Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 526, 2023 г.

А. К. Николаев

О ВЕРОЯТНОСТНОМ ПРЕДСТАВЛЕНИИ РЕЗОЛЬВЕНТЫ ДВУМЕРНОГО ОПЕРАТОРА ШРЁДИНГЕРА

§1. Введение

Обозначим через $\mathcal{H}$ двумерный оператор Шрёдингера

$$(\mathcal{H}f)(x) = -\frac{1}{2}\,(\Delta\, f)(x) + V(x)\, f(x),$$

где $V(x)$ – неотрицательная и ограниченная непрерывная функция, степенным образом убывающая на бесконечности, именно

$$V(x) = O\,(\|x\|^{-\alpha}), \quad \alpha > 2. \tag{1}$$

Мы рассматриваем оператор $\mathcal{H}$ на области определения $\mathrm{Dom}\,(\mathcal{H}) = W_2^2(\mathbb{R}^2)$ – пространстве Соболева функций, квадратично интегрируемых на плоскости $\mathbb{R}^2$ и имеющих квадратично интегрируемые первую и вторую обобщенные производные (см. [9, с. 146]). Отметим, что на его области определения оператор Шрёдингера является самосопряженным и положительно определенным оператором. При этих условиях спектр оператора $\mathcal{H}$ абсолютно непрерывный и заполняет положительную полуось $[0, \infty)$ (см. [7, с. 20 и 32]).

Через $R_\lambda = (\mathcal{H} - \lambda\, I)^{-1}$ обозначим резольвенту оператора $\mathcal{H}$. В случае если спектральный параметр $\lambda \in \mathbb{C}$ не принадлежит спектру оператора $\mathcal{H}$, область определения резольвенты R_λ совпадает с $L_2(\mathbb{R}^2)$. В противном случае соответствующая область определения $\mathrm{Dom}\,(R_\lambda)$ представляет из себя некоторое плотное в $L_2(\mathbb{R}^2)$ множество (этот вопрос подробнее рассмотрим в §4).

Известно, что резольвента оператора $\mathcal{H}$ допускает представление в виде преобразования Лапласа по τ полугруппы операторов $\mathcal{P}^\tau = e^{-\tau\mathcal{H}},\ \tau \geqslant 0$ (подробнее см. [5, с. 354]). Именно, если $\mathrm{Re}\,\lambda < 0$, то тогда при всех $f \in L_2(\mathbb{R}^2)$ выполнено

Ключевые слова: случайные процессы, двумерный винеровский процесс, резольвента оператора Шрёдингера.

Работа автора выполнена при финансовой поддержке программы социальных инвестиций “Родные города” ПАО “Газпром нефть”.

$$(\mathcal{H} - \lambda\, I)^{-1}\, f(x) = \int_0^\infty e^{\lambda\,\tau}\, [e^{-\tau\mathcal{H}}\, f(x)]\, d\tau. \tag{2}$$

Далее, для операторной полугруппы $\mathcal{P}^\tau = e^{-\tau\mathcal{H}}$ имеет место вероятностное представление (формула Фейнмана–Каца)

$$\mathcal{P}^\tau\, f(x) = \mathbf{E}\, f(w_x(\tau))\, e^{-\int_0^\tau V(w_x(s))\, ds}, \tag{3}$$

где через $w_x(\tau)$ обозначен случайный процесс $w_x(\tau) = x - w(\tau)$ (здесь $w(\tau) = (w_1(\tau), w_2(\tau))$, $\tau \geqslant 0$, – стандартный двумерный винеровский процесс).

Подставляя (3) в (2), окончательно при всех $f \in C_b(\mathbb{R}^2) \cap L_2(\mathbb{R}^2)$ получим

$$(\mathcal{H} - \lambda\, I)^{-1}\, f(x) = \mathbf{E} \int_0^\infty e^{\lambda\,\tau}\, f(w_x(\tau))\, e^{-\int_0^\tau V(w_x(s))\, ds}\, d\tau. \tag{4}$$

Таким образом, резольвента оператора $\mathcal{H}$ допускает представление в виде потраекторного усреднения случайного оператора

$$\mathcal{A}_\lambda : f \longmapsto \int_0^\infty e^{\lambda\,\tau}\, f(w_x(\tau))\, e^{-\int_0^\tau V(w_x(s))\, ds}\, d\tau. \tag{5}$$

Заметим, что траектория двумерного винеровского процесса заметает на плоскости множество нулевой лебеговой меры и, значит, оператор $\mathcal{A}_\lambda$ не может быть продолжен до непрерывного оператора на всем пространстве $L_2(\mathbb{R}^2)$.

Целью данной работы является построение другого семейства случайных операторов, усреднение которого также дает вероятностное представление резольвенты оператора $\mathcal{H}$, но, в отличие от (5), операторы этого семейства с вероятностью единица допускают продолжение до непрерывных интегральных операторов в $L_2(\mathbb{R}^2)$. Настоящая статья является продолжением [8], в которой аналогичный вопрос рассматривался для случая $V(x) \equiv 0$.

Структура работы следующая. Во втором параграфе приводятся необходимые сведения из математической теории рассеяния. В третьем параграфе строится семейство случайных линейных операторов $\{\mathcal{R}_\lambda^t\}$

$(t > 0, \operatorname{Re}\lambda \leqslant 0)$. Показывается, что при каждом $t > 0$ и $\operatorname{Re}\lambda \leqslant 0$ оператор $\mathcal{R}_\lambda^t$ с вероятностью единица является непрерывным интегральным оператором в $L_2(\mathbb{R}^2)$ вида

$$\mathcal{R}_\lambda^t\, f(x) = \int\limits_{\mathbb{R}^2} r_\lambda^t(x,y)\, f(y)\, dy,$$

а также исследуются свойства его ядра $r_\lambda^t(x,\,\cdot\,)$. В четвертом параграфе доказывается, что потраекторные усреднения соответствующих случайных операторов сходятся при $t \to \infty$ к резольвенте оператора $\mathcal{H}$. Именно, если $\operatorname{Re}\lambda \leqslant 0$, то тогда при всех $f \in \operatorname{Dom}(R_\lambda)$ выполнено

$$(\mathcal{H} - \lambda\, I)^{-1}\, f(x) = (L_2) \lim_{t\to\infty} \mathbf{E} \int\limits_{\mathbb{R}^2} r_\lambda^t(x,y)\, f(y)\, dy. \tag{6}$$

Также показывается, что в случае $\operatorname{Re}\lambda < 0$ семейство ядер $r_\lambda^t(x,\,\cdot\,)$ можно определить для случая $t = \infty$, так что при всех $f \in L_2(\mathbb{R}^2)$ справедливо

$$(\mathcal{H} - \lambda\, I)^{-1}\, f(x) = \mathbf{E} \int\limits_{\mathbb{R}^2} r_\lambda^\infty(x,y)\, f(y)\, dy.$$

