O(x_2^3)$ мы имеем

$$\dot{x}_1 = [1 + 2\alpha x_2 + O(x_2^2)]\dot{x}_2,$$

поэтому

$$(1 + 2\alpha x_2)(\varepsilon - (1 - \varkappa_+\varepsilon)x_2) = \varepsilon - (1 - \alpha\varepsilon)x_2 + O(x_2^2),$$

откуда $\alpha = -\varkappa_+$.

Сравнивая полученное уравнение исследуемой интегральной кривой $x_1 = u_0 + x_2 - \varkappa_+x_2^2 + O(x_2^3)$ с уравнением кривой $D_+ = 0$ (т. е. с уравнением (5.8): $x_1 = u_0 + x_2 + \varkappa_+x_2^2 + O(x_2^3)$), мы видим, что эта интегральная кривая идёт левее (выше) кривой $D_+ = 0$, т. е. в области, где $D_+ < 0$, и, значит, не может быть интегральной кривой ℓ_ε .

Таким образом, мы заключаем, что кривая ℓ_ε имеет наклон в точке $(u_0, 0)$, строго меньший единицы. Чтобы продолжить её в нижнюю половину полосы, мы выбираем интегральную кривую, выходящую из точки $(u_0, 0)$ влево с тем же наклоном. Таким образом мы получаем C^1 -гладкую кривую ℓ_ε во всей полосе.

Наклон кривой $D_+ = 0$ в нижней половине полосы строго больше единицы, см. замечание 5.2. Рассуждения, аналогичные приведенным для верхней половины полосы, показывают, что кривая ℓ_ε в нижней половине полосы не имеет пересечений с кривой $D_+ = 0$ и находится в области, где $D_+ > 0$.

Мы доказали, что $D_+ \geq 0$ во всех точках кривой ℓ_ε . Второе условие ($D_- \geq 0$) выполняется автоматически, потому что

$$D_- - D_+ = f''_+ - f''_- = f''_+(u_0) - f''_-(u_0) + O(\varepsilon) > 0, \quad (6.2)$$

если ε достаточно мало.

Теперь мы докажем, что при малых ε существует точка пересечения кривой ℓ_ε с нижней границей полосы. Первую координату этой точки мы обозначаем символом v_- . Более того, мы проверим, что $v_- - u_0 = O(\varepsilon)$.

Зафиксируем $\delta > 0$ и рассмотрим кривую ℓ_δ в области $x_2 < 0$. Зафиксируем число $\eta > 0$, при котором эта кривая пересекает прямую $x_2 = -\eta$, и будем рассматривать $\varepsilon \leq \eta$. По тем же причинам, что и в верхней половине полосы, кривые ℓ_ε не пересекаются. Только теперь кривая с бóльшим ε расположена над кривой с меньшим ε . Поэтому при всех $\varepsilon \leq \eta$ существует точка $(v_-(\varepsilon), -\varepsilon)$ между точкой пересечения кривой ℓ_δ с прямой $x_2 = -\varepsilon$ и точкой $(u_0, -\varepsilon)$. Поскольку наклон кривой ℓ_δ в точке $(u_0, 0)$ заключён строго между нулём и единицей, первая координата точки на кривой ℓ_δ есть $O(x_2)$, и стало быть тем более $v_- - u_0 = O(\varepsilon)$.

Итак, мы построили SW-пробой T в области $\Omega_\varepsilon^{\text{sw}}(v_-, u_+)$. Точка u_+ , как мы знаем, является корнем уравнения (5.11). Чтобы построить требуемую область $\Omega_\varepsilon^{\text{B}}(u_+, u_+ + \delta)$, достаточно удовлетворить условиям (2.2). В силу оценки (6.2) нам достаточно проверить только первое условие:

$$f'_+(u + \varepsilon) - f'_-(u - \varepsilon) - 2\varepsilon f''_+(u + \varepsilon) \geq 0, \quad (6.3)$$

если $u \in (u_+, u_+ + \delta)$ для некоторого положительного δ . Поскольку выражение в (6.3) обращается в ноль при $u = u_+$ по определению величины u_+ (см. (5.11)), а его производная

$$f''_+(u + \varepsilon) - f''_-(u - \varepsilon) - 2\varepsilon f'''_+(u + \varepsilon) = f''_+(u_0) - f''_-(u_0) + O(\varepsilon)$$

строго положительна при малых ε , мы заключаем, что неравенство (6.3) верно для некоторого $\delta = \delta(\varepsilon)$, если ε достаточно мало.

