Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 526, 2023 г.

Н. В. Смородина, Е. Б. Яровая

ОБ ОДНОЙ ПРЕДЕЛЬНОЙ ТЕОРЕМЕ ДЛЯ ВЕТВЯЩИХСЯ СЛУЧАЙНЫХ БЛУЖДАНИЙ С КОНЕЧНЫМ ЧИСЛОМ ТИПОВ ЧАСТИЦ

§1. Введение

В последние годы активно развивается такая область стохастических процессов, как теория ветвящихся случайных блужданий (ВСБ). Привлечение ВСБ позволяет изучить эволюцию систем частиц, которые могут не только размножаться, гибнуть, но и перемещаться по пространству в различных средах по правилам, учитывающим фактор случайности [1]. Такие процессы находят применение в различных областях науки, например, в статистической физике [2, 3], теории гомополимеров [4] и др. Как отмечено в фундаментальном обзоре по теории ветвящихся процессов [5], общая теория марковских случайных процессов была заложена и в своих принципиальных положениях развита А. Н. Колмогоровым в [6]. К марковским случайным процессам со счетным числом состояний относятся рассматриваемые нами далее ВСБ по многомерной решетке $\mathbb{Z}^d$, $d \in \mathbb{N}$.

Одним из ключевых вопросов при анализе систем частиц в ВСБ является вопрос о предельном поведении характеристик, описывающих эволюцию этих систем. В большинстве публикаций по данной тематике доказательства соответствующих предельных теорем объединяются общим методом исследования, основанном на анализе асимптотики целочисленных моментов популяций и субпопуляций частиц [7].

В настоящей работе рассматривается непрерывное по времени ВСБ частиц конечного числа K различных типов по решетке $\mathbb{Z}^d$, $d \in \mathbb{N}$. Случайное блуждание частиц каждого типа, лежащее в основе процесса, предполагается однородным, симметричным и неприводимым, а источники ветвления располагаются, вообще говоря, во всех точках

Ключевые слова: многотипные ветвящиеся случайные блуждания, мартингалы, предельные теоремы.

Работа поддержана РНФ, (грант № 23-11-00375) и выполнена в Математическом институте им. В. А. Стеклова РАН.

решетки. При этом предполагается также, что интенсивность ветвления частиц квждого типа стремится к нулю при удалении узла $x \in \mathbb{Z}^d$ от начала координат. На ветвление в каждой точке решетки налагается условие симметричности – интенсивность превращения частицы типа j, $j = 1, 2, \ldots, K$, в частицу типа m, $m = 1, 2, \ldots, K$, совпадает с интенсивностью обратного превращения. Кроме того, налагается дополнительное условие, гарантирующее экспоненциальный рост (по времени) среднего числа частиц любого типа в каждой точке $\mathbb{Z}^d$. Точные условия на процессы блуждания и ветвления сформулированы при описании модели ВСБ в §2.

Основным объектом изучения является численность частиц типа m в момент времени t в произвольной фиксированной точке $y_0 \in \mathbb{Z}^d$, обозначаемая далее $\mathcal{N}(x, k, y_0, m, t)$, при условии что в начальный момент времени $t = 0$ у нас имелась единственная частица типа k, $k = 1, 2, \ldots, K$, находящаяся в точке $x \in \mathbb{Z}^d$. Доказывается предельная теорема о равномерной по $x \in \mathbb{Z}^d$ сходимости в среднеквадратическом нормированной величины $\mathcal{N}(x, k, y_0, m, t)$ при $t \to \infty$ (теорема 3).

Как отмечалось выше, в подавляющем числе публикаций по данной тематике при доказательстве предельных теорем для (нормированной) численности частиц [7] использовался метод моментов, требующий нахождения асимптотики при $t \to \infty$ всех моментов численности частиц $\mathcal{N}(x, k, y_0, m, t)$. В настоящей работе для доказательства предельной теоремы мы предлагаем использовать другой метод, основанный на мартингальной технике. Такой подход (при определенных предположениях, строго формулируемых в §2) имеет свои очевидные преимущества. Он позволяет, во-первых, для получения предельной теоремы о численности частиц в каждой точке решетки ограничиться изучением двух ее первых моментов (существование остальных не требуется), а во-вторых – обобщить результаты, полученные для ВСБ с конечным числом источников ветвления частиц, на модели с бесконечным числом таких источников, в которых интенсивность рождения превышает интенсивность гибели частиц. И самое главное — в отличие от метода моментов, с помощью которого устанавливается сходимость по распределению случайных величин, мартингальный подход позволяет доказать более сильное утверждение о сходимости случайных величин к пределу в среднеквадратическом таким же образом, как это доказано для надкритических ветвящихся процессов (см. [8, теорема 5, § VII]).

Впервые мартингальная техника для изучения ветвящихся процессов Гальтона–Ватсона была использована Дубом. Дальнейшее развитие мартингальные методы для изучения ветвящихся процессов и ВСБ получили в работах Ватанабе, Иоффе и Биггинса, см. [9, 10] и библиографию в этих работах. При построении мартингалов в этих работах использовалась характеристическая функция шага блуждания и, соответственно, они давали возможность доказательства предельных теорем для характеристических функций соответствующего процесса. Мы далее конструируем мартингал другого типа, построение которого базируется на использовании методов спектральной теории самосопряженных операторов (см. теорему 1 в §3).

Кратко опишем структуру статьи. В §2 напоминается определение ВСБ по $\mathbb{Z}^d$ с возможностью ветвления с различной интенсивностью в каждой точке $\mathbb{Z}^d$. Без дополнительных предположений на интенсивности источников ветвления анализ поведения ВСБ с помощью мартингальной техники оказывается затруднительным, и поэтому во всех последующих разделах исследование проведено при выполнении условия (6) о стремлении интенсивностей генерации частиц к нулю на бесконечности. В этом случае важной характеристикой процесса оказывается также условие (7), гарантирующее экспоненциальный рост по времени математических ожиданий величин $\mathcal{N}(x,k,y_0,m,t)$. В §3 предлагается рассмотреть ВСБ как марковский процесс, принимающий значения в пространстве всех конечных целочисленных мер на $\mathbb{Z}^d$. Там же вводятся операторные семейства, порожденные ВСБ. §4 посвящен доказательству теоремы 3 о сходимости в среднеквадратическом нормированного числа частиц в произвольной фиксированной точке $\mathbb{Z}^d$ для ВСБ при $t \to \infty$, которое основано на аппроксимации нормированного числа частиц неотрицательным мартингалом, построенным в §3.

Настоящая работа является обобщением работ авторов [11, 12] со случая, когда в системе имеются частицы только одного типа, на случай частиц нескольких типов.

§2. Постановка задачи и предварительные сведения

Далее будем предполагать, что в изучаемом ВСБ имеется K типов частиц, которые мы будем нумеровать числами от 1 до K. Время $t \geqslant 0$ предполагается непрерывным, а перемещение частицы типа

$k \in \{1, \ldots, K\}$ описывается случайным блужданием по $\mathbb{Z}^d$, $d \in \mathbb{N}$, задаваемым матрицей переходных интенсивностей $A_k = (a_k(x,y))_{x,y \in \mathbb{Z}^d}$, на которую налагаются условия:

A1. $a_k(x,y) \geqslant 0$ при $x \neq y$ и $a_k(x,x) < 0$, $\sum_y a(x,y) = 0$ (*регулярность*);

A2. $a_k(x,y) = a_k(y,x)$ (*симметричность*);

A3. $a_k(x,y) = a_k(0, y-x) = a_k(y-x)$ (*однородность по пространству*);

A4. для каждого $z \in \mathbb{Z}^d$ найдется такой набор векторов $z_1, z_2, \ldots, z_r \in \mathbb{Z}^d$, что $z = \sum_{i=1}^r z_i$ и $a_k(z_i) \neq 0$ при $i = 1, \ldots, r$ (*неприводимость*).