§2. Основные сведения

Под обобщенными собственными функциями оператора $\mathcal{H}$ будем понимать непрерывные и ограниченные решения уравнения Шрёдингера

$$-\frac{1}{2}\,\Delta_x\,\varphi(x,k) + V(x)\,\varphi(x,k) = \frac{\|k\|^2}{2}\,\varphi(x,k), \qquad k \in \mathbb{R}^2, \tag{7}$$

которые удовлетворяют асимптотическим соотношениям

$$v(x,k) := \varphi(x,k) - e^{\mathrm{i}(x,k)} = O(\|x\|^{-\frac{1}{2}}), \tag{8}$$

$$\frac{\partial\, v(x,k)}{\partial\,\|x\|} - \mathrm{i}\,\|k\|\, v(x,k) = o(\|x\|^{-\frac{1}{2}}), \quad \|x\| \to \infty \tag{9}$$

(условия излучения).

Известно, что соответствующее непрерывное и ограниченное решение уравнения (7) в то же время удовлетворяет уравнению Липпмана–Швингера (см. [1, с. 252])

$$\varphi(x,k) = e^{i(x,k)} + \frac{\mathrm{i}}{2} \int\limits_{\mathbb{R}^2} H_0^{(1)}\,(\|k\|\,\|x-y\|)\, V(y)\,\varphi(y,k)\, dy \tag{10}$$

(здесь $H_0^{(1)}(r)$ – функция Ханкеля первого рода нулевого порядка (подробнее см. [11, с. 645–647])). Уравнение (10) используется в квантовой механике при описании рассеяния частиц в потенциальном поле.

Следующим шагом мы покажем, что при каждом $k \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ уравнение (10) имеет единственное непрерывное и ограниченное решение, которое удовлетворяет условиям излучения (8) и (9).

Справедливо утверждение.

Теорема 1. *Пусть $V(x)$ – неотрицательная и ограниченная непрерывная функция, для которой выполнено условие* (1). *Тогда при каждом $k \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ существует единственное непрерывное и ограниченное решение уравнения* (10), *удовлетворяющее условиям излучения* (8) *и* (9).

Доказательство. Обсудим основную идею доказательства теоремы (в работе [7] приведено полное доказательство, но для трехмерного случая).

Через $\mathcal{B}$ обозначим банахово пространство функций

$$\mathcal{B} = \{f : f \in C(\mathbb{R}^2), \lim_{R\to\infty} \sup_{\|x\|=R} |f(x)| = 0\}$$

с нормой

$$\|f\|_{\mathcal{B}} = \sup_{x\in\mathbb{R}^2} |f(x)|.$$

Определим ограниченный интегральный оператор $T_{\|k\|} : \mathcal{B} \to \mathcal{B}$, полагая

$$T_{\|k\|}\, f(x) = \frac{\mathrm{i}}{2} \int\limits_{\mathbb{R}^2} H_0^{(1)}\left(\|k\|\,\|x-y\|\right) V(y)\, f(y)\, dy. \tag{11}$$

С учетом (8), (10) и (11) получим

$$v(x,k) = h(x,k) + T_{\|k\|}\, v(x,k), \tag{12}$$

где функция $h(x,k)$ определена формулой

$$h(x,k) = \frac{\mathrm{i}}{2} \int\limits_{\mathbb{R}^2} H_0^{(1)}\left(\|k\|\,\|x-y\|\right) V(y)\, e^{\mathrm{i}(k,y)}\, dy. \tag{13}$$

Нетрудно показать, что при каждом $k \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ функция $h(\,\cdot\,,k)$ принадлежит пространству $\mathcal{B}$.

Следующим шагом, используя теорему Арцела–Асколи (см. например [4, с. 114]), можно показать, что оператор $T_{\|k\|}$ является компактным оператором в банаховом пространстве $\mathcal{B}$. Таким образом, оператор $I-T_{\|k\|}$ обратим в $\mathcal{B}$ тогда и только тогда, когда ядро соответствующего оператора тривиально $\operatorname{Ker}(I-T_{\|k\|})=0$ (см. [6, с. 286–288]).

Действуя аналогично тому, как это было сделано в [7, с. 15, лемма 4.4], можно показать то, что уравнение $v(x,k)=T_{\|k\|}\,v(x,k)$ имеет лишь тривиальное решение. Таким образом, при всех $k\in\mathbb{R}^2\setminus\{0\}$ уравнение (12) имеет единственное решение $v(\,\cdot\,,k)\in\mathcal{B}$. Соответственно, существует единственное непрерывное и ограниченное решение $\varphi(\,\cdot\,,k)$ уравнения Липпмана–Швингера (10), которое при $\|x\|\to\infty$ имеет асимптотику $\varphi(\,\cdot\,,k)\sim e^{\mathrm{i}(x,k)}$.

Можно также показать, что соответствующее решение удовлетворяет условиям излучения (8) и (9). $\square$

Обсудим некоторые важные свойства функции $\varphi(x,k)$, которые понадобятся нам в дальнейшем.

Справедливы следующие утверждения

Лемма 1. 1. *При всех $k\in\mathbb{R}^2\setminus\{0\}$ выполнено $\varphi(\,\cdot\,,k)\in\mathrm{C}(\mathbb{R}^2)$.*

2. *При всех $x\in\mathbb{R}^2$ выполнено $\varphi(x,\,\cdot\,)\in\mathrm{C}(\mathbf{D})$, где $\mathbf{D}$ – произвольный компакт в $\mathbb{R}^2$, который не содержит начало координат.*

Доказательство. Доказательство первого утверждения леммы вытекает из теоремы 1. Доказательство второго утверждения приведено в [7, с. 18, теорема 3]. $\square$

Лемма 2. *Существует число $M>0$, такое что при всех $x\in\mathbb{R}^2$ и $k\in\mathbb{R}^2\setminus\{0\}$ выполнено неравенство $|\varphi(x,k)|\leqslant M$.*

Доказательство. Из соотношений (8) и (12) следует то, что функция $\varphi(x,k)$ может быть представлена в виде

$$\varphi(x,k)=(\mathrm{I}-T_{\|k\|})^{-1}\,h(x,k)+e^{\mathrm{i}(x,k)}, \tag{14}$$

где $h(x,k)=T_{\|k\|}\,e^{\mathrm{i}(x,k)}$.

