Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 526, 2023 г.

В. Н. Солев

ПРОСТРАНСТВО BMO И ЗАДАЧА ОЦЕНИВАНИЯ ФУНКЦИИ, НАБЛЮДАЕМОЙ НА ФОНЕ ГАУССОВСКОГО СТАЦИОНАРНОГО ШУМА

§1. Введение

Опишем статистическую задачу. Предположим, что на растущем отрезке $[-T,T]$ наблюдается гауссовсий процесс $y(t)$,

$$dy(t) = s(t)\,dt + dx(t), \quad t \in [-T,T],\, T > 0. \tag{1}$$

Здесь $s(t)$ – неизвестная функция, лежащая в заданном выпуклом центрально-симметричном подмножестве $\mathscr{L}_*$ банахова пространства $\mathscr{L}$ локально квадратично суммируемых функций s, таких что

$$\|s\|_{\mathscr{L}}^2 = \sup_x \int_x^{x+1} |s\,(t)|^2\; dt < \infty, \tag{2}$$

$x(t)$ – гауссовский процесс со стационарными приращениями, с нулевым средним и спектральной плотностью f,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(u)}{1+u^2}\,du < \infty. \tag{3}$$

Мы будем предполагать, что спектральная плотность f процесса $x(t)$ со стационаными приращениями удовлетворяет условию (3) и условию Макенхаупта

$$\lambda = \lambda(f) := \sup_I \frac{1}{|I|}\int_I f(t)\,dt\, \frac{1}{|I|}\int_I \frac{1}{f(t)}\,dt < \infty. \tag{4}$$

Ключевые слова: псевдопериодическая функция, непараметрическая оценка, процесс со стационарными приращениями.

Здесь I — конечный интервал, $|I|$ — длина I. Отметим, что при названных условиях (см. [7])

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{f(u)(1+u^2)}\, du < \infty. \tag{5}$$

Выпуклое центрально-симметричное подмножество $\mathscr{L}_*$ банахова пространства $\mathscr{L}$, в котором содержатся подлежащие оцениванию функции s, мы будем выбирать из класса Степанова $\mathscr{L}(\Lambda)$ псевдо-периодических функций s,

$$s(t) = \sum_{u\in\Lambda} a(u)\, e^{iut}, \ \sum_{u\in\Lambda} |a(u)|^2 < \infty, \tag{6}$$

предполагая, что Λ – счетное множество, удовлетворяющее условию отделимости

$$\tau = \tau\,(\Lambda) = \inf_{u,v\in\Lambda,\, u\neq v} |u-v| > 0. \tag{7}$$

Всюду далее предполагается, что при некотором фиксированном положительном $T_0 = T_0(\tau)$ величина T в (1) больше T_0.

Интересующий нас класс $\mathscr{L}_* = \mathscr{L}(\Lambda;\beta)$ выделяется при $\beta > 0$ из функционального класса $\mathscr{L}(\Lambda)$ условием

$$\sum_{u\in\Lambda} |a(u)|^2(|u|+1)^{2\beta} \leqslant L. \tag{8}$$

Мы дополнительно будем предполагать, что точки u из Λ расположены не слишком редко: при некотором положительном a для достаточно больших m, $m > m_0$,

$$a\, m^{2\beta+1} \leqslant \sum_{u\in\Lambda,\, |u|\leqslant m} (1+|u|)^{2\beta}. \tag{9}$$

Так что при некоторых положительных a и A для достаточно больших m, $m > m_0$,

$$a\, m^{2\beta+1} \leqslant \sum_{u\in\Lambda,\, |u|\leqslant m} (1+|u|)^{2\beta} \leqslant A\, m^{2\beta+1}. \tag{10}$$

Пусть $\widehat{s}_T$ – оценка неизвестной функции s, построенная по наблюдениям (1), $\widehat{s}_T \in \mathscr{L}_*$. Риск использования оценки $\widehat{s}_T$ будем измерять величиной

$$\mathscr{R}_T\,(\widehat{s}_T;\mathscr{L}_*;\|\cdot\|_{\mathscr{L}}) = \sup_{s\in\mathscr{L}_*} \mathbf{E}_{s,f}\ \|\widehat{s}_T - s\|^2_{\mathscr{L}}\,. \tag{11}$$

