Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 526, 2023 г.

Ю. Макарова

ВЕТВЯЩИЕСЯ СЛУЧАЙНЫЕ БЛУЖДАНИЯ С ДВУМЯ ТИПАМИ ЧАСТИЦ И РАЗНЫМИ ДИСПЕРСИЯМИ СКАЧКОВ

§1. Введение

Ветвящиеся случайные блуждания (ВСБ) являются случайными процессами, сочетающими в себе свойства ветвящихся процессов, связанных с размножением и гибелью частиц, а также процессов блуждания частиц по заданным областям. Модели ВСБ находят свое применение, например в демографии [4] и генетике [5].

Приведенная работа продолжает исследование, начатое в [3], в котором, по-видимому впервые, была описана модель ВСБ с двумя типами частиц с различными механизмами ветвления. В данной работе рассматривается содержательный пример, когда частицы каждого из типов отличаются не только интенсивностями ветвления, но и имеют различные механизмы блуждания. Предполагается, что частицы одного типа обладают конечной дисперсией скачков случайного блуждания, а частицы другого типа – бесконечной. Ранее такие модели не рассматривались.

Структура работы имеет следующий вид. В §2 описана модель ВСБ с двумя типами частиц, основной особенностью которой является то, что процессы блуждания частиц каждого типа различны. В §3 приведены основные результаты, сформулированные в теореме 3.1 о поведении первых моментов частиц каждой субпопуляции.

§2. Описание модели

Рассмотрим модель ВСБ с двумя типами частиц на целочисленной решетке $\mathbb{Z}^d$, $d \in \mathbb{N}$. За малое время dt эволюция частиц каждого типа содержит следующие возможности. Во-первых, частица типа $i = 1, 2$ может умереть с интенсивностью $\mu_i \geqslant 0$, то есть за малое время dt частица типа i умирает с вероятностью $\mu_i\, dt + o(dt)$. Во-вторых, каждая

Ключевые слова: ветвящиеся случайные блуждания, ветвящиеся процессы с двумя типами частиц, многомерные решетки.

частица типа i может произвести потомков обоих типов. Обозначим $\beta_i(k,l)$, $k+l \geqslant 2$, как интенсивность частицы типа i произвести k частиц первого типа и l частиц второго. Таким образом, соответствующая производящая функция рождения частиц имеет вид

$$F_i(z_1,z_2) = \sum_{k+l\geqslant 2} z_1^k z_2^l \, \beta_i(k,l).$$

Везде ниже будем предполагать, что

$$\mu_1 + \sum_{k+l\geqslant 2} \beta_1(k,l) = -\beta_1(1,0) > 0;$$
$$\mu_2 + \sum_{k+l\geqslant 2} \beta_2(k,l) = -\beta_2(0,1) > 0,$$

где $\beta_1(1,0)$ и $\beta_2(0,1)$ соответствуют случаям, когда с частицами не происходит никаких изменений.

Помимо процессов гибели и размножения, частицы могут перемещаться между узлами на $\mathbb{Z}^d$. Пусть вероятность прыжка из точки $x \in \mathbb{Z}^d$ в точку $y \in \mathbb{Z}^d$ за малое время dt для частицы типа $i = 1,2$ равна $\varkappa_i \, a_i(x,y)\, dt + o(dt)$. Здесь $\varkappa_i > 0$ – коэффициент диффузии. Пусть для каждого $i = 1,2$ интенсивности прыжков $a_i(x,y)$ удовлетворяют следующим условиям:

(1) для любых x, $y \in \mathbb{Z}^d$ положим $a_i(x,x) < 0$, $a_i(x,y) > 0$ при $\forall x \neq y$ и $\sum_y a_i(x,y) = 0$;
(2) симметричность: $a_i(x,y) = a_i(y,x)$;
(3) однородность по пространству: $a_i(x,y) = a_i(0,y-x)$;
(4) неприводимость: $\mathrm{Span}\{z : a_i(z) > 0\} = \mathbb{Z}^d$.

Из свойства однородности 3 следует, что интенсивности прыжков можно рассматривать как функции одной переменной $a_i(x,y) =: a_i(y-x)$. Свойство неприводимости 4 равносильно тому, что все точки на $\mathbb{Z}^d$ достижимы. Также, без ограничения общности, можно считать, что $a_1(0) = a_2(0) = -1$.