Используя известные асимптотики для функции Ханкеля $H_0^{(1)}(r)$ (подробнее см. [11, с. 645–647]), получим оценку для операторной нормы $\|T_{\|k\|}\|_{\mathcal{B}\to\mathcal{B}}$

$$\begin{aligned} \|T_{\|k\|}\|_{\mathcal{B}\to\mathcal{B}} &= \sup_{f\in\mathcal{B}:\ \|f\|_{\mathcal{B}}=1} \|T_{\|k\|}\, f\|_{\mathcal{B}} \\ &\leqslant \frac{C_0}{2\|k\|^{\frac{1}{2}}} \sup_{x\in\mathbb{R}^2} \int\limits_{\mathbb{R}^2} \|y\|^{-\frac{1}{2}}\, V(x+y)\, dy = \frac{a}{\|k\|^{1/2}}, \end{aligned} \tag{15}$$

где константа C_0 определена формулой

$$C_0 = \sup_{r>0} |H_0^{(1)}(r)|\, r^{1/2}.$$

Далее, если выполнено условие $\|T_{\|k\|}\|_{\mathcal{B}\to\mathcal{B}} < 1$, то тогда оператор $(\mathrm{I} - T_{\|k\|})^{-1}$ может быть представлен в виде ряда Неймана

$$(\mathrm{I} - T_{\|k\|})^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} T_{\|k\|}^n, \tag{16}$$

где через $T_{\|k\|}^n$ обозначена композиция из n операторов $T_{\|k\|}$. Соответственно, с учетом (14) и (16) выражение для функции $\varphi(x,k)$ примет вид

$$\varphi(x,k) = \sum_{n=0}^{\infty} T_{\|k\|}^n\, e^{\mathrm{i}(x,k)}. \tag{17}$$

Далее, фиксируем число $R > 0$ такое, что $R > a^2$. Тогда с учетом (15), (17), а также неравенства

$$\sup_{x\in\mathbb{R}^2} |T_{\|k\|}^n\, e^{\mathrm{i}(x,k)}| \leqslant \|T_{\|k\|}\|_{\mathcal{B}\to\mathcal{B}}^n, \tag{18}$$

при всех $x \in \mathbb{R}^2$ и $k \in \mathbb{R}^2 :\ \|k\| \geqslant R$ получим

$$|\varphi(x,k)| \leqslant \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^n}{\|k\|^{n/2}} \leqslant C.$$

Таким образом, функция $|\varphi(x,k)|$ ограничена некоторой константой при всех $x \in \mathbb{R}^2$ и $k \in \mathbb{R}^2 :\ \|k\| \geqslant R$.

Теперь рассмотрим случай $\|k\| < R$. В [7, с. 18, теорема 3] показано, что функция $|\varphi(x,k)|$ ограничена при всех $x \in \mathbb{R}^2$ и $k \in \mathbf{D}$ (здесь $\mathbf{D}$ – произвольный компакт, который не содержит начало координат). Соответствующий результат вытекает из того, что функция $v(\,\cdot\,,k) = (\mathrm{I} - T_{\|k\|})^{-1}\, h(\,\cdot\,,k)$ непрерывна по k (в топологии пространства $\mathcal{B}$) при всех $k \in \mathbf{D}$. Используя принцип предельного поглощения, можно показать, что функция $v(\,\cdot\,, k)$ ограничена при $k \to 0$. Таким образом, функция $|\varphi(x,k)|$ ограничена при всех $x \in \mathbb{R}^2$ и $k \in \mathbb{R}^2 : \|k\| < R$ $\square$

Лемма 3. *Существуют числа $m > 0$ и $\delta > 0$, такие что при всех $x \in \mathbb{R}^2$ и $\|k\| \geqslant m$ выполнено неравенство*

$$|\varphi(x,k)| > \delta.$$

Доказательство. Положим $m := 9\,a^2$ (константа a определена в формуле (15)). Тогда с учетом (15), (17) и (18) при всех $x \in \mathbb{R}^2$ и $\|k\| \geqslant m$ получим

$$\sup_{x\in\mathbb{R}^2} |\varphi(x,k) - e^{\mathrm{i}(x,k)}| \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \|T_k\|^n_{\mathcal{B}\to\mathcal{B}} = \frac{\|T_k\|_{\mathcal{B}\to\mathcal{B}}}{1 - \|T_k\|_{\mathcal{B}\to\mathcal{B}}} \leqslant \frac{1}{2},$$

что завершает доказательство леммы. $\square$

Также нам понадобится информация об асимптотическом поведении функции $\varphi(x,k)$.

Лемма 4. *Существуют константы $C > 0$ и $q > 0$, такие что при всех $\|k\| \geqslant q$ выполнено неравенство*

$$\sup_{x\in\mathbb{R}^2} |\varphi(x,k) - e^{\mathrm{i}(x,k)}| \leqslant \frac{C}{\|k\|^{1/2}}. \tag{19}$$

Доказательство. Справедливость утверждения леммы вытекает из (15), (17) и (18). $\square$

Далее, определим оператор $\mathcal{F} :\, L_2(\mathbb{R}^2) \to L_2(\mathbb{R}^2)$, полагая

$$\mathcal{F} : (\mathcal{F}\,f)(k) = (L_2)\ \lim_{M\to\infty} \frac{1}{2\pi} \int\limits_{\|x\|<M} f(x)\,\varphi(x,k)\,dx.$$

Соответственно, эрмитово сопряженный оператор $\mathcal{F}^*$ определяется формулой

$$\mathcal{F}^* : (\mathcal{F}^*\,g)(x) = (L_2)\ \lim_{M\to\infty} \frac{1}{2\pi} \int\limits_{\|k\|<M} g(k)\,\overline{\varphi(x,k)}\,dk.$$

Определенный таким образом оператор $\mathcal{F}$ будем называть обобщенным преобразованием Фурье. Если $V(x) \equiv 0$, то тогда обобщенное преобразование Фурье совпадает со стандартным преобразованием Фурье в $L_2(\mathbb{R}^2)$, поскольку в этом случае справедливо

$$\varphi(x,k) = e^{\mathrm{i}(x,k)}.$$

Также отметим, что оператор $\mathcal{F}$ – унитарный оператор в $L_2(\mathbb{R}^2)$

$$\mathcal{F}\,\mathcal{F}^* = \mathcal{F}^*\,\mathcal{F} = \mathrm{Id}.$$

Нам в дальнейшем понадобится следующее важное свойство обобщенного преобразования Фурье.