Обозначим через $\mathscr{R}_T$ минимаксный риск,

$$\mathscr{R}_T\left(\mathscr{L}_*; \|\cdot\|_{\mathscr{L}}\right) = \inf_{\widehat{s}_T} \mathscr{R}_T\left(\widehat{s}_T; \mathscr{L}_*; \|\cdot\|_{\mathscr{L}}\right). \tag{12}$$

При необходимости мы можем переходить в определении (11) без серьезной потери точности в оценке скорости убывания минимаксного риска от банаховой нормы $\|s\|_{\mathscr{L}}^2$ к любой из двух гильбертовых норм $\|s\|_T$ или $\|s\|_*$, где

$$\|s\|_T^2 = \frac{1}{2T} \int\limits_T^T |s(t)|^2\, dt, \quad \|s\|_* = \sum_{u\in\Lambda} |a(u)|^2, \tag{13}$$

поскольку, как установлено в [6], все три упомянутые нормы в надлежащем смысле топологически эквивалентны.

Основной результат настоящей работы состоит в исследовании асимптотического поведения при $T \to \infty$ величины $\mathscr{R}_T\left(\mathscr{L}_*; \|\cdot\|_{\mathscr{L}}\right)$. При описании необходимой для решения этой задачи априорной информации о спектральной плотности мы сосредоточим внимание на поведении спектральной плотности f в малой окрестности Λ_ε спектрального множества Λ,

$$\Lambda_\varepsilon = \bigcup_{u\in\Lambda} [u-\varepsilon, u+\varepsilon], \quad 0 < \varepsilon < \tau/2.$$

Если функция f удовлетворяет условию Макенхаупта и при достаточно малом ε функция f на Λ_ε отделена от нуля и бесконечности, то, как установлено, например, в [9], при подходящих константах c и C и $T > T_0$

$$c\,T^{-\frac{2\beta}{2\beta+1}} \leqslant \mathscr{R}_T\left(\mathscr{L}_*; \|\cdot\|_{\mathscr{L}}\right) \leqslant C\,T^{-\frac{2\beta}{2\beta+1}}.$$

В настоящей работе нас интересует случай, когда функция f либо не является ограниченной на Λ_ε, либо подходит к нулю сколь угодно близко. Так же, как и в [9], для нас модельным будет случай, когда при $0 < |\alpha| < 1$ функция f совпадает на Λ_ε с функцией $f_0(x)$,

$$f_0(x) = \sum_{u\in\Lambda} \mathbf{1}_{[u-\varepsilon,u+\varepsilon]}(x)\,|x-u|^\alpha, \quad \varepsilon < \tau/2, \tag{14}$$

или близка к ней. Однако, в отличие от [9], априорную информацию о спектральной плотности здесь мы будем описывать не в терминах средних значений $f_\varepsilon(u)$ функции f в точках $u \in \Lambda$, а в терминах средних значений $w_\varepsilon(u)$ функции $w = \ln f$,

$$f_\varepsilon(u) = \frac{1}{2\varepsilon} \int\limits_{u-\varepsilon}^{u+\varepsilon} f(x)\,dx, \quad w_\varepsilon(u) = \frac{1}{2\varepsilon} \int\limits_{u-\varepsilon}^{u+\varepsilon} \ln f(x)\,dx.$$

Точнее, мы будем предполагать,что функция f в следующем смысле не сильно отличается на Λ_ε от функции f_0:

$$\sup_{0<\varepsilon<\tau/2,\, u\in\Lambda} \frac{1}{2\varepsilon} \int\limits_{u-\varepsilon}^{u+\varepsilon} |\ln f(x) - \ln f_0(x)|\,dx < \infty, \tag{$*$}$$

используя также и эквивалентное условие

$$\sup_{0<\varepsilon<\tau/2,\, u\in\Lambda} \frac{1}{2\varepsilon} \int\limits_{u-\varepsilon}^{u+\varepsilon} |\ln f(x) - \alpha \ln \varepsilon|\,dx < \infty.$$

Нужный нам аналитический результат работы состоит в следующем утверждении.