Через $\xi_x^{(k)}(t)$ обозначим траекторию случайного блуждания частицы k-го типа с начальным условием $\xi_x^{(k)}(0) = x$. Как известно, см., например, [8], в условиях A1–A4 семейство $\xi_x^{(k)}(t)$, $x \in \mathbb{Z}^d$, является марковским. С этим семейством мы свяжем полугруппу операторов

$$P_{0k}^t : L_2(\mathbb{Z}^d) \to L_2(\mathbb{Z}^d), \quad t \geqslant 0,$$

где оператор P_{0k}^t действует на функцию $\varphi \in L_2(\mathbb{Z}^d)$ следующим образом:

$$[P_{0k}^t \varphi](x) = \mathbf{E}\, \varphi(\xi_x^{(k)}(t)). \tag{1}$$

Строгий (формально-математический) вывод необходимых в дальнейшем свойств полугруппы P_0^t непосредственно из аксиом A1–A4 – ее сильной непрерывности, дифференцируемости и прочих (возможно, достаточно очевидных с содержательной “физической” точки зрения) – является нетривиальной задачей. Однако, мы не останавливаемся на соответствующих деталях, поскольку все необходимые свойства этой полугруппы были получены в [1] с помощью (альтернативного теоретико-групповому) подхода, основанного на представлении данной полугруппы как фундаментального решения некоторого дифференциального уравнения в банаховых пространствах $L_p(\mathbb{Z}^d)$, где $1 \leqslant p \leqslant \infty$. Такой подход позволяет получить все требуемые свойства полугруппы P_0^t практически автоматически как следствие соответствующих общих теорем теории дифференциальных уравнений в банаховых пространствах [13]. Подробнее с теорией операторных полугрупп, порожденных марковскими семействами, можно ознакомиться, например, в [14].

В качестве области определения оператора P^t_{0k} нам будет удобно выбрать именно $L_2(\mathbb{Z}^d)$, ниже мы покажем, что при всех $t \geqslant 0$ оператор P^t_{0k} является сжимающим оператором в $L_2(\mathbb{Z}^d)$. Далее, для функции

$$u(t,x) = \mathbf{E}\,\varphi(\xi^{(k)}_x(t)) = [P^t_{0k}\varphi](x)$$

выпишем обратное уравнение Колмогорова. Для этого заметим, что при $x \in \mathbb{Z}^d$, $t \to 0$ имеет место соотношение

$$\begin{aligned} u(t,x) - u(t,0) &= [P^t_{0k}\varphi](x) - \varphi(x) \\ &= \varphi(x)\,(1 + t\,a_k(0)) + t\sum_{y\neq x} a_k(x-y)\,\varphi(y) + o(t) - \varphi(x) \\ &= t\,\bigl(\varphi(x)\,a_k(0) + \sum_{y\neq x} a_k(x-y)\,\varphi(y)\bigr) + o(t) \\ &= t\,[\mathcal{A}_k\varphi](x) + o(t), \end{aligned}$$

где

$$[\mathcal{A}_k\varphi](x) = \sum_{y\in\mathbb{Z}^d} a_k(x-y)\,\varphi(y).$$

Поэтому уравнение Колмогорова принимает вид

$$\frac{du}{dt} = \mathcal{A}_k u, \qquad u(0,x) = \varphi(x). \tag{2}$$

Далее нам будет удобнее проводить рассуждения не в терминах уравнений, а в терминах функций от операторов. Из уравнения (2) вытекает, что оператор $\mathcal{A}_k$ является генератором (инфинитезимальным оператором) полугруппы P^t_{0k}. Более того, $\mathcal{A}_k$ является оператором свертки: $\mathcal{A}_k\varphi = a_k * \varphi$. Соответственно, его (дискретное) преобразование Фурье является оператором умножения:

$$[\widehat{\mathcal{A}_k}\widehat{\varphi}](p) = \widehat{a_k}(p)\,\widehat{\varphi}(p),$$

где функции $\widehat{\varphi}$, $\widehat{a_k}$ определяются равенствами

$$\widehat{\varphi}(p) = \sum_{y\in\mathbb{Z}^d} \varphi(y)\,e^{i(p,y)}, \quad \widehat{a_k}(p) = \sum_{y\in\mathbb{Z}^d} a_k(y)\,e^{i(p,y)}.$$

Из условия A1 следует, что $\widehat{a_k}(0) = 0$, а из A2 и A3 следуют соотношения

$$\widehat{a_k}(p) = a_k(0) + \sum_{y\neq 0} a_k(y)\cos(p,y) \leqslant a_k(0) + \sum_{y\neq 0} a_k(y) = 0.$$

и

$$\widehat{a_k}(p) = a_k(0) + \sum_{y\neq 0} a_k(y)\cos(p,y) \geqslant a_k(0) - \sum_{y\neq 0} a_k(y) = 2\,a_k(0).$$

Из последних неравенств вытекает, что оператор $\mathcal{A}_k$ унитарно эквивалентен оператору умножения на вещественную ограниченную функцию $\widehat{a_k}(p)$ и, значит, является самосопряженным ограниченным оператором в $L_2(\mathbb{Z}^d)$, а его спектр $\sigma(\mathcal{A}_k)$ содержится в интервале $[-S_k, 0]$, где $S_k = -\inf_{p\in[-\pi,\pi]^d} \widehat{a_k}(p) > 0$. Из утверждения о спектре немедленно вытекает, что для всех $t \geqslant 0$ оператор P^t_{0k} является сжимающим оператором в $L_2(\mathbb{Z}^d)$.

Для описания ВСБ добавим к случайному блужданию механизм ветвления. Мы будем предполагать, что частицы могут не только блуждать по $\mathbb{Z}^d$, но и в некоторые случайные моменты они могут делиться, т.е. превращаться в несколько других частиц, вообще говоря, различных типов. При этом в момент деления исходная частица исчезает, а новые частицы появляются в той же самой точке, что и частица-родительница. Мы будем предполагать, что процесс ветвления может происходить в каждой точке $\mathbb{Z}^d$. Обозначим $\mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, \dots\}$, а через $\mathbf{1}$ обозначим вектор

$$\mathbf{1} = (1, 1, \dots, 1) \in \mathbb{N}_0^K.$$

Процесс ветвления в точке $x \in \mathbb{Z}^d$ задается с помощью многомерных инфинитезимальных производящих функций f^k, $k = 1, 2, \dots, K$, определяемых соотношениями

$$f^k(x,u) = \sum_{\alpha\in\mathbb{N}_0^K}^{\infty} b^k_\alpha(x)\,(u_1)^{\alpha_1}\cdots(u_K)^{\alpha_K},$$

$$u = (u_1, \dots, u_K) \in [0,1]^K, \quad x \in \mathbb{Z}^d,$$

в которых $b_{\mathbf{1}}(x) \leqslant 0$, $b_\alpha(x) \geqslant 0$ при $\alpha \neq \mathbf{1}$ и $\sum_{\alpha\in\mathbb{N}_0^K} b_\alpha(x) = 0$.