Лемма 5. *Пусть при некотором* $\alpha \in [0, 1/2)$ *измеримая функция* $g(k)$ *удовлетворяет условию*

$$\int\limits_{\mathbb{R}^2} (1 + \|k\|^{2\alpha})\,|g(k)|^2\,dk < \infty.$$

Тогда функция $(\mathcal{F}^* g)(x)$ *принадлежит классу Соболева* $W_2^\alpha(\mathbb{R}^2)$*.*

Доказательство. Доказательство аналогичного утверждения приведено в [2, с. 149, лемма 3]. □

Преобразование $\mathcal{F}$ играет роль диагонализующего преобразования для оператора Шрёдингера

$$\mathcal{H} = -\frac{1}{2}\,\Delta + V,$$

сплетая его в $L_2(\mathbb{R}^2)$ с оператором умножения на функцию независимой переменной $\frac{\|k\|^2}{2}$

$$\mathcal{H} = \mathcal{F}^*\,\frac{\|k\|^2}{2}\,\mathcal{F}.$$

Данное свойство позволяет эффективно строить функции от оператора $\mathcal{H}$. Именно, пусть F – произвольная измеримая функция. Тогда в $L_2(\mathbb{R}^2)$ операторное уравнение $F(H)\,f(x) = h(x)$ равносильно уравнению $F(\frac{\|k\|^2}{2}) \cdot (\mathcal{F}f)(k) = (\mathcal{F}h)(k)$.

Из этого свойства вытекает одно важное соотношение, которое далее будет использоваться нами при построении случайного интегрального оператора $\mathcal{R}_\lambda^t : L_2(\mathbb{R}^2) \to L_2(\mathbb{R}^2)$.

Справедливо утверждение

Лемма 6. *При всех* $x, k \in \mathbb{R}^2$ *и* $t > 0$ *справедливо соотношение*

$$\varphi(x,k)\,e^{-\frac{t\|k\|^2}{2}} = \mathbf{E}\,\varphi(w_x(t),\,k)\,e^{-\int\limits_0^t V(w_x(s))\,ds}. \tag{20}$$

Доказательство. Справедливость (20) вытекает из формулы (3) и сплетающего свойства оператора $\mathcal{F}$. □

§3. Определение оператора $\mathcal{R}^t_\lambda$.

Определим функцию $\psi = \psi(x, r)$, $(x, r) \in \mathbb{R}^2 \times [m, \infty)$, полагая

$$\psi(x,r) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{S^1} \frac{\varphi\,(x, r\,\theta)}{\varphi\,(0, r\,\theta)}\, dS(\theta), \tag{21}$$

где dS – элемент длины дуги единичной окружности, а число m определено в лемме 3.

Из лемм 1, 2, 3, 4 и 6 вытекает то, что функция $\psi(x, r)$ удовлетворяет условиям:

1. При всех $x \in \mathbb{R}^2$ и $r \geqslant m$ выполнено неравенство

$$|\psi(x,r)| \leqslant M.$$

2. Существует константа $C > 0$, такая что при всех $r \geqslant m$ выполнено неравенство

$$\sup_{x\in\mathbb{R}^2} |\psi(x,r) - J_0\,(\|x\| r)| \leqslant \frac{C}{r^{1/2}}, \tag{22}$$

где

$$J_0(r) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} e^{\mathrm{i} r \cos\varphi}\, d\varphi$$

– функция Бесселя первого рода нулевого порядка.

3. При всех $t > 0$, $x \in \mathbb{R}^2$ и $r \geqslant m$ справедливо соотношение

$$\psi(x,r)\, e^{-\frac{tr^2}{2}} = \mathbf{E}\, \psi(w_x(t), r)\, e^{-\int\limits_0^t V(w_x(s))\, ds}.$$

Далее, при всех $t > 0$ и $\lambda \in \mathbb{C}$, $\operatorname{Re}\lambda \leqslant 0$ определим случайную функцию $g^t_\lambda(x, k)$, полагая

$$g^t_\lambda(x,k) = \begin{cases} (2\pi)^{-1} \int\limits_0^t e^{\lambda\tau} \overline{\varphi\,(w_x(\tau), k)}\, e^{-\int\limits_0^\tau V(w_x(s))\, ds} d\tau, \ \ \|k\| < m, \\ (2\pi)^{-1} \overline{\varphi(x,k)} \int\limits_0^t e^{\lambda\tau}\, \psi\,(w_0(\tau), \|k\|)\, e^{-\int\limits_0^\tau V(w_0(s))\, ds} d\tau, \\ \qquad\qquad \|k\| \geqslant m. \end{cases}$$

Следующим шагом мы покажем, что при всех $x \in \mathbb{R}^2$ и $\alpha \in [0, 1/2)$ случайная функция $\overline{r^t_\lambda(x,\,\cdot\,)} := (\mathcal{F}^* \overline{g^t_\lambda})\,(x,\,\cdot\,)$ с вероятностью единица принадлежит классу Соболева $W^\alpha_2(\mathbb{R}^2)$ (случай $\alpha = 0$ соответствует тому, что $r^t_\lambda(x,\,\cdot\,) \in L_2(\mathbb{R}^2)$).

Справедливо утверждение:

Теорема 2. 1. *Если* $\operatorname{Re}\lambda \leqslant 0$, *то тогда при всех* $\alpha \in [0, 1/2)$ *и* $x \in \mathbb{R}^2$ *случайная функция* $\overline{r^t_\lambda(x,\,\cdot\,)} = (\mathcal{F}^* \overline{g^t_\lambda})\,(x,\,\cdot\,)$ *с вероятностью единица принадлежит классу Соболева* $W^\alpha_2(\mathbb{R}^2)$.

2. *Если* $\operatorname{Re}\lambda < 0$, *то тогда при всех* $x \in \mathbb{R}^2$ *существует случайная функция* $\overline{r^\infty_\lambda(x,\,\cdot\,)}$. *Она с вероятностью единица принадлежит классу Соболева* $W^\alpha_2(\mathbb{R}^2)$.

Доказательство. Из леммы 5 следует, что для доказательства первого утверждения теоремы достаточно показать конечность интеграла

$$I = 4\pi^2 \cdot \mathbf{E} \int\limits_{\mathbb{R}^2} (1 + \|k\|^{2\alpha}) |g^t_\lambda(x,k)|^2 \, dk. \tag{23}$$

Интеграл I может быть представлен в виде суммы интегралов

$$I_1 = \mathbf{E} \int\limits_{\|k\|<m} (1 + \|k\|^{2\alpha}) \left| \int\limits_0^t e^{\lambda\tau}\, \overline{\varphi\,(w_x(\tau), k) e^{-\int_0^\tau V(w_x(s))\,ds}} d\tau \right|^2 dk \tag{24}$$

и

$$I_2 = \mathbf{E} \int\limits_{\|k\|\geqslant m} (1 + \|k\|^{2\alpha}) \left| \int\limits_0^t e^{\lambda\tau}\, \psi(w_0(\tau), \|k\|)\, e^{-\int_0^\tau V(w_0(s))\,ds} d\tau \right|^2 \times\ |\varphi(x,k)|^2 \, dk \tag{25}$$

соответственно.