К сожалению, мы не можем сказать ничего столь же определённого относительно значения v_- , но поскольку наклон кривой ℓ_ε внутри полосы лежит строго между нулём и единицей, всегда справедливо неравенство

$$v_- < u_0 - \varepsilon. \quad (6.4)$$

Эта оценка достаточна для нас, чтобы приклеить слева фолиацию левых экстремальных сегментов на некоторой области $\Omega_\varepsilon^{\text{L}}(v_- - \delta, v_-)$. Для этого нам нужно проверить, что условия (2.4) выполнены в некоторой левой окрестности точки v_- . Опять же, в силу неравенства (6.2) достаточно проверить только первое условие, то есть

$$f'_-(u + \varepsilon) - f'_+(u - \varepsilon) - 2\varepsilon f''_+(u - \varepsilon) \geq 0, \quad (6.5)$$

если $u \in (v_- - \delta, v_-)$ для некоторого δ , $\delta = O(\varepsilon)$. Разложим выражение (6.5) в точке u_0 и получим

$$f'_-(u+\varepsilon) - f'_+(u-\varepsilon) - 2\varepsilon f''_+(u-\varepsilon) = -(u+\varepsilon-u_0)[f''_+(u_0) - f''_-(u_0)] + O(\varepsilon^2). \quad (6.6)$$

Поскольку для $u \in (v_- - \delta, v_-)$ имеет место неравенство $u + \varepsilon - u_0 < v_- + \varepsilon - u_0 < 0$, выражение в формуле (6.6) строго положительно при достаточно малых ε . \square

§7. ПРИМЕРЫ. МНОГОЧЛЕНЫ ТРЕТЬЕЙ СТЕПЕНИ

В этом разделе мы частично рассмотрим случай, когда граничные функции f_{\pm} являются многочленами третьей степени. Мы не рассмотрим все возможные многочлены, поскольку мы описали не все фолциации, которые могут возникнуть для многочленов третьей степени. Однако рассматриваемые фолциации позволяют описать все случаи, когда значение ε достаточно мало. Другие возможные фолциации будут рассмотрены позже, в следующих разделах, в продолжении этой статьи.

Пусть

$$f_{\pm}(t) = a_3^{\pm} t^3 + a_2^{\pm} t^2 + a_1^{\pm} t + a_0^{\pm}.$$

Начнём со случая $a_3^+ = a_3^- = a_3 \neq 0$. Случай $a_3^+ = a_3^- = 0$ был рассмотрен в разделе 3. Симметрия относительно оси x_2 позволяет рассматривать только случай $a_3 > 0$ (иначе заменяем t на $-t$). Используя симметрию относительно оси x_1 , мы можем предположить, что $a_2^+ \geq a_2^-$ (иначе меняем местами f_+ и f_-).

Сначала рассмотрим самый простой случай $a_2^+ = a_2^-$. Если $a_1^+ = a_1^-$, то $f_+ - f_-$ является константой, и, следовательно, фолциация такая же, как и в симметричном случае, у нас есть горизонтальная ёлка, ствол которой – ось x_1 (см. [7]). Поскольку мы предположили $a_3 > 0$, это будет левая ёлка. В случае $a_3 < 0$ это будет, конечно, симметричная правая ёлка. Таким образом, мы будем предполагать, что $a_1^+ \neq a_1^-$.

При этом предположении мы можем построить простую фолциацию для малых ε . Действительно, прямым вычислением условие (2.2) превращается в

$$\begin{aligned} (a_1^+ - a_1^-) - 12a_3\varepsilon^2 &\geq 0; \\ (a_1^+ - a_1^-) + 12a_3\varepsilon^2 &\geq 0, \end{aligned} \quad (7.1)$$

а условие (2.4) принимает вид

$$\begin{aligned} (a_1^- - a_1^+) + 12a_3\varepsilon^2 &\geq 0; \\ (a_1^- - a_1^+) - 12a_3\varepsilon^2 &\geq 0. \end{aligned} \quad (7.2)$$

Таким образом, для малых ε условие (7.1) выполняется, если $a_1^+ > a_1^-$. Более точно, (7.1) выполняется для $\varepsilon \leq \varepsilon_0$, где

$$\varepsilon_0 \stackrel{\text{def}}{=} \sqrt{\frac{|a_1^+ - a_1^-|}{12a_3}}. \quad (7.3)$$

То есть, для таких ε у нас есть правая простая фолиация $\Omega_\varepsilon^{\mathbb{R}}(-\infty, +\infty)$. Условие (7.2) выполняется, если $a_1^+ < a_1^-$ и $\varepsilon \leq \varepsilon_0$. Таким образом, у нас есть левая простая фолиация $\Omega_\varepsilon^{\mathbb{L}}(-\infty, +\infty)$.