Лемма 1.1. *Пусть спектральная плотность f удовлетворяет условию Макенхаупта и условию $(*)$. Тогда при некоторых константах $d > 0$ и $D \geqslant d$*

$$d\,\varepsilon^\alpha \leqslant f_\varepsilon(u) \leqslant D\,\varepsilon^\alpha, \quad u \in \Lambda,\ \varepsilon < \tau/2. \tag{15}$$

Сформулируем основной результат работы.

Теорема 1.2. *Пусть $\tau > 0$, спектральная плотность f удовлетворяет условию Макенхаупта и условию $(*)$ и выполнено условие (9). Тогда для достаточно больших T, $T > T_0(\tau)$ при некоторых константах $k > 0$ и $K \geqslant k$*

$$k\,T^{-\frac{(1+\alpha)(2\beta)}{1+2\beta}} \leqslant \mathscr{R}_T\,(\mathscr{L}_*; \|\cdot\|_{\mathscr{L}}) \leqslant K\,T^{-\frac{(1+\alpha)(2\beta)}{1+2\beta}}. \tag{16}$$

§2. Условие Макенхаупта и средние значения

Мы предполагаем, что спектральная плотность f процесса $x(t)$ со стационаными приращениями удовлетворяет условию (3) и условию Макенхаупта

$$\lambda = \lambda(f) := \sup_I \frac{1}{|I|} \int\limits_I f(t)\,dt\, \frac{1}{|I|} \int\limits_I \frac{1}{f(t)}\,dt < \infty. \tag{17}$$

Здесь I — конечный интервал, $|I|$ — длина I. Отметим, что при названных условиях (см. [7])

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{f(u)(1+u^2)}\,du < \infty. \tag{18}$$

Для локально суммируемой функции w положим

$$w_I := \frac{1}{|I|}\int_I w(u)\,du.$$

При $\varepsilon > 0$ мы будем использовать обозначение

$$f_\varepsilon(u) := \frac{1}{2\varepsilon}\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} f(u-s)\,ds$$

для среднего значения функции f на интервале $I = [u-\varepsilon, u+\varepsilon]$. Другое среднее функции f будет обозначаться при $\varepsilon = 1/T$

$$\tilde{f}_\varepsilon(u) := \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin^2 T(x-u)}{\pi T(x-u)^2}\,f(x)\,dx.$$

Рассмотрим ядро Пуассона

$$P_y(x) = \frac{1}{\pi}\,\frac{y}{x^2+y^2}.$$

Следующее утверждение установлено в [8].

Лемма 2.1. *Пусть неотрицательная функция f удовлетворяет условию Макенхаупта. Тогда*

$$K(f) := \sup_{y>0,u\in\mathbb{R}} \int_{-\infty}^{\infty} P_y(u-v)f(v)\,dv \times \int_{-\infty}^{\infty} P_y(u-v)\frac{1}{f(v)}\,dv < \infty. \tag{19}$$

При $\varepsilon > 0$ рассмотрим среднее значение функции f, вычисленное по ядру Пуассона

$$\check{f}_\varepsilon(u) = \int_{-\infty}^{\infty} f(u-v)\,P_\varepsilon(v)\,dv = \int_{-\infty}^{\infty} f(v)\,P_\varepsilon(u-v)\,dv.$$

Замечание 2.2. *Пусть неотрицательная функция f удовлетворяет условию Макенхаупта. Тогда при некотором $C_1 = C_1(f) < \infty$, не зависящем от ε и u,*

$$\breve{f}_\varepsilon(u) \leqslant C_1(f)\, f_\varepsilon(u). \tag{20}$$

Доказательство. При условии (19)

$$\breve{f}_\varepsilon(u) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} P_\varepsilon(u-v) f(v)\, dv \leqslant K(f) \Big(\int\limits_{-\infty}^{\infty} P_\varepsilon(u-v) \frac{1}{f(v)}\, dv \Big)^{-1}.$$

Так как

$$\frac{1}{2\varepsilon\pi} \mathbf{1}_{[u-\varepsilon, 1+\varepsilon]}(v) \leqslant P_\varepsilon(u-v),$$

то

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} P_\varepsilon(u-v) \frac{1}{f(v)}\, dv \geqslant \frac{1}{\pi} \frac{1}{2\varepsilon} \int\limits_{u-\varepsilon}^{u+\varepsilon} \frac{1}{f(v)}\, dv.$$