Покажем конечность интегралов I_1 и I_2. Из утверждения леммы 2 немедленно вытекает оценка для интеграла I_1

$$\begin{aligned} I_1 &\leqslant (Mt)^2 \int\limits_{\|k\|\leqslant m} (1+\|k\|^{2\alpha})\,dk \\ &= 2\pi\,(Mt)^2 \int\limits_0^m (1+r^{2\alpha})\,r\,dr \\ &= \pi\,(m\,M\,t)^2\,(1+\frac{1}{\alpha+1}m^{2\alpha}), \end{aligned} \tag{26}$$

где $M=\sup_{x,k\in\mathbb{R}^2}|\varphi(x,k)|$.

В случае $\operatorname{Re}\lambda<0$ оценка интеграла I_1 равномерна по t и имеет вид

$$I_2 \leqslant \pi\big(\frac{m\,M}{\operatorname{Re}\lambda}\big)^2\,(1+\frac{1}{\alpha+1}m^{2\alpha}). \tag{27}$$

Теперь оценим интеграл I_2. Используя теорему Фубини, а также соотношение

$$\Big|\int\limits_0^t f(\tau)\,d\tau\Big|^2 = 2\cdot \int\limits_{0<\tau_2<\tau_1<t} \operatorname{Re}\,[f(\tau_1)\,\overline{f(\tau_2)}]\,d\tau_1 d\tau_2, \tag{28}$$

получим

$$\begin{aligned} I_2 = 2\cdot &\int\limits_{\|k\|\geqslant m} |\varphi(x,k)|^2\,(1+\|k\|^{2\alpha}) \\ &\times\Bigg(\operatorname{Re}\int\limits_{0<\tau_2<\tau_1<t} e^{\lambda\tau_1}\,e^{\overline{\lambda}\tau_2}\,\mathbf{E}\,[\psi\,(w_0(\tau_1),\|k\|)\,\overline{\psi\,(w_0(\tau_2),\|k\|)} \\ &\qquad\times e^{-\int\limits_0^{\tau_1} V(w_0(s_1))\,ds_1}\,e^{-\int\limits_0^{\tau_2} V(w_0(s_2))\,ds_2}\,]\,d\tau_1\,d\tau_2\Bigg)\,dk. \end{aligned} \tag{29}$$

Вычислим математическое ожидание, стоящее под знаком интеграла в (29). Используя свойства условных математических ожиданий, при условии $\tau_1 > \tau_2$ получим

$$\mathbf{E}\Big[\psi\left(w_0(\tau_1), \|k\|\right) \overline{\psi\left(w_0(\tau_2), \|k\|\right)}\ e^{-\int\limits_0^{\tau_1} V(w_0(s_1))\,ds_1}\ e^{-\int\limits_0^{\tau_2} V(w_0(s_2))\,ds_2}\Big]$$

$$= \mathbf{E}\Big[\overline{\psi\left(w_0(\tau_2), \|k\|\right)}\, e^{-\int\limits_0^{\tau_2} V(w_0(s_2))\,ds_2}$$

$$\times\, \mathbf{E}\left(\psi\left(w_0(\tau_1), \|k\|\right) e^{-\int\limits_0^{\tau_1} V(w_0(s_1))\,ds_1} | \mathcal{F}_{\leqslant\tau_2}\right)\Big]. \qquad (30)$$

Далее, с учетом марковского свойства процесса $w_0(\tau)$, а также свойства 3 функции $\psi(x, r)$, имеем

$$\mathbf{E}\Big(\psi\left(w_0(\tau_1), \|k\|\right) e^{-\int\limits_0^{\tau_1} V(w_0(s_1))\,ds_1} | \mathcal{F}_{\leqslant\tau_2}\Big)$$

$$= e^{-\int\limits_0^{\tau_2} V(w_0(s_2))\,ds_2} \cdot \mathbf{E}\left(\psi\left(w_y(\tau_1 - \tau_2), \|k\|\right) e^{-\int\limits_0^{\tau_1-\tau_2} V(w_y(s_1))\,ds_1}\right)\Big|_{y=w_0(\tau_2)}$$

$$= e^{-\int\limits_0^{\tau_2} V(w_0(s_2))\,ds_2} \cdot\, \psi\left(w_0(\tau_2), \|k\|\right) \,\cdot\, e^{-\frac{(\tau_1-\tau_2)\|k\|^2}{2}}. \qquad (31)$$

Подставляя (31) в (30), окончательно получим

$$\mathbf{E}\Big[\psi\left(w_0(\tau_1), \|k\|\right) \overline{\psi\left(w_0(\tau_2), \|k\|\right)} e^{-\int\limits_0^{\tau_1} V(w_0(s_1))\,ds_1}\ e^{-\int\limits_0^{\tau_2} V(w_0(s_2))\,ds_2}\Big]$$

$$= e^{-\frac{(\tau_1-\tau_2)\|k\|^2}{2}}\, \mathbf{E}\left|\psi\left(w_0(\tau_2), \|k\|\right)\right|^2 e^{-2\int\limits_0^{\tau_2} V(w_0(s_2))\,ds_2}. \qquad (32)$$

С учетом (32) выражение для интеграла I_2 примет вид

$$I_2 = 2 \int\limits_{\|k\|\geqslant m} (1 + \|k\|^{2\alpha}) \Bigg(\int\limits_0^t e^{2\mathrm{Re}\lambda\tau_2} \mathbf{E}|\psi(w_0(\tau_2), \|k\|)|^2 e^{-2\int\limits_0^{\tau_2} V(w_0(s_2))\,ds_2}$$

$$\times \left[\mathrm{Re} \int\limits_{\tau_2}^t e^{\lambda(\tau_1-\tau_2)}\, e^{-\frac{(\tau_1-\tau_2)\|k\|^2}{2}}\, d\tau_1\right] d\tau_2\Bigg)\, |\varphi(x, k)|^2\, dk. \qquad (33)$$

Далее, оценим математическое ожидание, стоящее в (33). Используя условие $V(x) \geqslant 0$, неравенство

$$|a + b|^2 \leqslant 2\,(|a|^2 + |b|^2), \quad a, b \in \mathbb{C},$$

а также свойство 2 функции $\psi(x,r)$, получим оценку

$$\begin{aligned}
&\mathbf{E}\,|\psi(w_0(\tau_2),\|k\|)|^2\, e^{-2\int\limits_0^{\tau_2} V(w_0(s_2))\,ds_2} \\
&\quad\leqslant 2\,\mathbf{E}\,|\psi(w_0(\tau_2),\|k\|)-J_0(\|w(\tau_2)\|\,\|k\|)|^2+2\,\mathbf{E}\,|J_0(\|w(\tau_2)\|\,\|k\|)|^2 \\
&\qquad\qquad\qquad\qquad\leqslant C_1\,\|k\|^{-1}+2\,e^{-\tau_2\,\|k\|^2}\,I_0(\tau_2\,\|k\|^2).
\end{aligned}$$