Через $\beta_{km}(x)$ будем обозначать интенсивность генерации частиц типа m одной частицей типа k, находящейся в точке $x \in \mathbb{Z}^d$. По определению

$$\beta_{km}(x) = \frac{\partial f^k}{\partial u_m}(x, \mathbf{1}) = \sum_{\alpha\in\mathbb{N}_0^K} \alpha_m\, b^k_\alpha(x).$$

Через $\beta(x)$ будем обозначать матрицу $K \times K$ вида

$$\beta(x) = \big(\beta_{km}(x)\big)^K_{k,m=1}. \tag{3}$$

Для $k \in \{1, \dots, K\}$ через $\beta_k^{(2)}(x)$ обозначим матрицу $\left(\beta_k^{(2)}(x)\right)_{j,m=1}^K$ где

$$\left(\beta_k^{(2)}(x)\right)_{j,m} = \frac{\partial^2 f^k}{\partial u_j \partial u_m}(x, \mathbf{1}).$$

Всюду далее мы будем предполагать, что элементы этой матрицы равномерно ограничены по $x \in \mathbb{Z}^d$.

Для $\psi \in L_2(\mathbb{Z}^d)$ через $\left(\beta^{(2)}\psi, \psi\right)$ будем обозначать вектор-функцию (элемент $(L_2(\mathbb{Z}^d))^K$) вида

$$\left(\beta^{(2)}\psi, \psi\right)(x) = \Big([\left(\beta^{(2)}\psi, \psi\right)]_1(x), \dots, [\left(\beta^{(2)}\psi, \psi\right)]_K(x)\Big),$$

где

$$[\left(\beta^{(2)}\psi, \psi\right)]_k(x) = \sum_{j,m=1}^K \left(\beta_k^{(2)}(x)\right)_{j,m} \psi_j(x)\psi_m(x). \tag{4}$$

Всюду далее будем предполагать, что для любых x, m, k выполнено равенство

$$\beta_{km}(x) = \beta_{mk}(x), \tag{5}$$

и для любых m, k

$$\beta_{km}(x) \to 0 \quad \text{при } \|x\| \to \infty, \tag{6}$$

где $\|\cdot\|$ – евклидова норма в $L_2(\mathbb{Z}^d)$.

Далее, будем предполагать, что для любых k, m найдется элемент $x \in \mathbb{Z}^d$, такой что $\beta_{km}(x) = \beta_{mk}(x) > 0$. Это условие (вместе с условием A4) обеспечивает неприводимость блуждания по типам частиц, что означает, что за любое положительное время частица любого типа может превратиться в частицу любого другого типа с положительной вероятностью.

Как обычно, процесс ветвления предполагается независимым от процесса блуждания.

Пусть $h = (h_1, \dots, h_K) \in \left(L_2(\mathbb{Z}^d)\right)^K$. На пространстве $\left(L_2(\mathbb{Z}^d)\right)^K$ введем скалярное произведение и норму, полагая

$$(h, g) = \sum_{x \in \mathbb{Z}^d} (h(x), g(x)), \quad \|h\|^2 = \sum_{x \in \mathbb{Z}^d} \|h(x)\|_2^2.$$

Всюду далее пространство $\left(L_2(\mathbb{Z}^d)\right)^K$ мы будем при необходимости естественным образом отождествлять с $L_2(\mathbb{Z}^d \times \{1, \dots, K\})$, именно, функцию $h = (h_1, \dots, h_K) \in \left(L_2(\mathbb{Z}^d)\right)^K$ мы будем отождествлять с функцией $\widetilde{h} \in L_2(\mathbb{Z}^d \times \{1, \dots, K\})$ определяемой как $\widetilde{h}(x, k) = h_k(x)$.

Кроме приведенных выше условий далее мы будем также предполагать выполнение условия

$$\sup_{\|h\|=1}\left\{(\mathcal{A}h,h)+\sum_{x\in\mathbb{Z}^d}(\beta(x)h(x),h(x))\right\}$$
$$=\sup_{\|h\|=1}\left\{\sum_{k=1}^{K}(\mathcal{A}_k h_k,h_k)+\sum_{x\in\mathbb{Z}^d}\sum_{k,m=1}^{K}\beta_{km}(x)h_k(x)h_m(x)\right\}>0, \quad (7)$$

где оператор

$$\mathcal{A}h=(\mathcal{A}_1h_1,\ldots,\mathcal{A}_Kh_K), \quad h=(h_1,\ldots,h_K)\in\big(L_2(\mathbb{Z}^d)\big)^K, \quad (8)$$

действующий в $\big(L_2(\mathbb{Z}^d)\big)^K$, описывает совокупное действие операторов $\mathcal{A}_k$.

Как будет показано далее, последнее условие гарантирует, что ВСБ является надкритическим, то есть среднее число частиц в популяции экспоненциально растет по t.

Обозначим через $X_{(x,k)}(t)$, $t\geqslant 0$, ВСБ, задаваемое оператором $\mathcal{A}$ и производящей функцией $f(x,u)=(f^1(x,u),\ldots,f^K(x,u))$, с условием $X_{(x,k)}(0)=\delta_{(x,k)}$ того, что в момент времени $t=0$ в системе имеется ровно одна частица типа k, находящаяся в точке $x\in\mathbb{Z}^d$. Процесс $X_{(x,k)}(t)$ мы далее будем рассматривать как марковский процесс, принимающий значения в пространстве $\mathcal{M}^K$, где $\mathcal{M}$ – пространство всех конечных целочисленных мер на $\mathbb{Z}^d$. Всякий элемент $M=(M_1,\ldots,M_K)\in\mathcal{M}^K$ имеет вид

$$M=\left(\sum_{j=1}^{r_1}\delta_{(y_j^1,1)},\ldots,\sum_{j=1}^{r_K}\delta_{(y_j^K,K)}\right), \quad (9)$$

где $r_1,\ldots,r_K\in\mathbb{N}\cup\{0\}$ и $y_j^k\in\mathbb{Z}^d$. Последнее представление означает, что в системе имеется r_1 частиц типа 1, которые находятся в точках $y_1^1,\ldots,y_{r_1}^1$, r_2 частиц типа 2, которые находятся в точках $y_1^2,\ldots,y_{r_2}^2$ и т.д. Важно отметить, что в представлении (9) точки y_j^k не обязательно различны, что соответствует тому, что в одном узле решетки $\mathbb{Z}^d$ может находиться несколько частиц одновременно (причем как одного типа, так и разных), и отличаются находящиеся в одном узле частицы одного типа k только своими номерами в списке частиц $\{y_1^k,y_2^k,\ldots,y_{r_k}^k\}$. Другими словами, каждое (y_j^k,k) соответствует отдельной частице, которую мы кодируем ее типом k, занятым ею узлом решетки y_j^k и ее номером j в списке в списке частиц типа k. Как будет ясно из дальнейшего, конкретный выбор нумерации частиц одного типа не играет роли. Для $M \in \mathcal{M}^K$ символом $\{M\}$ будем обозначать множество всех частиц всех типов, которое запишем как

$$\{M\} = \{(y_1^1, 1), \dots, (y_{r_1}^1, 1), \dots, (y_1^K, K), \dots, (y_{r_K}^K, K)\}, \tag{10}$$

причем в этом представлении каждый узел решетки может встречаться несколько раз, что соответствует тому, что в этом узле находится несколько частиц.

Итак, процесс $X_{(x,k)}(t)$ мы рассматриваем как $\mathcal{M}^K$-значный марковский случайный процесс.