Для $\varepsilon > \varepsilon_0$ мы строим бесконечную левую ёлку, стволом которой будет прямая

$$x_2 = \frac{a_1^+ - a_1^-}{12a_3\varepsilon}.$$

Ограничимся случаем $a_1^+ > a_1^-$. Противоположный случай можно получить, поменяв местами f_+ и f_- .

На самом деле мы можем явно решить уравнение (4.32), потому что оно принимает следующий простой вид:

$$T' = \frac{T(\varepsilon T - \varepsilon_0^2)}{\varepsilon \varepsilon_0^2 - T^3}. \quad (7.4)$$

Все решения этого уравнения представлены семейством

$$u = -\frac{T^2}{2\varepsilon} - \frac{\varepsilon_0^2}{\varepsilon^2}T - \varepsilon \log |T| + \frac{\varepsilon^4 - \varepsilon_0^4}{\varepsilon^3} \log \left| T - \frac{\varepsilon_0^2}{\varepsilon} \right| + \text{const} \quad (7.5)$$

и двумя особыми решениями

$$T = 0 \quad \text{и} \quad T = \frac{\varepsilon_0^2}{\varepsilon}.$$

Мы знаем, что ёлка с $T = 0$ невозможна (см. замечание 4.4), некоторые из ёлок со стволами, заданными формулой (7.5), порождают диагонально вогнутые функции, но минимальная диагонально вогнутая функция порождается стволом $T = \varepsilon_0^2\varepsilon^{-1}$.

Для проверки этого вычислим функции D_\pm (см. (4.50) и (4.51)). В нашем простом случае непосредственные вычисления дают:

$$D_\pm = \frac{a_1^+ - a_1^-}{2x_2} \mp 6a_3x_2 = \frac{6a_3}{x_2}(\varepsilon_0^2 \mp x_2^2). \quad (7.6)$$

Чтобы стволы ёлки для диагонально вогнутой функции были допустимыми, интегральные линии должны лежать в области, где $D_{\pm} \geq 0$, т. е. в полосе $0 < x_2 \leq \varepsilon_0$. Рассмотрим экстремальные линии поля, порожденного уравнением (7.4). Это легко сделать, нарисовав график функции (7.5) для любого значения константы (см. рис. 11).

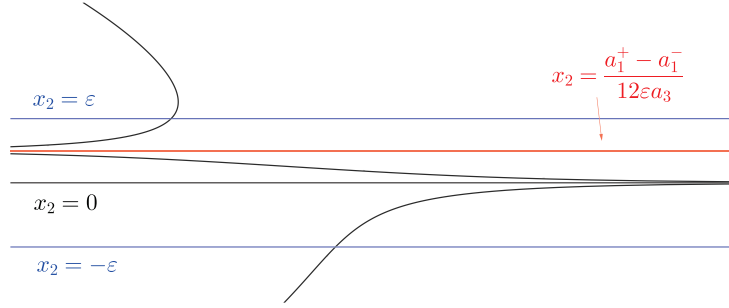


Рис. 11. График одной из кривых из семейства (7.5).

Чтобы получить интегральную линию, проходящую через заданную точку, мы должны сдвинуть этот график соответствующим образом вдоль оси x_1 . Мы видим, что искомые экстремальные линии фолируют полосу между двумя горизонтальными асимптотами: $0 < x_2 < \varepsilon_0^2 \varepsilon^{-1}$. Если $T \in (0, \varepsilon_0^2 \varepsilon^{-1})$, то из уравнения (7.4) следует, что $T' < 0$. Более того, T экспоненциально убывает на бесконечности, потому что формула (7.5) показывает, что $T(u) \sim \exp(-u/\varepsilon)$ при $u \rightarrow +\infty$. Затем, пользуясь формулой (4.16), мы заключаем, что $A(u)$ экспоненциально возрастает при $u \rightarrow \infty$, тогда как для ёлки с $T(u) = \varepsilon_0^2 \varepsilon^{-1}$ значение A возрастает полиномиально. Это означает, что только ёлка с $T(u) = \varepsilon_0^2 \varepsilon^{-1}$ может давать минимальную диагонально вогнутую функцию. Действительно, соответствующая функция является минимальной диагонально вогнутой функцией по теореме 1.7.

Закljučая наше рассмотрение случая $a_2^+ = a_2^-$, отметим, что если $a_1^+ < a_1^-$, то мы получаем функцию Беллмана, если берем левую ёлку с $T(u) = -\varepsilon_0^2 \varepsilon^{-1}$. Правые ёлки появляются в случае $a_3 < 0$.