Используя асимптотику для модифицированной функции Бесселя $I_0(r)$ (подробнее см. [3, с. 228]), получим

$$\mathbf{E}\,|\psi(w_0(\tau_2),\|k\|)|^2 e^{-2\int\limits_0^{\tau_2} V(w_0(s_2))\,ds_2}\leqslant C_1\,\|k\|^{-1}+C_2\,\|k\|^{-1}\,\tau_2{}^{-\frac{1}{2}}. \quad (34)$$

С учетом (33), (34), а также неравенства

$$\operatorname{Re}\int\limits_{\tau_2}^{t} e^{\lambda(\tau_1-\tau_2)}\,e^{-\frac{(\tau_1-\tau_2)\|k\|^2}{2}}\,d\tau_1\leqslant\frac{2}{|\frac{\|k\|^2}{2}-\lambda|},$$

окончательно получим оценку интеграла I_2

$$I_2\leqslant(C_1\,t+C_2\,t^{1/2})\int\limits_m^\infty(1+q^{2\alpha})\,\frac{2}{|\frac{q^2}{2}-\lambda|}\,dq<\infty, \quad (35)$$

справедливую при всех $\lambda\in\mathbb{C}$, $\operatorname{Re}\lambda\leqslant 0$, $0\leqslant t<\infty$ и $0\leqslant\alpha<1/2$.

Из неравенств (26) и (35) следует справедливость утверждения п. 1 настоящей теоремы.

Если $\operatorname{Re}\lambda<0$, то тогда соответствующая оценка интеграла I_2 примет вид

$$\begin{aligned}
I_2\leqslant\frac{C_1}{|\operatorname{Re}\lambda|}&\int\limits_m^\infty(1+q^{2\alpha})\,\frac{1}{|\frac{q^2}{2}-\lambda|}\,dq \\
&+C_2\int\limits_m^\infty(1+q^{2\alpha})\left(\int\limits_0^\infty e^{2\operatorname{Re}\lambda\,\tau}\tau^{-1/2}\,d\tau\right)\frac{1}{|\frac{q^2}{2}-\lambda|}\,dq<\infty. \quad (36)
\end{aligned}$$

Из оценок (27) и (36) следует то, что в метрике пространства $\mathcal{H}_\alpha$ $(0\leqslant\alpha<1/2)$ измеримых случайных функций $g=g(x,\omega)$ с нормой

$$\|g\|_\alpha^2=\mathbf{E}\int\limits_{\mathbb{R}^2}(1+\|k\|^{2\alpha})\,|(\mathcal{F}g)(k,\omega)|^2\,dk$$

существует предел

$$r_\lambda^\infty(x,\,\cdot\,)=(\mathcal{H}_\alpha)\lim_{t\to\infty} r_\lambda^t(x,\,\cdot\,),$$

который (как функция координаты) при каждом $x\in\mathbb{R}^2$ и $\lambda\in\mathbb{C}$, $\operatorname{Re}\lambda<0$ с вероятностью единица принадлежит классу Соболева $W_2^\alpha(\mathbb{R}^2)$. □

Далее, при всех $t>0$ и $\lambda\in\mathbb{C}$, $\operatorname{Re}\lambda\leqslant 0$ на множестве функций $f\in L_2(\mathbb{R}^2)$ определим случайный интегральный оператор $\mathcal{R}_\lambda^t$, полагая

$$\mathcal{R}_\lambda^t\,f(x)=\int\limits_{\mathbb{R}^2} r_\lambda^t(x,y)\,f(y)\,dy.$$

Докажем, что случайный оператор $\mathcal{R}_\lambda^t$ с вероятностью единица является ограниченным оператором в $L_2(\mathbb{R}^2)$.

Справедливо утверждение

Теорема 3. *При каждом* $0\leqslant t<\infty$ *случайный оператор* $\mathcal{R}_\lambda^t$ *с вероятностью единица является ограниченным интегральным оператором в* $L_2(\mathbb{R}^2)$, *причем в случае* $\operatorname{Re}\lambda<0$ *данное свойство остается справедливым и при* $t=\infty$.

Доказательство. Запишем оператор $\mathcal{R}_\lambda^t$ в виде

$$\mathcal{R}_\lambda^t f(x)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{\|k\|\leqslant m}\Bigg(\int\limits_0^t e^{\lambda\tau}\overline{\varphi\left(w_x(\tau),k\right)}e^{-\int\limits_0^\tau V(w_x(s))\,ds}\,d\tau\Bigg)(\mathcal{F}f)(k)dk$$
$$+\frac{1}{2\pi}\int\limits_{\|k\|\geqslant m}\overline{\varphi(x,k)}\Bigg(\int\limits_0^t e^{\lambda\tau}\,\psi\left(w_0(\tau),\|k\|\right)e^{-\int\limits_0^\tau V(w_0(s))\,ds}\,d\tau\Bigg)(\mathcal{F}f)(k)dk. \tag{37}$$

Далее, обозначим через $B_m(0)$ множество $\{k\in\mathbb{R}^2:\ \|k\|\leqslant m\}$. Пространство $L_2(\mathbb{R}^2)$ можно представить в виде прямой суммы подпространств

$$\mathcal{L}_0(\mathbb{R}^2)=\{f\in L_2(\mathbb{R}^2):\operatorname{supp}(\mathcal{F}f)(k)\subseteq B_m(0)\}$$

и

$$\mathcal{L}_1(\mathbb{R}^2)=\{f\in L_2(\mathbb{R}^2):\operatorname{supp}(\mathcal{F}f)(k)\cap B_m(0)=\varnothing\}.$$

Для доказательства теоремы достаточно показать, что сужения оператора $\mathcal{R}_\lambda^t$ на подпространства $\mathcal{L}_0(\mathbb{R}^2)$ и $\mathcal{L}_1(\mathbb{R}^2)$ являются ограниченными операторами.

Из (37) вытекает, что сужение оператора $\mathcal{R}_\lambda^t$ на подпространство $\mathcal{L}_1(\mathbb{R}^2)$ можно представить в виде композиции операторов $\mathcal{F}^*\,\widehat{\mathcal{R}}_\lambda^t\,\mathcal{F}$, где случайный оператор $\widehat{\mathcal{R}}_\lambda^t$ на своей области определения задан формулой

$$(\widehat{\mathcal{R}}_\lambda^t\, g)(k) = \int\limits_0^t e^{\lambda\tau}\, \psi\,(w_0(\tau), \|k\|)\, e^{-\int\limits_0^\tau V(w_0(s))\,ds}\, d\tau\, \cdot\, g(k).$$

Из свойства 1 функции $\psi(x,r)$ следует то, что с вероятностью единица оператор $\widehat{\mathcal{R}}_\lambda^t$ является ограниченным оператором (как оператор умножения на ограниченную функцию). Тогда в силу изометрии обобщенного преобразования Фурье $\mathcal{F}$, сужение оператора $\mathcal{R}_\lambda^t$ на подпространство $\mathcal{L}_1(\mathbb{R}^2)$ с вероятностью единица также является ограниченным оператором.