§3. Операторные семейства, порождаемые ветвящимся случайным блужданием

Так как фазовое пространство $\mathcal{M}^K$ марковского процесса $X_{(x,k)}(t)$ устроено достаточно сложно, мы не будем пытаться выписывать аналог "классической" полугруппы (1) для этого процесса. Вместо этого мы определим два более простых операторных семейства, описывающие в совокупности динамику процесса $X_{(x,k)}(t)$, первое из которых будет полугруппой, а второе уже нет (см. ниже леммы 2 и 4). Данный подход близок к идее построения кратных стохастических интегралов (см., например, [15]), хотя нам для наших целей будет достаточно ограничиться интегралами кратности один и два. Напомним, что процесс $X_{(x,k)}(t)$ мы рассматриваем как случайный процесс со значениями в пространстве $\mathcal{M}^K$, при этом случайное множество $\{X_{(x,k)}(t)\}$ определяется формулой (10).

Для каждых $t \geqslant 0$, $x \in \mathbb{Z}^d$ и

$$\varphi = (\varphi_1, \dots, \varphi_K) \in \big(L_2(\mathbb{Z}^d)\big)^K \tag{11}$$

определим случайные величины

$$I_{t,x}(\varphi) = (I_{t,x,1}(\varphi), \dots, I_{t,x,K}(\varphi)) \tag{12}$$

и

$$I_{t,x}^{(2)}(\varphi) = (I_{t,x,1}^{(2)}(\varphi), \dots, I_{t,x,K}^{(2)}(\varphi)), \tag{13}$$

полагая при $k = 1, \dots, K$

$$I_{t,x,k}(\varphi) = \sum_{(y,m)\in\{X_{(x,k)}(t)\}} \varphi_m(y), \tag{14}$$

$$I^{(2)}_{t,x,k}(\varphi) = \sum_{\{(y,m),(z,l)\}\subset\{X_{x,k}(t)\},\,(y,m)\neq(z,l)} \varphi_m(y)\,\varphi_l(z) \tag{15}$$

(в последней формуле суммирование проводится по всем двухчастичным подмножествам множества $\{X_{(x,k)}(t)\}$). По определению имеем

$$I_{0,x,k}(\varphi) = \varphi_k(x), \quad I^{(2)}_{0,x,k}(\varphi) = 0. \tag{16}$$

Из (14) и (15) легко выводится соотношение

$$(I_{t,x,k}(\varphi))^2 = 2I^{(2)}_{t,x,k}(\varphi) + I_{t,x,k}(\varphi^2), \tag{17}$$

где вектор-функция φ^2 определяется как

$$\varphi^2 = (\varphi_1^2, \dots, \varphi_K^2).$$

Для любого $t \geqslant 0$ определим оператор P^t, полагая для $\varphi \in (L_2(\mathbb{Z}^d))^K$

$$[P^t\varphi](x) = \mathbf{E}\, I_{t,x}(\varphi) = (\mathbf{E}\, I_{t,x,1}(\varphi), \dots, \mathbf{E}\, I_{t,x,K}(\varphi)).$$

Заметим, что в силу (16) для всех φ мы имеем $P^0\varphi = \varphi$.

Далее нам понадобится одно полезное свойство векторнозначного случайного процесса $I_{t,x}(\varphi)$. Через $\mathcal{F}_t$ обозначим σ–алгебру, порожденную процессами $X_{(x,k)}(t)$, $k = 1, \dots, K$.

Справедливо следующее утверждение.

Лемма 1. *Для любых $0 \leqslant t < T$ и $x \in \mathbb{Z}^d$ справедливо соотношение*

$$\mathbf{E}\,(I_{T,x}(\varphi)|\mathcal{F}_t) = I_{t,x}(P^{T-t}\varphi).$$

Доказательство. Покажем, что для всех $k = 1, \dots, K$ выполнено

$$\mathbf{E}\,(I_{T,x,k}(\varphi)\,|\,\mathcal{F}_t) = I_{t,x,k}(P^{T-t}\varphi).$$

Так как процесс $X_{(x,k)}(t)$ является марковским, имеем

$$\mathbf{E}\,(I_{T,x,k}(\varphi)\,|\,\mathcal{F}_t) = \mathbf{E}\,(I_{T,x,k}(\varphi)\,|\,X_{(x,k)}(t)).$$

Вычислим сначала условное математическое ожидание

$$\mathbf{E}\,(I_{T,x,k}(\varphi)\,|\,X_{(x,k)}(t) = M),$$

где $M \in \mathcal{M}^K$.

Пусть

$$M = \left(\sum_{j=1}^{r_1} \delta_{(y_j^1,1)}, \dots, \sum_{j=1}^{r_K} \delta_{(y_j^K,K)} \right)$$

для некоторых $r_1, \dots, r_K \in \mathbb{N}_0$. Тогда, в силу (10),

$$\{M\} = \left\{ (y_1^1, 1), \dots, (y_{r_1}^1, 1), \dots, (y_1^K, K), \dots, (y_{r_K}^K, K) \right\}.$$

Далее, разбивая сумму $I_{T,x,k}(\varphi)$ на $r_1+r_2+\dots+r_K$ кластеров частиц, отвечающих общему "предку" (y^m, m), получаем

$$\mathbf{E}\left(I_{T,x,k}(\varphi) \,\middle|\, X_{(x,k)}(t) = M \right) = \sum_{m=1}^{K} \sum_{j=1}^{r_m} [P^{T-t}\varphi]_m(y_j^m).$$

Наконец, подставляя в правую часть последнего равенства $M = X_{(x,k)}(t)$ и пользуясь определением (14), получаем утверждение леммы. □

Лемма 2. *Семейство операторов P^t является полугруппой, то есть для всех $s, t \geqslant 0$ справедливо соотношение*

$$P^{t+s} = P^t P^s.$$

Доказательство. В силу леммы 1,

$$\mathbf{E}\left(I_{t+s,x}(\varphi) \,|\, \mathcal{F}_t \right) = I_{t,x}(P^s\varphi).$$

Отсюда, вычисляя математическое ожидание от левой и правой частей последнего равенства, получаем утверждение леммы. □

Будем рассматривать оператор P^t для всех t на области определения $\mathcal{D}(P^t) = \left(L_2(\mathbb{Z}^d) \right)^K$. Для $\varphi \in \left(L_2(\mathbb{Z}^d) \right)^K$ через $\|\varphi\|$ обозначим норму

$$\|\varphi\|^2 = \sum_{y \in \mathbb{Z}^d} \sum_{k=1}^{K} |\varphi_k(y)|^2.$$

Введем диагональный оператор матричного умножения $\mathcal{B}$, действующий на функцию $\varphi = (\varphi_1, \dots, \varphi_K) \in \left(L_2(\mathbb{Z}^d) \right)^K$ следующим образом:

$$[\mathcal{B}\varphi](x) = \beta(x)\,\varphi(x),$$

где для любого $x \in \mathbb{Z}^d$ матрица $\beta(x)$ определяется равенством (3). Далее, аналогично тому, как это делалось для полугруппы P_0^t, найдем генератор полугруппы P^t. Заметим, что поскольку всюду речь идет только об ограниченных операторах в $\big(L_2(\mathbb{Z}^d)\big)^K$, нет никаких технических проблем с определением генератора.