Теперь перейдём к рассмотрению случая $a_2^+ \neq a_2^-$. В этой ситуации выражение

$$f'_+(t) - f'_-(t) = 2(a_2^+ - a_2^-)t + (a_1^+ - a_1^-)$$

имеет один корень в точке

$$u_0 = -\frac{a_1^+ - a_1^-}{2(a_2^+ - a_2^-)}, \quad (7.7)$$

и мы можем построить один пробой. При нашем предположении ($a_3 > 0$, $a_2^+ > a_2^-$) это будет SW-пробой, так как выполнены условия предложения 6.1.

В дополнение к предложению 6.1 мы хотим проверить, что такая фолиация имеет место для всех ε , т. е. полная фолиация полосы задаётся следующим образом:

$$\Omega_\varepsilon = \Omega_\varepsilon^L(-\infty, v_-) \cup \Omega_\varepsilon^{\text{SW}}(v_-, u_+) \cup \Omega_\varepsilon^R(u_+, +\infty). \quad (7.8)$$

Чтобы проверить это, нам необходимо при всех ε убедиться в трёх фактах:

- мы можем построить SW-пробой на области $\Omega_\varepsilon^{\text{SW}}(v_-, u_+)$;
- мы можем построить простую правую фолиацию на области $\Omega_\varepsilon^R(u_+, +\infty)$, т. е. условие (2.2) выполняется для $u \geq u_+$;
- мы можем построить простую левую фолиацию на области $\Omega_\varepsilon^L(-\infty, v_-)$, т. е. условие (2.4) выполняется для $u \leq v_-$.

Для этой цели нам нужно рассмотреть векторное поле (5.2) более подробно. Удобно рассмотреть поле не только в полосе Ω_ε , но и на всей плоскости. У рассматриваемого векторного поля есть четыре стационарные точки. Три из них уже известны: $(u_0, 0)$, (u_+, ε) и $(u_-, -\varepsilon)$. Четвёртая точка – это вторая точка пересечения двух парабол $D_+ = 0$ и $D_- = 0$, задаваемых уравнениями

$$x_1 = u_0 + x_2 + \varkappa_+ x_2^2 \quad (7.9)$$

и

$$x_1 = u_0 - x_2 - \varkappa_+ x_2^2 \quad (7.10)$$

соответственно (см. рис. 12). Прямое вычисление показывает, что она имеет координаты $(u_0, -\varkappa_+^{-1})$.

Чтобы понять поведение интегральных кривых вокруг этих точек, нам нужно вычислить матрицу Якоби (см. (5.5)) в этих точках.

$$J(x) = 2(a_2^+ - a_2^-) \begin{pmatrix} \varepsilon & -3\varkappa_+ x_2^2 - 2x_2 \\ -x_2 & 2\varkappa_+ \varepsilon x_2 - x_1 + \varepsilon + u_0 \end{pmatrix}, \quad (7.11)$$

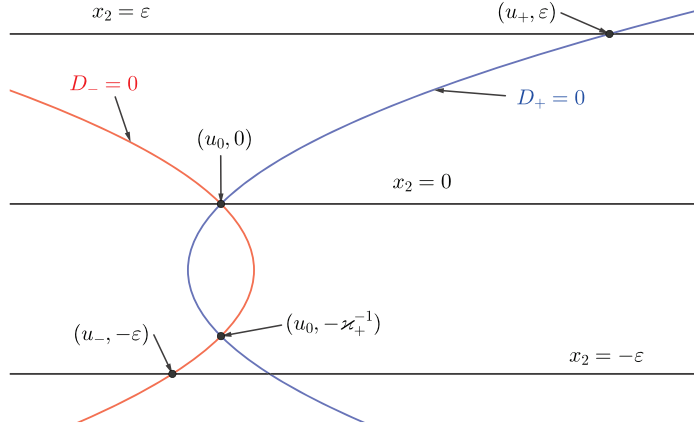


Рис. 12. Кривые $D_+ = 0$ и $D_- = 0$. Четыре стационарные точки поля.

где (см. (5.10) и (7.7))

$$\kappa_+ = \frac{6a_3}{a_2^+ - a_2^-} \quad \text{и} \quad u_0 = -\frac{a_1^+ - a_1^-}{2(a_2^+ - a_2^-)}.$$

В точке $(u_0, 0)$ у нас всегда узел,

$$J(u_0, 0) = 2(a_2^+ - a_2^-)\varepsilon \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (7.12)$$

а точка (u_+, ε) является седловой при всех ε :

$$J(u_+, \varepsilon) = 2(a_2^+ - a_2^-)\varepsilon \begin{pmatrix} 1 & -2 - 3\varepsilon\kappa_+ \\ -1 & \varepsilon\kappa_+ \end{pmatrix}, \quad (7.13)$$

поскольку $u_+ = u_0 + \varepsilon + \kappa_+\varepsilon^2$ (см. (7.9)). Поведение поля в двух других стационарных точках несущественно для нашей цели.