Так что

$$\breve{f}_\varepsilon(u) \leqslant \pi K(f) \Big(\frac{1}{2\varepsilon} \int\limits_{u-\varepsilon}^{u+\varepsilon} \frac{1}{f(v)}\, dv \Big)^{-1}.$$

Остается учесть, что

$$\Big(\frac{1}{2\varepsilon} \int\limits_{u-\varepsilon}^{u+\varepsilon} \frac{1}{f(v)}\, dv \Big)^{-1} \leqslant \frac{1}{2\varepsilon} \int\limits_{u-\varepsilon}^{u+\varepsilon} f(v)\, dv = f_\varepsilon(u).$$

Получаем (21) с константой $C_1(f) = \pi K(f)$. $\square$

Замечание 2.3. *Пусть неотрицательная функция f удовлетворяет условию Макенхаупта. Тогда при некотором $C_2 = C_2(f) < \infty$, не зависящем от ε и u, при $T > 0$ и $\varepsilon = 1/T$*

$$\tilde{f}_\varepsilon(u) \leqslant C_2(f)\, f_\varepsilon(u). \tag{21}$$

Напомним, что локально суммируемая функция φ имеет ограниченную среднюю осцилляцию (φ лежит в пространстве BMO), если

$$\sup_I \frac{1}{|I|} \int\limits_I |\varphi(x) - \varphi_I|\, dx = \|\varphi\|_* < \infty, \tag{22}$$

где супремум берется по всем конечным интервалам. В [7] установлено, что если спектральная плотность f удовлетворяет условию Макенхаупта, то функция $w(x) = \ln f(x)$ локально суммируема и лежит в BMO. При этом для $\varepsilon > 0, u \in \mathbb{R}$ и некоторой константы $C = C(f) < \infty$, не зависящей от $\varepsilon > 0$ и u,

$$e^{w_\varepsilon(u)} \leqslant f_\varepsilon(u) \leqslant C\, e^{w_\varepsilon(u)}, \quad w(x) = \ln f(x). \tag{23}$$

Далее мы сосредоточим внимание на поведении спектральной плотности f в малой окрестности Λ_ε спектрального множества Λ,

$$\Lambda_\varepsilon = \bigcup_{u\in\Lambda} [u-\varepsilon, u+\varepsilon], \quad 0 < \varepsilon < \tau/2.$$

Для нас модельным будет случай, когда функция f при $0 < |\alpha| < 1$ совпадает на Λ_ε с функцией $f_0(x)$,

$$f_0(x) = \sum_{u\in\Lambda} \mathbf{1}_{[u-\varepsilon,u+\varepsilon]}(x)\, |x-u|^\alpha, \tag{24}$$

или близка к ней.

Простые вычисления показывают, что при некоторой абсолютной константе $C < \infty$ и $\varepsilon > 0$

$$\frac{1}{2\varepsilon}\int\limits_{-\varepsilon}^{\varepsilon} |\ln|x| - \ln\varepsilon|\, dx \leqslant C. \tag{25}$$

Поэтому

$$\frac{1}{2\varepsilon}\int\limits_{u-\varepsilon}^{u+\varepsilon} |\ln f_0(x) - \alpha\, \ln\varepsilon|\, dx \leqslant C|\alpha|, \quad \text{когда } u\in\Lambda \text{ и } 0<\varepsilon<\tau/2. \tag{26}$$

Мы будем предполагать, что при некотором $\alpha,\ 0 < |\alpha| < 1$, величина

$$\delta(u) := \sup_{0<\varepsilon<\tau/2} \frac{1}{2\varepsilon}\int\limits_{u-\varepsilon}^{u+\varepsilon} |\ln f(x) - \alpha\, \ln\varepsilon|\, dx < \infty, \quad u\in\Lambda. \tag{27}$$

Отметим, что в силу (26) конечность величины $\delta(u)$ эквивалентна условию

$$\sup_{0<\varepsilon<\tau/2} \frac{1}{2\varepsilon}\int\limits_{u-\varepsilon}^{u+\varepsilon} |\ln f(x) - \ln f_0(x)|\, dx < \infty, \quad u\in\Lambda. \tag{28}$$