Лемма 3. *Генератор полугруппы P^t есть оператор $\mathcal{A}+\mathcal{B}$, то есть для всех $\varphi \in L_2(\mathbb{R}^d)$ и $x \in \mathbb{R}^d$ справедливо*

$$\lim_{t\to 0+} \frac{[P^t\varphi](x) - \varphi(x)}{t} = [\mathcal{A}\varphi](x) + \beta(x)\,\varphi(x) = [(\mathcal{A}+\mathcal{B})\,\varphi](x).$$

Доказательство. При $t \to 0+$ для любого $k = 1,\dots .K$ имеем

$$\begin{aligned}
&[P^t\varphi]_k(x) - \varphi_k(x) = \mathbf{E}\, I_{t,x,k}(\varphi) - \varphi_k(x)\\
&\quad = \varphi_k(x)\,(1 + ta_k(0) + o(t))\,(1 + t\, b^k_{\mathbf{1}}(x) + o(t))\\
&\quad + t\sum_{y\neq x} a_k(y-x)\,\varphi_k(y) + t\sum_{m=1}^{K}\sum_{\alpha\neq\mathbf{1}} \alpha_m b^k_\alpha(x)\,\varphi_m(x) + o(t) - \varphi(x)\\
&\quad = t\sum_{y\in\mathbb{Z}^d} a_k(y-x)\,\varphi_k(y) + t\sum_{m=1}^{K} \beta_{km}(x)\,\varphi_m(x) + o(t).
\end{aligned}$$

Из последней формулы следует утверждение леммы. □

Заметим, что утверждение леммы 3 эквивалентно операторному тождеству

$$P^t = e^{t\mathcal{H}}, \quad \text{где} \quad \mathcal{H} = \mathcal{A}+\mathcal{B}.$$

Далее нам потребуются некоторые свойства спектра оператора $\mathcal{H}$. Прежде всего отметим, что $\mathcal{H}$ является ограниченным оператором в $\big(L_2(\mathbb{Z}^d)\big)^K$. Кроме того, оператор $\mathcal{H}$ представляет собой компактное возмущение оператора $\mathcal{A}$ (см. [16, гл. 4, § 6]). Из [17, теорема 3 гл. 9] вытекает, что существенный спектр оператора $\mathcal{A}$ совпадает с существенным спектром оператора $\mathcal{H}$. Как мы ранее показали, спектр $\mathcal{A}$ содержится в интервале $[-S, 0]$, где $S = \max(S_1,\dots,S_K) > 0$. Соответственно, положительный спектр возмущенного оператора $\mathcal{H}$ может состоять только из собственных значений конечной кратности, возможно сгущающихся к нулю. Последнее означает, что для любого $\delta > 0$ в множестве $[\delta,\infty)$ может находиться только конечное число точек спектра.

Далее мы всегда будем предполагать, что квадратичная форма оператора $\mathcal{H}$ принимает положительные значения, то есть выполнено условие

$$\lambda_0 = \sup_{\|h\|=1} \left\{ \sum_{k=1}^{K} \sum_{x,y\in\mathbb{Z}^d} a_k(x-y)h_k(x)h_k(y) + \sum_{x\in\mathbb{Z}^d} (\beta(x)h(x), h(x)) \right\} = \sup_{\|h\|=1} \big\{ (\mathcal{A}+\mathcal{B})h, h) \big\} > 0. \quad (18)$$

Условие (18) гарантирует (см. [17, глава 10, §1]), что у оператора $\mathcal{H}$ имеется положительное собственное значение. Из теоремы Крейна–Рутмана (см. [18] и [19]) тогда следует, что число λ_0 является простым собственным значением оператора $\mathcal{H}$, которому соответствует строго положительная собственная функция $\varphi_0 \in \big(L_2(\mathbb{Z}^d)\big)^K$ (то есть такая, что для любого $x \in \mathbb{Z}^d$ и для любого $m \in \{1, 2, \ldots, K\}$ выполнено $[\varphi_0]_m(x) > 0$).

Сформулируем и докажем важное для дальнейшего утверждение.

Теорема 1. *Пусть φ – собственная функция оператора $\mathcal{H}=\mathcal{A}+\mathcal{B}$, отвечающая собственному значению λ. Тогда для любого $x \in \mathbb{Z}^d$ процесс*

$$\eta(t,x) = e^{-\lambda t} I_{t,x}(\varphi) = e^{-\lambda t}(I_{t,x,1}(\varphi), \ldots, I_{t,x,K}(\varphi)), \quad \eta(0,x) = \varphi(x),$$

является $\mathcal{F}_t$-мартингалом со значениями в $\mathbb{R}^K$.

Доказательство. Заметим, прежде всего, что из условия (18) вытекает, что у оператора $\mathcal{H}$ имеется хотя бы одно собственное значение $\lambda > 0$. Так как φ является собственной функцией оператора $\mathcal{H}$, отвечающей собственному значению λ, то для всех $s \geqslant 0$ функция φ автоматически является собственной функцией оператора $e^{s\mathcal{H}}$, отвечающей собственному значению $e^{\lambda s}$, что означает справедливость соотношения $P^s\varphi = e^{\lambda s}\varphi$ (про определение функции от самосопряженного оператора см. подробнее [17, глава 6]).

Далее, пусть $0 \leqslant t < T$. В силу леммы 1, имеем

$$\mathbf{E}\,(\eta(T,x) \,|\, \mathcal{F}_t) = \mathbf{E}\,(e^{-\lambda T} I_{T,x}(\varphi) \,|\, \mathcal{F}_t) = e^{-\lambda T} I_{t,x}(P^{T-t}\varphi) = e^{-\lambda T} e^{\lambda(T-t)} I_{t,x}(\varphi) = e^{-\lambda t} I_{t,x}(\varphi) = \eta(t,x).$$

Теорема доказана. □

Рассмотрим старшее собственное значение λ_0 оператора $\mathcal{H}$ и отвечающую ему собственную функцию φ_0. Как уже было отмечено, это собственное значение является простым (единичной кратности), а функция φ_0 может быть выбрана строго положительной. Из теоремы 1 вытекает, что процесс $\eta(t,x) = e^{-\lambda_0 t} I_{t,x}(\varphi_0)$ является в этом случае $\mathcal{F}_t$-мартингалом. Более того, этот мартингал является покоординатно неотрицательным, а тогда из теоремы Дуба (см. [8, глава 3]) следует, что с вероятностью единица существует предел

$$\eta(\infty,x) = \lim_{t\to\infty} \eta(t,x). \tag{19}$$

Далее мы покажем, что предел в (19) существует не только почти наверное, но и в среднеквадратическом.

Пусть

$$\eta(t,x) = (\eta(t,x,1),\dots,\eta(t,x,K)).$$

Чтобы доказать сходимость в среднеквадратическом, нам нужно оценить величину

$$\mathbf{E}\,\|\eta(t,x)\|^2 = \sum_{k=1}^{K} \mathbf{E}\,|\eta(t,x,k)|^2.$$

В силу (17), для этого достаточно оценить для всех $k = 1,\dots,K$ величину $\mathbf{E}\,I^{(2)}_{t,x,k}(\varphi_0)$. С этой целью для каждого $t \geqslant 0$ определим оператор Q^t, полагая

$$[Q^t\varphi](x) = \mathbf{E}\,I^{(2)}_{t,x}(\varphi) = (\mathbf{E}\,I^{(2)}_{t,x,1},\dots,\mathbf{E}\,I^{(2)}_{t,x,K}).$$

Отметим, что семейство операторов Q^t уже не является полугруппой. Следующее утверждение дает полезную замену полугруппового свойства.