Тогда генератор случайного блуждания для каждого типа частиц $i = 1,2$ имеет вид

$$\mathcal{L}_i \psi(x) = \varkappa_i \sum_v \big(\psi(x+v) - \psi(x)\big)\, a_i(v). \tag{1}$$

Введем обозначения для субпопуляций, которые можно представить в виде соответствующих векторов

$$n_i(t,x,y) = [n_{i1}(t,x,y), n_{i2}(t,x,y)]^T, \quad i = 1,2.$$

Здесь $n_i(t,x,y)$ – вектор частиц в точке y, порожденных одной частицей типа i $(i = 1,2)$, которая в начальный момент времени $t = 0$ была в точке $x \in \mathbb{Z}^d$. Компоненты этих векторов $n_{ij}(t,x,y)$ – число частиц в точке y типа j, порожденные одной частицей типа i в точке x в начальный момент времени $t = 0$.

В рассматриваемой модели будем предполагать, что в начальный момент времени в каждом узле решетке находится хотя бы одна частица первого типа и хотя бы одна частица второго типа. Каждый узел решетки, в котором частица может гибнуть и производить потомков обоих типов, называется источником ветвления. В модели ниже будем предполагать, что источники ветвления расположены в каждом узле $\mathbb{Z}^d$.

В работе [3] были получены дифференциальные уравнения первых моментов субпопуляций частиц $m_{ij}(t,x,y) = \mathbf{E}\, n_{ij}(t,x,y)$, а также их решения в случае, когда генераторы блужданий совпадают. В данной работе рассмотрим случай, когда $\mathcal{L}_1 \neq \mathcal{L}_2$, и исследуем асимптотическое поведение при различных конкретно заданных операторах блужданий.

§3. Основные результаты

В работе [3] были получены решения дифференциальных уравнений для первых моментов в терминах дискретных преобразований Фурье функций $m_{ij}(t,x,y)$. Напомним, что дискретное преобразование Фурье для функции $f(x)$ имеет вид (см., например, [1])

$$\widehat{f}(\theta) = \sum_{u\in\mathbb{Z}^d} e^{\imath(\theta,u)} f(u), \qquad \theta \in [-\pi,\pi]^d.$$

В данной работе считаем, что генераторы случайных блужданий $\mathcal{L}_i$, $i = 1,2$, из формулы (1) различны. Будем предполагать, что интенсивности прыжков $a_i(x)$, $i = 1,2$, $x \in \mathbb{Z}^d$, удовлетворяют следующим соотношениям

$$\sum_v a_1(v)|v|^2 < \infty; \quad a_2(u) \sim \frac{H(u/|u|)}{|u|^{d+\alpha}}, \quad \alpha \in (0,2), \tag{2}$$

где $H(\,\cdot\,)$ – положительная непрерывная и симметричная функция на $\{u \in \mathbb{R}^d : |u| = 1\}$. Тогда

$$\sum_u a_2(u)\,|u|^2 = \infty.$$

При выполнении условий (2) будем говорить, что случайное блуждание для частиц первого типа имеет *конечную дисперсию скачков*, а для частиц второго типа – *бесконечную дисперсию скачков.*

Для доказательства основного утверждения нам понадобится следующее

Замечание 3.1. Рассмотрим задачу Коши

$$\frac{\partial p(t,x,y)}{\partial t} = \mathcal{L}p(t,x,y), \quad p(0,x,y) = \delta_x(y),$$

где $\delta_x(y)$ – дельта-функция, равная 1 при $x = y$ и 0 иначе.

В случае, когда оператор $\mathcal{L}$ задает ВСБ с конечной дисперсией скачков на $\mathbb{Z}^d$, в [1] было получено, что

$$p(t,x,y) \sim \frac{\gamma_d}{t^{d/2}} \quad \text{при } t \to \infty,$$

где γ_d – константа, зависящая от размерности решетки.

В работе [2] для случая, когда оператор $\mathcal{L}$ задает ВСБ с бесконечной дисперсией скачков на $\mathbb{Z}^d$, было получено, что при $t \to \infty$

$$p(t,x,y) \sim \frac{\gamma_{d,\alpha}}{t^{d/\alpha}},$$

где $\gamma_{d,\alpha}$ – константа, зависящая от размерности решетки и параметра $\alpha \in (0,2)$.