Напомним обозначение $w(x) = \ln f(x)$. Из (27) следует, что

$$\alpha \ln \varepsilon - \delta(u) \leqslant w_\varepsilon(u) \leqslant \alpha \ln \varepsilon + \delta(u), \quad u \in \Lambda,\ 0 < \varepsilon < \tau/2. \tag{29}$$

Поэтому

$$e^{-\delta(u)} \varepsilon^\alpha \leqslant e^{w_\varepsilon(u)} \leqslant e^{\delta(u)} \varepsilon^\alpha. \tag{30}$$

Отсюда и из (24) получаем при константе C, не зависящей от ε и u,

$$e^{-\delta(u)} \varepsilon^\alpha \leqslant f_\varepsilon(u) \leqslant C\, e^{\delta(u)} \varepsilon^\alpha, \quad \text{когда } 0 < \varepsilon < \tau/2 \text{ и } u \in \Lambda. \tag{31}$$

Рассмотрим однородный случай, предполагая, что

$$\sup_{0<\varepsilon<\tau/2,\, u\in\Lambda} \frac{1}{2\varepsilon} \int\limits_{u-\varepsilon}^{u+\varepsilon} |\ln f(x) - \ln f_0(x)|\, dx < \infty. \tag{32}$$

В этом случае найдутся такие конечные константы $d > 0$ и $D \geqslant d$, не зависящие от u и ε, что

$$d\, \varepsilon^\alpha \leqslant f_\varepsilon(u) \leqslant D\, \varepsilon^\alpha, \quad \text{когда } 0 < \varepsilon < \tau/2 \text{ и } u \in \Lambda. \tag{33}$$

§3. Псевдо-периодические функции

Пусть $\mathscr{L}(\Lambda)$ – введенный Степановым (см. [5]) класс псевдо-периодических функций s,

$$s(t) = \sum_{u\in\Lambda} a(u)\, e^{iut}, \quad \sum_{u\in\Lambda} |a(u)|^2 < \infty. \tag{34}$$

Здесь Λ – счетное множество, удовлетворяющее условию отделимости

$$\tau = \tau\,(\Lambda) = \inf_{u,v\in\Lambda,\, u\neq v} |u - v| > 0. \tag{35}$$

Наряду с банаховой нормой, определенной в (2), мы рассматриваем также гильбертовы нормы $\|s\|_{T}$ и $\|s\|_*$,

$$\|s\|_{T}^2 = \frac{1}{2T} \int\limits_{T}^{T} |s(t)|^2\, dt, \quad \|s\|_* = \sum_{u\in\Lambda} |a(u)|^2,$$

и используем обозначение L^2_T для L^2-пространства на отрезке $[-T, T]$, построенного по нормированной мере Лебега, со скалярным произведением

$$(s_1, s_2)_T := \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} s_1(t)\, \overline{s_2(t)}\, dt$$

и нормой $\|s\|_T$. Н. Винер и Р. Пэли установили в [6],что при условии $\tau(\Lambda) > 0$ найдутся такие положительные константы $c_1 = c_1(\tau), c_2 = c_2(\tau), C_1 = C_1(\tau), C_1 = C_1(\tau), T_0 = T_0(\tau)$, зависящие только от τ, что

$$c_1 \|s\|_{\mathscr{L}} \leqslant \|s\|_* \leqslant C_1 \|s\|_{\mathscr{L}}, \quad s \in \mathscr{L}(\Lambda), \tag{36}$$

и при $T \geqslant T_0$

$$c_2 \|s\|_T \leqslant \|s\|_* \leqslant C_2 \|s\|_T, \quad s \in \mathscr{L}(\lambda). \tag{37}$$

Так что найдутся такие положительные константы $c = c(\tau), C = C(\tau)$, зависящие только от τ, что при $T \geqslant T_0$

$$c \|s\|_T \leqslant \|s\|_{\mathscr{L}} \leqslant C \|s\|_T, \quad s \in \mathscr{L}(\lambda). \tag{38}$$