Лемма 4. *Для всех неотрицательных s,t справедливо соотношение*

$$Q^{t+s} = P^t Q^s + Q^t P^s. \tag{20}$$

Доказательство. Для произвольной $\varphi \in \left(L_2(\mathbb{Z}^d)\right)^K$ вычислим условное математическое ожидание

$$\mathbf{E}\,(I^{(2)}_{t+s,x,k}(\varphi) \mid X_{(x,k)}(t) = M),$$

где $M \in \mathcal{M}^K$.

Пусть

$$M = \left(\sum_{j=1}^{r_1} \delta_{(y_j^1,1)},\dots,\sum_{j=1}^{r_K} \delta_{(y_j^K,K)}\right)$$

для некоторых $r_1,\dots,r_K \in \mathbb{N}_0$. Тогда, в силу (10)

$$\{M\} = \big\{(y_1^1, 1), \dots, (y_{r_1}^1, 1), \dots, (y_1^K, K), \dots, (y_{r_K}^K, K)\big\}.$$

Далее, частицы, присутствующие в системе в момент времени $t+s$ разобьем на $R = r_1 + \dots + r_K$ кластеров, отвечающих общему "предку" $(y_j^{k_j}, k_j)$, а, в свою очередь, сумму $I_{t+s,x}^{(2)}(\varphi)$ разобьем на суммы произведений $\varphi_l(y^l)\,\varphi_m(z^m)$, где $(y^l, l), (z^m, m)$ принадлежат одному кластеру и аналогичные суммы, где $(y^l, l), (z^m, m)$ принадлежат разным кластерам. Получим соотношение

$$\mathbf{E}\left(I_{t+s,x,k}^{(2)}(\varphi)\,|\,X_{(x,k)}(t) = M\right) = \sum_{j=1}^{R} \mathbf{E}\, I_{s,y_j,k_j}^{(2)}(\varphi)$$

$$+ \sum_{j \neq m} \mathbf{E}\, I_{s,y_j,k_j}(\varphi) \mathbf{E}\, I_{s,y_m,k_m}(\varphi) = \sum_{j=1}^{R} [Q^s\varphi]_{k_j}(y_j) + I_{t,x,k}^{(2)}(P^s\varphi).$$

Теперь, подставляя в правую часть последнего равенства $M = X_{(x,k)}(t)$ и вычисляя математическое ожидание, получаем утверждение леммы. □

Лемма 5. *Функция* $[Q^t\varphi](x)$ *удовлетворяет уравнению*

$$\frac{d}{dt}[Q^t\varphi](x) = [\mathcal{H}Q^t\varphi](x) + \frac{1}{2}\,(\beta^{(2)}(x)[P^t\varphi](x), [P^t\varphi](x)).$$

Доказательство. Заметим сначала, что для любых $\psi \in \big(L_2(\mathbb{Z}^d)\big)^K$, $x \in \mathbb{Z}^d$, $k \in \{1, \dots, K\}$ справедливо соотношение

$$\lim_{\Delta t \to 0+} \frac{[Q^{\Delta t}\psi]_k(x)}{\Delta t} = \frac{1}{2} \sum_{\alpha} \sum_{j=1}^{K} \alpha_j\,(\alpha_j - 1)\, b_\alpha^k(x)\, \psi_j(x)^2$$

$$+ \frac{1}{2} \sum_{\alpha} \sum_{j \neq m} \alpha_j\, \alpha_m\, \psi_j(x)\, \psi_m(x) = \frac{1}{2}(\beta_k^{(2)}(x)\, \psi(x), \psi(x)).$$

Полагая в (20) $t = \Delta t$, $s = t$, получаем

$$\frac{d}{dt} Q^t\varphi(x) = \lim_{\Delta t \to 0+} \frac{[Q^{\Delta t + t}\varphi](x) - [Q^t\varphi](x)}{\Delta t}$$

$$= \lim_{\Delta t \to 0+} \frac{[P^{\Delta t}Q^t\varphi](x) - [Q^t\varphi](x)}{\Delta t} + \lim_{\Delta t \to 0+} \frac{[Q^{\Delta t}P^t\varphi](x)}{\Delta t}$$

$$= [\mathcal{H}Q^t\varphi](x) + \frac{1}{2}\,(\beta^{(2)}(x)[P^t\varphi](x), [P^t\varphi](x)).$$

Лемма доказана. □

Из лемм 2 и 5 вытекает, что функции $u_1(t,x) = \mathbf{E}\, I_{t,x}(\varphi) = P^t\varphi(x)$ и $u_2(t,x) = \mathbf{E}\, I^{(2)}_{t,x}(\varphi) = Q^t\varphi(x)$ являются решениями следующей системы уравнений

$$\frac{du_1}{dt} = \mathcal{H}u_1, \quad \frac{du_2}{dt} = \mathcal{H}u_2 + \frac{1}{2}\,(\beta_2(x)u_1, u_1),$$

с начальными условиями $u_1(0,x) = \varphi(x)$ и $u_2(0,x) = 0$.

Решая эту систему, получаем

$$u_1(t,x) = P^t\varphi(x) = \big[e^{t\mathcal{H}}\varphi\big](x), \tag{21}$$

$$u_2(t,x) = \frac{1}{2}\int_0^t \big[e^{(t-s)\mathcal{H}}\big(\beta_2(\,\cdot\,)u_1(s,\,\cdot\,), u_1(s,\,\cdot\,)\big)\big](x)\,ds. \tag{22}$$

Пусть, как и выше, $\lambda_0 > 0$ – старшее собственное значение, а $\varphi_0 > 0$ – отвечающая ему нормированная собственная функция оператора $\mathcal{H}$. Обозначим через λ_1, где $\lambda_1 < \lambda_0$, правую границу оставшегося спектра.

Нам понадобятся два простых неравенства: для любой функции $\varphi \in \big(L_2(\mathbb{Z}^d)\big)^K$ справедливо

$$\|e^{t\mathcal{H}}\varphi\| \leqslant e^{t\lambda_0}\|\varphi\|, \tag{23}$$

а для любой функции φ, принадлежащей ортогональному дополнению к φ_0,

$$\|e^{t\mathcal{H}}\varphi\| \leqslant e^{t\lambda_1}\|\varphi\|. \tag{24}$$

Кроме того, мы будем неоднократно использовать неравенство: для любого $\psi \in \big(L_2(\mathbb{Z}^d)\big)^K$

$$\max_{x\in\mathbb{Z}^d}\|\psi(x)\| \leqslant \|\psi\|.$$

Теорема 2. *Справедливо соотношение*

$$\lim_{t\to\infty}\sup_{x\in\mathbb{Z}^d}\mathbf{E}\,\|\eta(t,x) - \eta(\infty,x)\|^2 = 0. \tag{25}$$

Доказательство. Покажем, что для всех $k = \{1,\dots,K\}$ семейство случайных функций $\eta(t,x,k)$ равномерно по $x \in \mathbb{Z}^d$ фундаментально в $L_2(\Omega)$ при $t \to \infty$, т.е. для него выполнено

$$\sup_{x\in\mathbb{Z}^d}\mathbf{E}\,(\eta(t_2,x,k) - \eta(t_1,x,k))^2 \underset{t_1,t_2\to\infty}{\longrightarrow} 0. \tag{26}$$