Самая простая часть нашей задачи – построение простой правой фолиации на области $\Omega_\varepsilon^R(u_+, +\infty)$. Прямыми вычислениями мы видим, что формулы (2.2) превращаются в

$$\begin{aligned} 2\varepsilon D_+(u, \varepsilon) &= 2(a_2^+ - a_2^-)(u - \varepsilon) + (a_1^+ - a_1^-) - 12a_3\varepsilon^2 \geq 0; \\ 2\varepsilon D_-(u, \varepsilon) &= 2(a_2^+ - a_2^-)(u + \varepsilon) + (a_1^+ - a_1^-) + 12a_3\varepsilon^2 \geq 0. \end{aligned} \quad (7.14)$$

Во-первых, заметим, что второе условие в (7.14) следует из первого. Условие $D_+(u, \varepsilon) > 0$ выполняется для всех $u > u_+$, потому что $D_+(u, \varepsilon)$ строго возрастает по u и $D_+(u_+, \varepsilon) = 0$.

Теперь мы рассмотрим интегральную кривую поля, которая начинается в точке (u_+, ε) и заканчивается в точке $(v_-, -\varepsilon)$ на нижней границе, что соответствует стволу SW-ёлки. Наши рассуждения повторят рассуждения из доказательства предложения 6.1. Там мы использовали то, что параметр ε достаточно мал, здесь мы будем рассматривать произвольное ε , но зато будем использовать конкретное выражение для граничных функций f_{\pm} .

Чтобы понять, какой наклон имеет наша интегральная кривая в точке (u_+, ε) , нам нужно вычислить собственные векторы матрицы в (7.13). Запишем эту матрицу в виде

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 - 3s \\ -1 & -1 + s \end{pmatrix}, \quad (7.15)$$

где $s = 1 + \varepsilon \kappa_+$. Характеристический полином этой матрицы имеет вид

$$\lambda^2 - s\lambda - 2s = 0, \quad (7.16)$$

поэтому собственные значения равны $\lambda = \frac{1}{2}(s \pm \sqrt{s^2 + 8s})$, а собственные векторы имеют вид

$$\begin{pmatrix} s - 1 - \lambda \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (7.17)$$

Мы выбираем одну из двух интегральных кривых, проходящих через точку (u_+, ε) , которая после сдвига вправо на ε даст нам ствол искомого SW-пробоя, а именно, мы должны взять собственный вектор с наклоном больше 0 и меньше 1. Это означает, что мы берём $\lambda = \frac{1}{2}(s - \sqrt{s^2 + 8s})$, что даёт нам наклон собственного вектора

$$\frac{1}{s - 1 - \lambda} = \frac{2}{s - 2 + \sqrt{s^2 + 8s}}. \quad (7.18)$$

Теперь мы сравним этот наклон с наклоном кривой $D_+ = 0$. Эта кривая является параболой (см. рис. 12) и задаётся уравнением (7.9). Её наклон равен $x'_2 = \frac{1}{1 + 2\kappa_+ x_2}$, то есть в точке (u_+, ε) наклон этой кривой равен

$$\frac{1}{1 + 2\kappa_+ \varepsilon} = \frac{1}{2s - 1}, \quad (7.19)$$

что строго меньше выражения в (7.18) для всех $s > 1$ (что означает для всех $\varepsilon > 0$). Следовательно, в верхней половине полосы желаемая интегральная кривая проходит ниже линии $D_+ = 0$ (или, что то же самое, справа от этой параболы), то есть в области, где $D_+ > 0$. Поскольку эта кривая находится справа от параболы $D_- = 0$, у нас выполняется и неравенство $D_- > 0$ на этой интегральной кривой.

Визуализации этой картинке представлена на рис. 13, где в сравнении с рис. 12 мы добавляем несколько новых линий и меняем обозначение. Парабола $D_+ = 0$ (см. (7.9)) теперь обозначена через X_1 , что означает, что интегральная кривая нашего поля пересекает эту линию с наклоном, равным 1. То же самое справедливо для границы $x_2 = -\varepsilon$ (за исключением особой точки), поэтому она также обозначена через X_1 . Парабола $D_- = 0$ ($x_1 = u_0 - x_2 - \varkappa_+ x_2^2$) пересекается интегральными кривыми с наклоном -1 и обозначается символом X_{-1} . Тот же наклон есть на верхней границе полосы (за исключением особой точки). Множество точек, где интегральные кривые проходят горизонтально, мы обозначаем через X_0 . Оно состоит из двух прямых: $x_2 = 0$ и $x_1 = u_0 + \varepsilon + \varkappa_+ \varepsilon x_2$. Последняя прямая проходит через три стационарные точки: (u_+, ε) , $(u_0, -\varkappa_+^{-1})$ и $(u_-, -\varepsilon)$. Кубическая парабола X_∞ ($x_1 = u_0 + (x_2^2 + \varkappa_+ x_2^3)\varepsilon^{-1}$) проходит через все четыре стационарные точки и является множеством точек, в которых интегральные кривые проходят вертикально (за исключением особых точек). Наконец, мы добавляем интегральную кривую, являющуюся нашим пробоем. Выходя из точки (u_+, ε) вместе с параболой X_1 , он проходит ниже этой параболы до следующей стационарной точки $(u_0, 0)$. Рассуждения, объясняющие, почему эти две кривые не могут пересечься ранее, и почему наклон интегральной кривой в точке $(u_0, 0)$ строго меньше 1, содержатся в доказательстве предложения 6.1.