Перейдем к основному результату данной работы. При выполнении условий (2) справедливо следующее утверждение.

Теорема 3.1. *Пусть для ВСБ с двумя типами частиц интенсивности прыжков удовлетворяют следующим свойствам*

$$\sum_v a_1(v)|v|^2 < \infty; \quad a_2(u) \sim \frac{H(u/|u|)}{|u|^{d+\alpha}}, \quad \alpha \in (0,2),$$

где $H(\cdot)$ *– положительная непрерывная и симметричная функция на* $\{u \in \mathbb{R}^d : |u| = 1\}$*. Положим*

$$
\begin{aligned}
r_1 &= \sum_{k+l\geqslant 2}(k-1)\beta_1(k,l) - \mu_1; \quad r_2 = \sum_{k+l\geqslant 2}(l-1)\,\beta_2(k,l) - \mu_2;\\
b &= \sum_{k+l\geqslant 2} l\beta_1(k,l) \geqslant 0; \quad c = \sum_{k+l\geqslant 2} k\,\beta_2(k,l) \geqslant 0;\\
a(\theta) &= \varkappa_1\,\widehat{a}_1(\theta) + \Big(\sum_{k+l\geqslant 2}(k-1)\,\beta_1(k,l) - \mu_1\Big);\\
d(\theta) &= \varkappa_2\,\widehat{a}_2(\theta) + \Big(\sum_{k+l\geqslant 2}(l-1)\,\beta_2(k,l) - \mu_2\Big);\\
\lambda_{1,2}(\theta) &= \frac{a(\theta)+d(\theta)\pm\sqrt{D(\theta)}}{2}; \quad D(\theta) = \big(a(\theta)-d(\theta)\big)^2 + 4bc.
\end{aligned}
$$

Тогда для $m_{ij}(t,x,y) = \mathbf{E}\,n_{ij}(t,x,y)$*,* $i,j = 1,2$ *и* $\forall x,\ y \in \mathbb{Z}^d$ *верны следующие равенства и/или асимптотические представления при* $t \to \infty$*.*

Случай $b = 0$**,** $c = 0$**.** *Имеем*

$$
\left.
\begin{aligned}
m_{11}(t,x,y) &= e^{r_1 t}p_1(t,x,y); \quad m_{12}(t,x,y) = 0;\\
m_{22}(t,x,y) &= e^{r_2 t}p_2(t,x,y); \quad m_{21}(t,x,y) = 0.
\end{aligned}
\right\}
$$

Случай $b = 0$**,** $c \geqslant 0$**.** *Имеем*

$$
\left.
\begin{aligned}
&m_{11}(t,x,y) = e^{r_1 t}p_1(t,x,y);\\
&m_{12}(t,x,y) = 0;\\
&m_{22}(t,x,y) = e^{r_2 t}p_2(t,x,y);\\
&m_{21}(t,x,y) \sim \frac{c\tilde{c}}{(t2\pi)^{d/2}}e^{r_1 t}
\begin{cases}
\frac{e^{(d(0)-a(0))t}-1}{d(0)-a(0)}, & \text{если } a(0) \neq d(0),\\
t, & \text{если } a(0) = d(0),
\end{cases}
\end{aligned}
\right\}
$$

где $\tilde{c}$ *– неотрицательная константа.*

Случай $b \geqslant 0$, $c = 0$. *Имеем*

$$\left.\begin{aligned}
&m_{11}(t,x,y) = e^{r_1 t} p_1(t,x,y);\\
&m_{12}(t,\theta,y) \sim \frac{b\tilde{c}}{(t2\pi)^{d/2}} e^{r_1 t} \begin{cases} \frac{e^{(d(0)-a(0))t}-1}{d(0)-a(0)}, & \text{если } a(0) \neq d(0),\\ t, & \text{если } a(0) = d(0);\end{cases}\\
&m_{22}(t,x,y) = e^{r_2 t} p_2(t,x,y);\\
&m_{21}(t,x,y) = 0,
\end{aligned}\right\}$$