Пусть $t_2 > t_1 > 0$. Так как процесс $\eta(t,x)$ – $\mathcal{F}_t$-мартингал, то для любого фиксированного $x \in \mathbb{Z}^d$ мы имеем

$$\mathbf{E}\,(\eta(t_2,x,k)-\eta(t_1,x,k))^2 = \mathbf{E}\,(\eta(t_2,x,k))^2 - 2\,\mathbf{E}\,(\eta(t_2,x,k)\cdot\eta(t_1,x,k)) + \mathbf{E}\,(\eta(t_1,x,k))^2 = \mathbf{E}\,(\eta(t_2,x,k))^2 - \mathbf{E}\,(\eta(t_1,x,k))^2. \quad (27)$$

Для $t > 0$ вычислим величину

$$\mathbf{E}\,(\eta(t,x,k))^2 = e^{-2\lambda_0 t}\,\mathbf{E}\,(I_{t,x,k}(\varphi_0))^2.$$

В силу (17), имеем

$$e^{-2\lambda_0 t}\,\mathbf{E}\,(I_{t,x,k}(\varphi_0))^2 = 2e^{-2\lambda_0 t}\,\mathbf{E}\,I^{(2)}_{t,x,k}(\varphi_0) + e^{-2\lambda_0 t}\,\mathbf{E}\,I_{t,x,k}(\varphi_0^2). \quad (28)$$

Из (23) следует, что

$$r(t) = \sup_x \big(e^{-2\lambda_0 t}\,\mathbf{E}\,I_{t,x,k}(\varphi_0^2)\big) \leqslant \|e^{-2\lambda_0 t}\,\mathbf{E}\,I_{t,\cdot,k}(\varphi_0^2)\| = e^{-2\lambda_0 t}\|e^{t\mathcal{H}}\varphi_0^2\| \underset{t\to\infty}{\to} 0. \quad (29)$$

Вычислим первое слагаемое в правой части (28). Для этого воспользуемся формулой (22) при $\varphi = \varphi_0$. В этом случае $u_1(t,x) = e^{\lambda_0 t}\varphi_0(x)$, а

$$u_2(t,x) = \mathbf{E}\,I^{(2)}_{t,x}(\varphi_0) = \frac{1}{2}\int_0^t \big[e^{(t-s)\mathcal{H}}\big(\beta_2\varphi_0,\varphi_0\big)\big](x)\,e^{2\lambda_0 s}\,ds.$$

Соответственно, мы имеем

$$2e^{-2\lambda_0 t}\mathbf{E}\,I^{(2)}_{t,x,k}(\varphi_0) = \int_0^t \big[e^{(t-s)\mathcal{H}}\big(\beta_2\varphi_0,\varphi_0\big)\big]_k(x)\,e^{-2\lambda_0(t-s)}\,ds = \int_0^t \big[e^{s\mathcal{H}}\big(\beta_2\varphi_0,\varphi_0\big)\big]_k(x)\,e^{-2\lambda_0 s}\,ds. \quad (30)$$

Используя (27), (28), (29) и (30), получаем

$$\mathbf{E}\,(\eta(t_2,x,k)-\eta(t_1,x,k))^2 \leqslant \Big\|\int_{t_1}^{t_2} e^{s\mathcal{H}}\big(\beta_2\varphi_0,\varphi_0\big)\,e^{-2\lambda_0 s}\,ds\Big\| + r(t_1) + r(t_2), \quad (31)$$

где $r(t) \to 0$ при $t \to \infty$.

Оценим теперь первое слагаемое в правой части (31). Используя (23), получаем

$$\Big\|\int_{t_1}^{t_2} e^{s\mathcal{H}}\big(\beta_2\varphi_0,\varphi_0\big)e^{-2\lambda_0 s}\,ds\Big\| \leqslant \int_{t_1}^{t_2}\big\|e^{s\mathcal{H}}\big(\beta_2\varphi_0,\varphi_0\big)\big\|e^{-2\lambda_0 s}\,ds$$

$$\leqslant \|(\beta_2\varphi_0,\varphi_0)\|\int_{t_1}^{t_2} e^{-\lambda_0 s}\,ds \leqslant \frac{\|\beta_2\|_\infty}{\lambda_0}(e^{-\lambda_0 t_1}-e^{-\lambda_0 t_2}).$$

Из последнего неравенства вытекает (26) и, соответственно, существование равномерного по $x\in\mathbb{Z}^d$ предела в $L_2(\Omega)$ у функции $\eta(t,x)$ при $t\to\infty$. Этот предел при всех x совпадает п.н. с $\eta(\infty,x)$ так как и из сходимости в $L_2(\Omega)$ и из сходимости почти наверное вытекает сходимость по вероятности. □

§4. Предельная теорема для числа частиц m-го типа в точке решетки

Пусть, как и в предыдущих параграфах, $X_{x,k}(t)$ – ветвящееся случайное блуждание, удовлетворяющее начальному условию $X_{x,k}(0)=\delta_{(x,k)}$ (т.е. в начальный момент времени у нас имеется единственная частица типа k находящаяся в точке $x\in\mathbb{Z}^d$), а $y_0\in\mathbb{Z}^d$ – фиксированная точка решетки. Через $\mathcal{N}(x,k,y_0,m,t)$ обозначим число частиц типа m ветвящегося блуждания $X_{x,k}(t)$ в точке y_0 в момент времени t.

Для случайного процесса $\mathcal{N}(x,k,y_0,m,t)$ справедлива следующая предельная теорема.

Теорема 3. *Справедливо соотношение*

$$\lim_{t\to\infty}\sup_{x\in\mathbb{Z}^d}\mathbf{E}\left(e^{-\lambda_0 t}\mathcal{N}(x,k,y_0,m,t)-(\varphi_0(y_0))_m\eta(\infty,x,k)\right)^2=0.$$

Доказательство. Прежде всего, заметим, что справедлива формула

$$\mathcal{N}(x,k,y_0,m,t)=I_{t,x,k}(\psi),$$

где вектор-функция $\psi=(\psi_1,\ldots,\psi_K)$ определяется как $\psi_m(y)=\mathbb{I}_{\{y_0\}}(y)$, а $\psi_l(y)=0$ при $l\neq m$ (здесь $\mathbb{I}_{\{y_0\}}$ – индикаторная функция одноточечного множества $\{y_0\}$).

Разложим функцию ψ на ее проекцию (в $\big(L_2(\mathbb{Z}^d)\big)^K$) на одномерное подпространство, содержащее функцию φ_0, и на ортогональное дополнение к этому подпространству:

$$\psi = (\varphi_0(y_0))_m \varphi_0 + \varphi.$$

Далее, имеем

$$\mathcal{N}(x,k,y_0,m,t) = I_{t,x,k}(\psi) = (\varphi_0(y_0))_m\, I_{t,x,k}(\varphi_0) + I_{t,x,k}(\varphi),$$

и, соответственно,

$$e^{-\lambda_0 t}\mathcal{N}(x,k,y_0,m,t) = (\varphi_0(y_0))_m\, \eta(t,x,k) + e^{-\lambda_0 t}\, I_{t,x,k}(\varphi). \tag{32}$$

Из (25) вытекает, что для доказательства утверждения теоремы достаточно показать, что второе слагаемое в правой части (32) равномерно по $x \in \mathbb{Z}^d$ стремится к нулю в $L_2(\Omega)$ при $t \to \infty$.