Теперь нам нужно показать, что эта интегральная кривая в нижней половине полосы проходит через область, где $D_+ > 0$ и $D_- > 0$. Для этого нам нужно проверить, что конец пробоя $(v_-, -\varepsilon)$ находится слева от стационарной точки $(u_-, -\varepsilon)$, то есть $v_- < u_-$. Действительно, геометрически понятно, что для того чтобы иметь нулевой наклон, наша интегральная кривая должна развернуться: она имеет наклон 1 в точке $(v_-, -\varepsilon)$, затем идет вертикально, пересекая линию X_∞ , затем имеет наклон -1 , пересекая параболу X_{-1} , и только после этого пересекает линию X_0 . Всё это происходит, конечно, ниже полосы. Это объясняет, почему $v_- < u_-$. Это не только гарантирует то, что этот

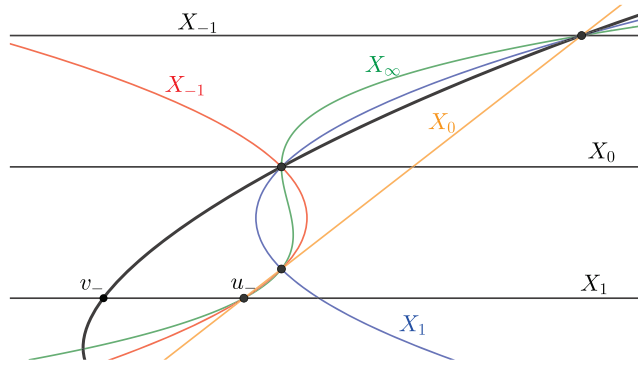


Рис. 13. Допустимая интегральная кривая поля вместе с линиями X_0 , $X_{\pm 1}$ и X_{∞} .

пробой порождает диагонально вогнутую функцию, но, как мы сейчас увидим, в то же время это обеспечивает возможность построения простой левой фолиации на области $\Omega_{\varepsilon}^L(-\infty, v_-)$.

Для последующей цели нам нужно проверить условия (2.4) для $u \leq v_-$. В нашей ситуации они принимают вид

$$\begin{aligned} 2\varepsilon D_+(u, -\varepsilon) &= -2(a_2^+ - a_2^-)(u + \varepsilon) - (a_1^+ - a_1^-) + 12a_3\varepsilon^2 \geq 0; \\ 2\varepsilon D_-(u, -\varepsilon) &= -2(a_2^+ - a_2^-)(u - \varepsilon) - (a_1^+ - a_1^-) - 12a_3\varepsilon^2 \geq 0. \end{aligned} \quad (7.20)$$

Поскольку наклон нашей основной кривой строго меньше 1, мы имеем ограничение $v_- < u_0 - \varepsilon$, откуда следует первое условие из (7.20). Второе условие – это в точности неравенство $v_- \leq u_-$, которое мы только что проверили.

Закljučая рассмотрение случая $a_3^+ = a_3^-$, отметим, что наш SW-пробой является конечным при всех ε , то есть всегда $v_- > -\infty$. Действительно, описание множества X_0 показывает, что единственная линия $x_2 = 0$ может быть асимптотой интегральной кривой. Поэтому ствол нашей ёлки должен пересекать нижнюю границу полосы в некоторой конечной точке.

Наконец, скажем несколько слов о случае $a_3^+ \neq a_3^-$. Из-за симметрии мы можем ограничиться случаем $a_3^+ > a_3^-$. Как и раньше, нам нужно рассмотреть корни многочлена

$$f_+^{\prime}(t) - f_-^{\prime}(t) = 3(a_3^+ - a_3^-)t^2 + 2(a_2^+ - a_2^-)t + (a_1^+ - a_1^-).$$

Если дискриминант этого квадратного многочлена отрицателен, то $f'_+(t) - f'_-(t) \geq \text{const} > 0$, и применяя предложение 2.5, мы приходим к выводу, что у нас есть правая простая фолиация для малых ε в этом случае. Однако при росте ε возникают фолиации, которые мы ещё не рассматривали, поэтому мы отложим полное исследование этого случая.