Из сказанного следует (подробнее см. в [6]), что при условии (35) система $\{\varphi_u(t),\ u \in \Lambda\}$ является базисом Рисса в $\mathscr{L}(\Lambda)$ (точнее в сужении $\mathscr{L}(\Lambda)$ на L^2_T) в метрике гильбертова пространства L^2_T с нормой $\|\cdot\|_T$. Стало быть, в $\mathscr{L}(\Lambda)$ существует сопряженная (в метрике гильбертова пространств с нормой $\|\cdot\|_T$) система $\{\psi^T_u,\ u \in \Lambda\}$, такая что

$$\left(\varphi_u, \psi^T_v\right)_T = \delta_{u,v}, \quad \text{где } \delta_{u,v} \text{ -- символ Кронекера.} \tag{39}$$

А потому

$$s = \sum_{u \in \Lambda} \left(s, \psi^T_u\right)_T \varphi_u, \quad s \in \mathscr{L}(\Lambda). \tag{40}$$

В дальнейшем сопряженной мы будем называть любую (не обязательно лежащую в $\mathscr{L}(\Lambda)$) систему локально квадратично суммируемых функций $\{\psi^T_u,\ u \in \Lambda\}$, удовлетворяющую (39).

Отметим, что, если $\tau(\Lambda) > 0$, при $T > T_0(\tau)$ оператор умножения на индикаторную функцию $\mathbf{1}_{[-T,T]}(t)$ является ограниченным и ограниченно обратимым оператором из $\mathscr{L}(\Lambda)$ (рассматриваемого как подпространство банахова пространства $\mathscr{L}$) в подпространство пространства L^2_T, определенное соотношением $\mathscr{L}_T(\Lambda) = \mathbf{1}_{[-T,T]}\, \mathscr{L}(\Lambda)$. В дальнейшем нам удобно будет считать, что функции из L^2_T равны нулю вне отрезка $[-T,T]$.

Итак, пусть $\varphi_u(T;t) = \mathbf{1}_{[-T,T]}(t)\, e^{iut}$, а $\{\psi_u^r,\ u\in\Lambda\}$ – система из $\mathscr{L}_T(\Lambda)$, сопряженная (в метрике пространства L^2_T) к системе $\bigl\{\varphi_u(r;\,\cdot\,),\ u\in\Lambda\bigr\}$, а потому

$$\widehat{\psi}_u^r(v) = \int\limits_{-r}^{r} \psi_u^r(x)\, e^{-ivx}\, dx = 2\, r\, \delta_{u,v}, \quad u,v\in\Lambda;$$

При $r > T_0$ и $T > r + T_0$ обозначим

$$g(t) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \psi_u^r(t-s)\, \varphi_u(T;s)\, ds. \tag{41}$$

При фиксированном $r > T_0$ и $T > r + T_0$ определим новую систему $\{g_u^T,\ u\in\Lambda\}$ соотношением

$$g_u^T(t) = \frac{T}{2r(T-r)} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \psi_u^r(t-s)\, \varphi_u(T{-}r;s)\, ds. \tag{42}$$

Следующие два утверждения установлены в [9].

Лемма 3.1. *Пусть $\{\psi_u^r,\ u\in\Lambda\}$ – система из $\mathscr{L}_r(\Lambda)$, сопряженная (в метрике пространства L^2_r) к системе $\bigl\{\varphi_u(r;\,\cdot\,),\ u\in\Lambda\bigr\}$. Тогда при $u\in\Lambda$ функции g_u^T лежат в L^2_T, причем*

$$\frac{1}{2T}\int\limits_{-T}^{T} g_u^T(t)\, e^{-ivt}\, dt = \delta_{u,v}, \ \textit{если}\ v\in\Lambda. \tag{43}$$

Лемма 3.2. *Пусть $\tau = \tau(\Lambda) > 0$, $\lambda(f) \leqslant \lambda < \infty$. Тогда найдутся такие константы $0 < c(\tau,r,\lambda) \leqslant C(\tau,r,\lambda) < \infty$, зависящие только от λ, r и τ, что при $T > T_0(r,\tau)$ для преобразования Фурье $\widehat{g}_u^T$ функции g_u^T при $\varepsilon = 1/T$ справедливы оценки*

$$c(\tau,r,\lambda)\, T\, f_\varepsilon(u) \leqslant \int\limits_{-\infty}^{\infty} |\widehat{g}_u^T(x)|^2\, f(x)\, dx \leqslant C(\tau,r,\lambda)\, T\, f_\varepsilon(u). \tag{44}$$