Далее, заметим, что сужение оператора $\mathcal{R}_\lambda^t$ на функции $f \in \mathcal{L}_0$ имеет вид

$$(\mathcal{R}_\lambda^t\, f)(x) = \int\limits_0^t e^{\lambda\,\tau}\, f(w_x(\tau))\, e^{-\int\limits_0^\tau V(w_x(s))\,ds}\, d\tau. \tag{38}$$

Оценим L_2 - норму случайной функции $(\mathcal{R}_\lambda^t\, f)(\,\cdot\,, w(\,\cdot\,))$. Используя (38) и неравенство Коши–Буняковского (оцениваем квадрат модуля интеграла (38)), получим

$$\begin{aligned}\|(\mathcal{R}_\lambda^t\, f)(\,\cdot\,, w(\,\cdot\,))\|_{L_2}^2 &= \lim_{M\to\infty} \int\limits_{\|x\|<M} dx\, |(\mathcal{R}_\lambda^t\, f)(x, w(\,\cdot\,))|^2 \\ &\leqslant t\, \lim_{M\to\infty} \int\limits_{\|x\|<M} dx\, \Bigg(\int\limits_0^t d\tau\, |f(w_x(\tau))|^2 \Bigg).\end{aligned}$$

Отметим, что использование нами неравенства Коши–Буняковского оправдано, поскольку функция $f \in \mathcal{L}_0$ является ограниченной (пространство $\mathcal{L}_0$ содержится в пространстве гладких и ограниченных функций $C_b^\infty(\mathbb{R}^2)$).

Используя теорему Фубини, окончательно получим

$$\|(\mathcal{R}_\lambda^t\, f)(\,\cdot\,, w(\,\cdot\,))\|_{L_2}^2 \leqslant t\, \lim_{M\to\infty} \int\limits_0^t d\tau \int\limits_{\|x\|<M} dx\, |f(w_x(\tau))|^2 \leqslant t^2\, \|f\|_{L_2}^2.$$

Теперь рассмотрим случай $\mathrm{Re}\,\lambda<0$. Для функции $|(\mathcal{R}_\lambda^\infty f)(x,w(\,\cdot\,))|^2$ верна оценка

$$|(\mathcal{R}_\lambda^\infty f)(x,w(\,\cdot\,))|^2 \leqslant \left(\int\limits_0^\infty e^{\mathrm{Re}\,\lambda\,\tau}\,d\tau\right)\cdot\left(\int\limits_0^\infty e^{\mathrm{Re}\,\lambda\,\tau}\,|f(w_x(\tau))|^2\,d\tau\right) = \frac{1}{|\mathrm{Re}\,\lambda|}\int\limits_0^\infty e^{\mathrm{Re}\,\lambda\tau}\,|f(w_x(\tau))|^2\,d\tau,$$

что, как и в предыдущей выкладке, является следствием неравенства Коши–Буняковского.

Снова используя теорему Фубини, получим

$$\|(\mathcal{R}_\lambda^\infty f)(\,\cdot\,,w(\,\cdot\,))\|_{L_2}^2 \leqslant \frac{1}{|\mathrm{Re}\,\lambda|}\cdot\lim_{M\to\infty}\int\limits_0^\infty e^{\mathrm{Re}\,\lambda\tau}\left(\int\limits_{\|x\|<M}|f(w_x(\tau))|^2\,dx\right)d\tau \leqslant \frac{1}{|\mathrm{Re}\,\lambda|^2}\|f\|_{L_2}^2. \quad \square$$

§4. Представление резольвенты

Как и выше обозначим через $\mathcal{H}=-\frac{1}{2}\,\Delta+V$ двумерный оператор Шрёдингера. Отметим, что оператор $\mathcal{H}$ является самосопряженным и положительно определенным на его области определения и имеет лишь непрерывный спектр, сосредоточенный на положительной полуоси $\sigma\,(\mathcal{H})=[0,\infty)$.

Через $R_\lambda=(\mathcal{H}-\lambda\,I)^{-1}$ обозначим резольвенту оператора $\mathcal{H}$. В случае $\lambda\notin\sigma\,(\mathcal{H})$ область определения оператора R_λ совпадает с $L_2(\mathbb{R}^2)$. В противном случае соответствующая область определения имеет вид

$$\mathrm{Dom}\,(R_\lambda)=\{f(x)\in L_2(\mathbb{R}^2):\ \frac{(\mathcal{F}f)(k)}{\frac{\|k\|^2}{2}-\lambda}\in L_2(\mathbb{R}^2)\}.$$

В импульсном представлении (то есть после обобщенного преобразования Фурье) оператору R_λ соответствует унитарно эквивалентный ему оператор умножения на функцию $(\frac{\|k\|^2}{2}-\lambda)^{-1}$ (подробнее про унитарную эквивалентность см. [10, с. 101]).

Справедливо следующее утверждение.

Теорема 4. 1. *Если* $\operatorname{Re}\lambda < 0$, *то тогда при всех* $f \in L_2(\mathbb{R}^2)$ *выполнено*

$$R_\lambda f(x) = \mathbf{E} \int\limits_{\mathbb{R}^2} r_\lambda^\infty(x,y)\, f(y)\, dy.$$

2. *Если* $\operatorname{Re}\lambda = 0$ *и* $\lambda \neq 0$, *то тогда при всех* $f \in L_2(\mathbb{R}^2)$ *выполнено*

$$R_\lambda f(x) = (L_2) \lim_{t\to\infty} \mathbf{E} \int\limits_{\mathbb{R}^2} r_\lambda^t(x,y)\, f(y)\, dy.$$

3. *Если* $\lambda = 0$, *то тогда при всех* $f \in \mathcal{D}(R_0)$ *выполнено*

$$R_0 f(x) = (L_2) \lim_{t\to\infty} \mathbf{E} \int\limits_{\mathbb{R}^2} r_0^t(x,y)\, f(y)\, dy.$$

Доказательство. Используя унитарность оператора $\mathcal{F}$ и теорему Фубини, получим

$$\mathbf{E} \int\limits_{\mathbb{R}^2} r_\lambda^t(x,y)\, f(y)\, dy = \int\limits_{\mathbb{R}^2} \left(\mathbf{E}\, g_\lambda^t(x,k)\right) (\mathcal{F} f)(k)\, dk. \tag{39}$$