Мы также ещё не готовы рассмотреть фолиацию, которая возникает, когда дискриминант этого квадратного многочлена равен нулю, то есть у нас кратный корень уравнения (5.4). Поэтому в оставшейся части данного раздела мы будем предполагать, что дискриминант положителен, то есть уравнение (4.1) имеет два корня. Обозначим эти корни через u_{01} и u_{02} , считая, что $u_{01} < u_{02}$. Предположение $a_3^+ > a_3^-$ означает, что $f''_+(u_{01}) - f''_-(u_{02}) < 0$ и $f''_+(u_{02}) - f''_-(u_{02}) > 0$. Следовательно, у нас есть три возможные ситуации (см. иллюстрацию этих возможностей на рис. 14–16):

- $a_3^- > 0$ и у нас есть NW-пробой около точки u_{01} (согласно предложению 6.3), $a_3^+ > 0$, и у нас есть SW-пробой около точки u_{02} (согласно предложению 6.1);
- $a_3^- < 0$ и у нас есть NE-пробой около точки u_{01} (согласно предложению 6.4), $a_3^+ > 0$, и у нас есть SW-пробой около точки u_{02} (согласно предложению 6.1);
- $a_3^- < 0$ и у нас есть NE-пробой около точки u_{01} (согласно предложению 6.4), $a_3^+ < 0$, и у нас есть SE-пробой около точки u_{02} (согласно предложению 6.2).

Обратите внимание, что случай $a_3^- > 0$, $a_3^+ < 0$ невозможен, потому что мы предположили, что $a_3^+ > a_3^-$. Наша цель – доказать, что для малых ε во всех случаях у нас имеется следующая фолиация:

$$\Omega_\varepsilon = \Omega_\varepsilon^R(-\infty, \alpha_1) \cup \Omega_\varepsilon^{N^*}(\alpha_1, \beta_1) \cup \Omega_\varepsilon^L(\beta_1, \alpha_2) \cup \Omega_\varepsilon^{S^*}(\alpha_2, \beta_2) \cup \Omega_\varepsilon^R(\beta_2, +\infty),$$

где α_i и β_i – некоторые числа, близкие к u_{i0} , а вместо * должно быть либо E, либо W в зависимости от знаков чисел a_3^\pm . Более конкретно, мы должны взять

$$\alpha_1 = \begin{cases} v_{1+}, & \text{если } a_3^- > 0; \\ u_{1-}, & \text{если } a_3^- < 0, \end{cases} \quad \beta_1 = \begin{cases} u_{1-}, & \text{если } a_3^- > 0; \\ v_{1+}, & \text{если } a_3^- < 0, \end{cases}$$

и

$$\alpha_2 = \begin{cases} v_{2-}, & \text{если } a_3^+ > 0; \\ u_{2+}, & \text{если } a_3^+ < 0, \end{cases} \quad \beta_2 = \begin{cases} u_{2+}, & \text{если } a_3^+ > 0; \\ v_{2-}, & \text{если } a_3^+ < 0. \end{cases}$$

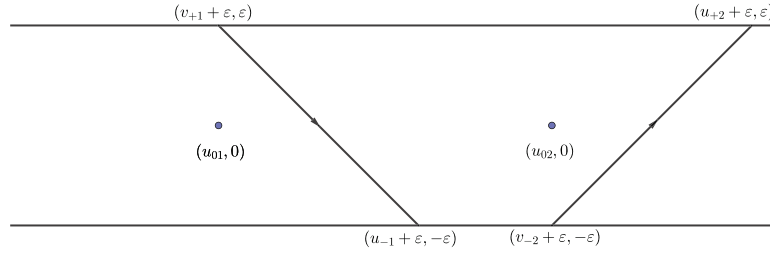


Рис. 14. Два пробоя в случае $a_3^- > 0, a_3^+ > 0$.

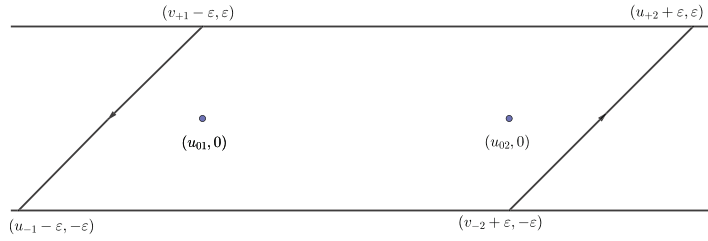


Рис. 15. Два пробоя в случае $a_3^- < 0, a_3^+ > 0$.