§4. Несмещенные оценки

Нас будут интересовать случайные величины вида

$$(x,\varphi)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}\overline{\varphi(t)}\,dx(t),$$

определенные для индикаторных функций $\varphi(t)=\mathbf{1}_{[a,b]}(t)$ конечных интервалов соотношением

$$(x,\varphi):=x(b)-x(a).$$

Они также корректно определены, например, для линейного множества $\mathscr{D}$ функций φ, удовлетворяющих условию

$$\varphi\in L^2,\ |\widehat{\varphi}(u)|^2\leqslant\frac{C(\varphi)}{1+u^2},\ \text{где}\ \widehat{\varphi}(u)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}e^{-iut}\varphi(t)\,dt. \tag{45}$$

При $\varphi\in S$

$$\mathbf{E}\,(x,\varphi)=0,\quad \mathbf{E}\,|(x,\varphi)|^2=\int\limits_{-\infty}^{\infty}|\widehat{\varphi}(u)|^2\,f(u)\,du.$$

Далее мы будем использовать другую нормировку, полагая для $\varphi\in\mathscr{D}_T$

$$(x,\varphi)_{T}:=\frac{1}{2T}\int\limits_{-T}^{T}\overline{\varphi(t)}\,dx(t),\quad (s,\varphi)_{T}:=\frac{1}{2T}\int\limits_{-T}^{T}\overline{\varphi(t)}\,s(t)\,dt.$$

Здесь

$$\mathscr{D}_{T}=\{\varphi:\ \varphi\in S,\ \operatorname{supp}\varphi\subset[-T,T]\}.$$

Стандартный прием заключается (подробнее см. в [9]) в переходе к дискретной схеме, когда наблюдаются величины

$$Y_{T}(u)=(s,g_u^{T})_{T}+(x,g_u^{T})_{T}=a(u)+(x,g_u^{T})_{T},\quad u\in\Lambda. \tag{46}$$

Положим $X_{T}(u)=(x,g_u^{T})_{T}$. В этих обозначениях задача сводится к оцениванию вектора $\boldsymbol{a}=(a(u),\ u\in\Lambda)$ по наблюдениям

$$Y_{T}(u)=a(u)+X_{T}(u),\quad u\in\Lambda,$$

при априорном предположении о том, что

$$\sum_{u\in\Lambda}|a(u)|^2\,(1+|u|)^{2\beta}\leqslant L.$$

Дополнительная информация (см. [9]) состоит в том, что $\bigl(X_T(u), u \in \Lambda\bigr)$ — гауссовский процесс с нулевым средним. Если при $T \to \infty$ выполнено условие Макенхаупта, то

$$\sigma_T^2(u) = \mathbf{E}\,|X_T(u)|^2 \asymp \frac{1}{T}\, f_\varepsilon(u), \quad u \in \Lambda,$$

и при любых $M \subset \Lambda$, $u \notin \Lambda$ и векторе $\boldsymbol{b} = (b(u),\, v \in M)$

$$\mathbf{E}\,|X_T(u) - \sum_{v\in M} b(v)\, X_T(v)|^2 \geqslant (1-\rho^2)\,\mathbf{E}\,(X_T(u)$$

с величиной ρ^2, не зависящей от перечисленных $M, u, \boldsymbol{b}$.

Выберем $\varepsilon = 1/T$ и $m \in \mathbb{R}$ так, чтобы

$$m^{2\beta+1}\varepsilon^{1+\alpha} = 1, \tag{47}$$

предполагая, что $T > T_0$ и T настолько велико, что в отрезок $(-m, m)$ попадает хотя бы одна точка из Λ.

Далее, в качестве параметрического множества Θ возьмем те векторы $\boldsymbol{a} = (a(u),\, u \in \Lambda)$, для которых

$$|a(u)|^2 \leqslant \frac{f_\varepsilon(u)}{\sum\limits_{|v|\leqslant m} f_\varepsilon(v)\,(1+|v|)^{2\beta}}\, L = \frac{\varepsilon\, f_\varepsilon(u)}{\varepsilon \sum\limits_{|v|\leqslant m} f_\varepsilon(v)\,(1+|v|)^{2\beta}}\, L, \tag{48}$$