Для $t > 0$ вычислим величину

$$e^{-2\lambda_0 t}\, \mathbf{E}\,(I_{t,x,k}(\varphi))^2.$$

В силу (17) имеем

$$e^{-2\lambda_0 t}\, \mathbf{E}\,(I_{t,x,k}(\varphi))^2 = 2\, e^{-2\lambda_0 t}\, \mathbf{E}\, I^{(2)}_{t,x,k}(\varphi) + e^{-2\lambda_0 t}\, \mathbf{E}\, I_{t,x,k}(\varphi^2). \tag{33}$$

Из (23) следует, что

$$\begin{aligned} r(t) = \sup_x |e^{-2\lambda_0 t}\, \mathbf{E}\, I_{t,x,k}(\varphi^2)| &\leqslant \|e^{-2\lambda_0 t}\, \mathbf{E}\, I_{t,\cdot,k}(\varphi^2)\| \\ &= e^{-2\lambda_0 t}\|e^{t\mathcal{H}}\varphi^2\| \underset{t\to\infty}{\to} 0. \end{aligned}$$

Теперь нам достаточно показать, что $L_2(\mathbb{Z}^d)$-норма первого слагаемого в (33) стремится к нулю. Обозначим это первое слагаемое через $v(t,x,k)$. В силу (22), имеем

$$v(t,x,k) = 2e^{-2\lambda_0 t}\mathbf{E}\, I^{(2)}_{t,x,k}(\varphi) = e^{-2\lambda_0 t}\int\limits_0^t \big[e^{(t-s)\mathcal{H}}\big(\beta_2\, e^{s\mathcal{H}}\varphi, e^{s\mathcal{H}}\varphi\big)\big]_k(x)\, ds.$$

Далее, пользуясь (23), (24) (напомним, что φ лежит в ортогональном дополнении к φ_0), получаем

$$\|v(t,\,\cdot\,)\| \leqslant e^{-2\lambda_0 t}\int\limits_0^t \big\|e^{(t-s)\mathcal{H}}\big(\beta_2\, e^{s\mathcal{H}}\varphi, e^{s\mathcal{H}}\varphi\big)\big\|\, ds$$

$$\leqslant \|\beta_2\|_\infty \|\varphi\|^2 e^{-2\lambda_0 t} \int\limits_0^t e^{\lambda_0(t-s)} e^{2\lambda_1 s}\, ds$$
$$= \|\beta_2\|_\infty \|\varphi\|^2 e^{-\lambda_0 t} \int\limits_0^t e^{\lambda_1 s}\, ds.$$

Так как $0 \leqslant \lambda_1 < \lambda_0$, то последнее выражение стремится к нулю при $t \to \infty$, что и завершает доказательство теоремы. $\square$

Список литературы

1. Е. Б. Яровая, *Ветвящиеся случайные блуждания в неоднородной среде.* М., Центр прикл. исслед. при мех.-матем. ф-те МГУ, 2007.
2. Y. B. Zel'dovich, S. A. Molchanov, A. A. Ruzmaĭkin, D. D. Sokoloff, *Intermittency, diffusion and generation in a nonstationary random medium.* — In: Mathem. Phys. Reviews **7**. Chur: Harwood Academic Publ.,bpp. 3–110, 1988.
3. J. Gärtner, S. A. Molchanov, *Parabolic problems for the Anderson model.* II. *Second-order asymptotics and structure of high peaks.* — Probab. Theory Relat. Fields **111**, No. 1 (1998), 17–55.
4. M. Cranston, L. Koralov, S. Molchanov, B. Vainberg, *Continuous model for homopolymers.* — J. Funct. Anal. **256**, No. 8 (2009), 2656–2696.
5. Б. А. Севастьянов, *Теория ветвящихся случайных процессов.* — Успехи матем. наук **6**, вып. 6(46) (1951), 47–99.
6. А. Н. Колмогоров, *Об аналитических методах в теории вероятностей.* — Успехи матем. наук вып. 5 (1938), 5–41.
7. Iu. Makarova, D. Balashova, S. Molchanov, E. Yarovaya, *Branching random walks with two types of particles on multidimensional lattices.* — Mathematics **10**, No. 6 (2022), 1–46.
8. И. И. Гихман, А. В. Скороход, *Введение в теорию случайных процессов*, М., Наука, 1977.
9. Дж. Д. Биггинс, *Сходимость мартингалов и большие уклонения в ветвящемся случайном блуждании.* — Теория вероятн. и ее примен. **37**, No. 2 (1992), 301–306.
10. A. Ioffe, *A new martingale in branching random walk.* — Ann. Appl. Probab. **3**, No. 4 (1993), 1145–1150.
11. Н. В. Смородина, Е. Б. Яровая, *Мартингальный метод исследования ветвящихся случайных блужданий.* — Успехи матем. наук **77**, вып. 5 (2022), 193–194.
12. Н. В. Смородина, Е. Б. Яровая, *Об одной предельной теореме для ветвящихся случайных блужданий.* — Теория вероятн. и ее примен. **68**, No. 4 (2023), 779–795.
13. Ю. Л. Далецкий, М. Г. Крейн, *Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве*, М., Наука, 1970.
14. А. Д. Вентцель, *Курс теории случайных процессов* (2-е издание), М., Наука, Физматлит, 1996.

15. P. Major,*Multiple Wiener–Ito Integrals. With Applications to Limit Theorems.* — Lect. Notes Math. **849**, (1981), Berlin–Heidelberg–NY, Springer.
16. А. Н. Колмогоров, С. В. Фомин, *Элементы теории функций и функционального анализа*, М., Наука, 1972.
17. М. Ш. Бирман, М. З. Соломяк,*Спектральная теория самосопряженных операторов в гильбертовом пространстве*, Лань, 2010.
18. K.-Ch. Chang, X. Wang, X. Wu, *On the spectral theory of positive operators and PDE applications.* — Discrete Contin. Dymam. Syst. **40**, No. 6 (2020), 3171–3200.
19. П. П. Забрейко, С. В. Смицких, *Об одной теореме М. Г. Крейна–М. А. Рутмана.* — Функц. анализ и его прилож. **13**, No. 3 (1979), 81–82.

Smorodina N. V., Yarovaya E. B. On one limit theorem for branching random walks with a finite number of particle types.

We consider a branching random walk on the lattice $\mathbb{Z}^d$, $d \in \mathbb{N}$, in which at any point of $\mathbb{Z}^d$ a particle of every type can die or produce an arbitrary number of offsprings of different types. The walk of a particle of each type on $\mathbb{Z}^d$ is described by a symmetric homogeneous and irreducible random walk. We assume that the branching intensity of particles of any type at a point $x \in \mathbb{Z}^d$ tends to zero as $\|x\| \to \infty$, and an additional condition is fulfilled on the parameters of the branching random walk, guaranteeing exponential in time growth of the mean number of particles of each type at each point $\mathbb{Z}^d$. Under these assumptions we prove the limit theorem on the convergence of normalised number of particles of each type at an arbitrary fixed point $y_0 \in \mathbb{Z}^d$ as $t \to \infty$ to the limit in mean square. The proof is based on an approximation of the normalised number of particles by some non-negative martingale.

Санкт-Петербургское отделение
Математического института им. В. А. Стеклова
Фонтанка 27
Санкт-Петербург 191023, Россия
и Санкт-Петербургский государственный университет,
Университетская наб. 7/9
Санкт-Петербург, 199034 Россия
E-mail: smorodina@pdmi.ras.ru

Поступило 29 сентября 2023 г.

Московский государственный
университет имени М. В. Ломоносова;
Математический институт
им. В. А. Стеклова РАН,
Москва, Россия
E-mail: yarovaya@mech.math.msu.su