Вычислим величину $\mathbf{E}\, g_\lambda^t(x,k)$. Используя лемму 6, в случае $\|k\| < m$ получим

$$\mathbf{E}\, g_\lambda^t(x,k) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^t e^{\lambda\tau}\, \mathbf{E}\, \overline{\varphi(w_x(\tau),\, k)}\, e^{-\int\limits_0^\tau V(w_x(s))\, ds}\, d\tau$$

$$= \frac{1}{2\pi}\, \overline{\varphi(x,k)}\, \frac{e^{t\,(\lambda - \frac{\|k\|^2}{2})} - 1}{\lambda - \frac{\|k\|^2}{2}}. \tag{40}$$

Аналогично, используя свойство 3 функции $\psi(x,r)$, в случае $\|k\| \geqslant m$ имеем

$$\mathbf{E}\, g_\lambda^t(x,k) = \frac{1}{2\pi}\, \overline{\varphi(x,k)} \cdot \int\limits_0^t e^{\lambda\tau}\, \mathbf{E}\, \psi(w_0(\tau),\, \|k\|)\, e^{-\int\limits_0^\tau V(w_0(s))\, ds}\, d\tau$$

$$= \frac{1}{2\pi}\, \overline{\varphi(x,k)}\, \frac{e^{t\,(\lambda - \frac{\|k\|^2}{2})} - 1}{\lambda - \frac{\|k\|^2}{2}}. \tag{41}$$

Подставляя (40), (41) в (39), получаем

$$\mathbf{E}\int\limits_{\mathbb{R}^2} r_\lambda^t(x,y)\,f(y)\,dy = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{\mathbb{R}^2}\overline{\varphi(x,k)}\,\frac{e^{t\,(\lambda-\frac{\|k\|^2}{2})}}{\lambda-\frac{\|k\|^2}{2}}\,(\mathcal{F}f)(k)\,dk$$
$$+\frac{1}{2\pi}\int\limits_{\mathbb{R}^2}\overline{\varphi(x,k)}\,\frac{1}{\frac{\|k\|^2}{2}-\lambda}\,(\mathcal{F}f)(k)\,dk = I_1(t,\lambda,x)+I_2(\lambda,x). \quad (42)$$

Если $\operatorname{Re}\lambda < 0$, то тогда $I_1(\infty,\lambda,x)=0$, что завершает доказательство пункта 1 теоремы.

Далее, напомним, что спектр оператора $\mathcal{H}$ сосредоточен на положительной полуоси $\sigma(\mathcal{H})=[0,\infty)$. Обозначим через $H(t,\lambda,k)$ функцию

$$H(t,\lambda,k)=\frac{e^{t\,(\lambda-\frac{\|k\|^2}{2})}}{\lambda-\frac{\|k\|^2}{2}}.$$

Заметим, что при каждом $t>0$, $\operatorname{Re}\lambda\leqslant 0$, $\lambda\neq 0$ и $k\in\mathbb{R}^2$ справедливо неравенство

$$|H(t,\lambda,k)|\leqslant\frac{1}{|\operatorname{Im}\lambda|}, \quad (43)$$

а при почти всех $k\in\mathbb{R}^2$ имеет место сходимость

$$\lim_{t\to\infty} H(t,\lambda,k)=0. \quad (44)$$

Таким образом, по теореме Лебега о мажорируемой сходимости, функция $I_1(t,\lambda,\,\cdot\,)$ при $t\to\infty$ имеет предел (в метрике пространства $L_2(\mathbb{R}^2)$) равный 0, что завершает доказательство второго пункта теоремы.

Докажем теперь утверждение п. 3 теоремы. Поскольку $0\in\sigma(\mathcal{H})$, мы уже не можем использовать оценку (43). Вместо этого заметим то, что

$$\frac{(\mathcal{F}f)(k)}{\frac{\|k\|^2}{2}}\in L_2(\mathbb{R}^2)$$

(последнее по определению означает то, что $f(x)\in\mathcal{D}(\mathcal{H}^{-1})$). Снова используя теорему Лебега о мажорируемой сходимости, получаем справедливость утверждения пункта 3 теоремы. □

Список литературы

1. D. R. Yafaev, *Mathematical Scattering Theory. Analytic Theory.* Amer. Math. Soc., Math. Surveys and Monographs, Vol. **158**, Providence, Rhode Island, 2010.
2. И. А. Ибрагимов, Н. В. Смородина, М. М. Фаддеев, *О свойствах одного класса случайных операторов.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **510** (2022), 143–164.
3. Г. Ватсон, *Теория бесселевых функций.* М., ИЛ, 1949.
4. А. Н. Колмогоров, С. В. Фомин, *Элементы теории функций и функционального анализа.* Москва, Наука, 1976.
5. Э. Хилле, Р. Филлипс, *Функциональный анализ и полугруппы.* Москва, Изд-во иностр. литературы, 1962.
6. А. Я. Хелемский, *Лекции по функциональному анализу.* Москва, МЦНМО, 2004. Л.
7. T. Ikebe, *Eigenfunction expansions associated with the Schrödinger operators and their applications to scattering theory.* — Archive Rational Mechan. Anal. **5** (1960), 1–34.
8. А. К. Николаев, *О вероятностном представлении резольвенты двумерного оператора Лапласа.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **510** (2022), 189–200.
9. Д. К. Фаддеев, Б. З. Вулих, Н. Н. Уральцева, *Избранные главы анализа и высшей алгебры.* Л., Изд-во Ленингр. ун-та, 1981.
10. М. Ш. Бирман, М. З. Соломяк, *Спектральная теория самосопряженных операторов в гильбертовом пространстве.* Л., Изд–во Ленингр. ун-та, 1980.
11. А. Н. Тихонов, А. А. Самарский, *Уравнения математической физики.* Москва, Изд-во физ.-матем. литературы, 1977.

Nikolaev A. K. On the probabilistic representation of the resolvent of the two-dimensional Schrödinger operator.

We consider a family of random linear operators that arises in the construction of a probabilistic representation of the resolvent of the two-dimensional Schrödinger operator. It is shown that with probability one the operators of this family are integral operators in $L_2(\mathbb{R}^2)$. The properties of the kernels of the corresponding operators are also investigated.

С.-Петербургское отделение
Математического института
им. В. А. Стеклова РАН,
Фонтанка 27, С.-Петербург 191023;
Исследовательская лаборатория
им. П. Л. Чебышева,
14-я линия Васильевского острова, 29,
199178, Санкт-Петербург, Россия
E-mail: nikolaiev.96@bk.ru

Поступило 8 сентября 2023 г.