полагая, что $a(u) = 0$ при $|u| > m$, если $\boldsymbol{a} \in \Theta$. Очевидно, из (48) следует, что

$$\sum_{u\in\Lambda} |a(u)|^2(1+|u|)^{2\beta} = L, \quad \boldsymbol{a} \in \Theta.$$

Следующий шаг заключается в доказательстве того, что при $T \to \infty$ если выполнено условие

$$\sup_{0<\varepsilon<\tau/2,\, u\in\Lambda} \frac{1}{2\varepsilon} \int\limits_{u-\varepsilon}^{u+\varepsilon} |\ln f(x) - \ln f_0(x)|\, dx < \infty, \tag{$*$}$$

то

$$\frac{\varepsilon\, f_\varepsilon(u)}{\varepsilon \sum\limits_{|v|\leqslant m} f_\varepsilon(v)\,(1+|v|)^{2\beta}}\, L \asymp \varepsilon\, f_\varepsilon(u).$$

Это достигается оценкой сверху величины

$$\varepsilon \sum_{|v|\leqslant m} f_\varepsilon(v)\,(1+|v|)^{2\beta},$$

исходя из соотношения (47) и используя то обстоятельство, что при условии $(*)$ найдутся такие константы d и $D \geqslant d$, что

$$d\,\varepsilon^{\alpha} \leqslant f_{\varepsilon}(u) \leqslant D\,\varepsilon^{\alpha}, \quad u \in \Lambda.$$

В результате, имея при подходящем C оценку

$$\frac{f_{\varepsilon}(u)}{\sum\limits_{|v| \leqslant m} f_{\varepsilon}(v)\,(1+|v|)^{2\beta}}\, L \geqslant C\,\varepsilon\, f_{\varepsilon}(u),$$

мы получаем задачу, в которой параметрическое множество является конечным произведением множеств вида:

$$|a(u)|^2 \leqslant C\,\varepsilon\, f_{\varepsilon}(u).$$

Оно содержится в исходном и величина минимаксного риска оценивается снизу стандартным образом.

Для оценки сверху величины минимаксного риска предъявляется конкретная оценка: $\widehat{a}_T(u) = Y_T(u)$, если $u < m$, и $\widehat{a}_T(u) = 0$, если $|u| \geqslant m$. Остается только правильно подобрать параметр усечения. Соотношение (47) является оптимальным.

Список литературы

1. Ю. А. Розанов, *Стационарные процессы.* М., Мир, 1963.
2. И. А. Ибрагимов, Ю. А. Розанов, *Гауссовские процессы.* М., Мир, 1974.
3. И. А. Ибрагимов, Р. З. Хасьминский, *О непараметрическом оценивании значения линейного функционала в гауссовском белом шуме.* — Теория вероятн. и ее примен. **29**, No. 1 (1984), 19–32.
4. D. L. Donoho, R. C. Liu, B. MacGibbon, *Minimax risk over hyperrectangles, and implications.* — Ann. Statist. **18**, No. 3 (1990), 1416–1437.
5. W. Stepanoff, *Sur quelques generalisations des fonctions presque-periodiques.* — Comptes Rendus **181** (1925), 90–92.
6. Н. Винер, Р. Пэли, *Преобразование Фурье в комплексной плоскости.* М., Наука, 1964.
7. J. B. Garnett, *Bounded Analytic Functions.* NY, Academic Press, 1981.
8. В. Н. Солев, *Условие локальной асимптотической нормальности для гауссовских стационарных процессов.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **278** (2001), 225–247.
9. В. Н. Солев, *Оценка функции, наблюдаемой на фоне стационарного шума: дискретизация.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **441** (2015), 286–298.

Solev V. N. BMO space and the problem of estimating a function in stationary noise.

In this paper, we construct lower and upper bounds for minimax risk in the problem of estimating the unknown pseudo-periodic function observed in the stationary noise with a spectral density satisfying the Muckenhoupt condition, with some a priori information about the behavior of the spectral density in the neighborhood of the spectrum of the signal.

Санкт-Петербургское отделение
Математического института им. В. А. Стеклова
Фонтанка 27
Санкт-Петербург 191023, Россия
и Санкт-Петербургский государственный университет,
Университетская наб. 7/9
Санкт-Петербург, 199034 Россия
E-mail: solev@pdmi.ras.ru

Поступило 20 ноября 2023 г.