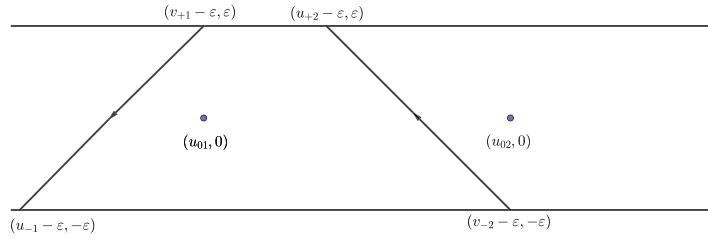


Рис. 16. Два пробоя в случае $a_3^- < 0, a_3^+ < 0$.

Нам нужно проверить выполнение условий (2.2) для $u < \alpha_1$ и для $u > \beta_2$, тогда мы можем построить область Ω_ϵ^R , и условий (2.4) на интервале (α_2, β_1) , тогда мы можем построить область Ω_ϵ^L . Мы оставляем эту проверку читателю, но здесь приводим две подсказки. Во-первых, все u_\pm определены точно, и они определяют точки, в которых соответствующие квадратичные многочлены меняют знак. Второе условие в (2.2) и в (2.4) всегда слабее для малых ϵ и автоматически выполняется. Границы, заданные величинами v_\pm , не являются строгими, и

вместо проверки знака соответствующих квадратичных многочленов в этих точках, мы проверяем их в u_{0i} . Для этой цели достаточно знать, что при всех ε выполняются соотношения

$$\begin{cases} v_{+1} - u_{01} < -\varepsilon, & \text{если } a_3^- > 0; \\ v_{+1} - u_{01} > \varepsilon, & \text{если } a_3^- < 0, \end{cases} \quad \begin{cases} v_{-2} - u_{02} < -\varepsilon, & \text{если } a_3^+ > 0; \\ v_{-2} - u_{02} > \varepsilon, & \text{если } a_3^+ < 0, \end{cases}$$

поскольку наклон ствола строго между -1 и 1 .

БЛАГОДАРНОСТЬ

Авторы выражают признательность Д. Столярову, П. Иванишвили и А. Логунову, которые принимали участие в обсуждении рассматриваемых задач на первоначальной стадии.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. D. L. Burkholder, *Boundary value problems and sharp inequalities for martingale transforms*. — Ann. Prob. **12**, No. 3 (1984), 647–702.
2. P. Ivanishvili, N. N. Osipov, D. M. Stolyarov, V. I. Vasyunin, P. B. Zatitskiy, *Bellman function for extremal problems in BMO*. — Trans. Amer. Math. Soc. **368** (2016), 3415–3468.
3. P. Ivanishvili, D. M. Stolyarov, V. I. Vasyunin, P. B. Zatitskiy, *Bellman function for extremal problems on BMO II: evolution*. — Mem. Amer. Math. Soc. **255**, No. **1220** (2018).
4. P. Ivanishvili, D. M. Stolyarov, V. I. Vasyunin, P. B. Zatitskii, *Bellman functions on simple non-convex domains in the plane*. — <https://arxiv.org/abs/2305.03523>.
5. М. И. Новиков, *Достаточные условия минимальности бивогнутых функций*. — Алгебра и анализ, **34**, No. 5 (2022), 173–210.
6. A. Osękowski, *Sharp martingale and semimartingale inequalities*, Monografie Matematyczne IMPAN **72**, Springer Basel, 2012.
7. D. Stolyarov, V. Vasyunin, P. Zatitskii, *Martingale transforms of bounded random variables and indicator functions of events*. — <https://arxiv.org/abs/2310.02362>.
8. D. M. Stolyarov and P. B. Zatitskiy, *Theory of locally concave functions and its applications to sharp estimates of integral functionals*. — Adv. Math. **291** (2016), 228–273.

Vasyunin V. I., Zatitskii P. B. Some extremal problems for martingale transforms. I.

With this paper, we begin a series of studies of extremal problems for estimating the distributions of martingale transforms of bounded martingales. The Bellman functions corresponding to such problems are pointwise

minimal diagonally concave functions on a horizontal strip, satisfying certain given boundary conditions. We describe the basic structures that arise in the construction such functions and present a solution in the case of asymmetric boundary conditions and a sufficiently small width of the strip.

Санкт-Петербургский
государственный университет
Санкт-Петербург, Россия
E-mail: vasyunin@pdmi.ras.ru

Поступило 25 октября 2023 г.

University of Cincinnati,
Cincinnati, OH, USA;
Санкт-Петербургский
государственный университет
E-mail: pavelz@pdmi.ras.ru