где $\tilde{b}$ *– неотрицательная константа.*

Случай $b > 0$, $c > 0$. *Имеем*

$$\left.\begin{aligned}
m_{11}(t,x,y) &\sim \frac{\tilde{c}e^{r_1 t}}{\sqrt{D(0)}\,(t2\pi)^{d/2}}\Big((a(0)-\lambda_2(0))\,e^{(d(0)+\sqrt{D(0)})t/2}\\
&\qquad + (\lambda_1(0)-a(0))\,e^{(d(0)-\sqrt{D(0)})t/2}\Big);\\
m_{21}(t,x,y) &\sim \frac{c\tilde{c}e^{r_1 t}}{\sqrt{D(0)}\,(t2\pi)^{d/2}}\Big(e^{(d(0)+\sqrt{D(0)})t/2} - e^{(d(0)-\sqrt{D(0)})t/2}\Big);\\
m_{12}(t,\theta,y) &\sim \frac{b\tilde{c}e^{r_1 t}}{\sqrt{D(0)}\,(t2\pi)^{d/2}}\Big(e^{(d(0)+\sqrt{D(0)})t/2} - e^{(d(0)-\sqrt{D(0)})t/2}\Big);\\
m_{22}(t,\theta,y) &\sim \frac{\tilde{c}e^{r_1 t}}{\sqrt{D(0)}\,(t2\pi)^{d/2}}\Big((\lambda_1(0)-a(0))\,e^{(d(0)+\sqrt{D(0)})t/2}\\
&\qquad + (a(0)-\lambda_2(0))\,e^{(d(0)-\sqrt{D(0)})t/2}\Big),
\end{aligned}\right\}$$

где $\tilde{c}$ *– неотрицательная константа.*

Доказательство. Рассмотрим отдельно каждый из случаев. Для доказательства используем обратное преобразование Фурье (см., например, [1]), которое имеет вид

$$f(u) = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^d \int\limits_{[-\pi,\pi]^d} \widehat{f}(\theta)\, e^{-\imath(\theta,u)}\, d\theta$$

Случай $b = c = 0$**.** Здесь уравнения, полученные в п. 3.2 в работе [3] примут вид

$$\widehat{m}_{11}(t, \theta, y) = e^{i(\theta, y)}\, e^{a(\theta)t};$$
$$\widehat{m}_{22}(t, \theta, y) = e^{i(\theta, y)}\, e^{d(\theta)t};$$
$$\widehat{m}_{ij}(t, \theta, y) = 0, \quad i \neq j.$$

Тогда, применяя обратное преобразование Фурье, получим

$$m_{11}(t, x, y) = e^{r_1 t}\, p_1(t, x, y);$$
$$m_{22}(t, x, y) = e^{r_2 t}\, p_2(t, x, y);$$
$$m_{ij}(t, x, y) = 0, \quad i \neq j,$$

где $p_i(t, x, y)$, $i = 1, 2$, – решение задачи Коши из замечания 3.1 с генератором $\mathcal{L}_i$ из (1).

Случай $b = 0$**,** $c > 0$**.** Аналогично с помощью обратного преобразования Фурье получаем, что

$$m_{11}(t, x, y) = e^{r_1 t}\, p_1(t, x, y);$$
$$m_{22}(t, x, y) = e^{r_2 t}\, p_2(t, x, y);$$
$$m_{12}(t, x, y) = 0.$$

Далее рассмотрим поведение обратного преобразования Фурье для функции $\widehat{m}_{21}(t, \theta, y)$ при t, стремящемся к бесконечности. Функция $\widehat{m}_{21}(t, \theta, y)$ имеет вид:

$$\widehat{m}_{21}(t, \theta, y) = \begin{cases} \frac{c e^{\imath(\theta, y)} e^{a(\theta)t}}{a(\theta) - d(\theta)} \big(1 - e^{(d(\theta) - a(\theta))t}\big), & \theta : a(\theta) \neq d(\theta), \\ c t e^{\imath(\theta, y)} e^{a(\theta)t}, & \theta : a(\theta) = d(\theta), \end{cases}$$

Заметим, что в случае, когда $b = 0$, интенсивности $\beta_1(0, l)$ равны 0 для любого $l > 0$. Тогда

$$r_1 = \sum_{k+l \geqslant 2} (k-1)\, \beta_1(k, l) - \mu_1 = \sum_{k \geqslant 2} (k-1)\, \beta_1(k, 0) - \mu_1.$$

Разложим функцию $\widehat{m}_{21}(t, \theta, y)$ в степенной ряд

$$\widehat{m}_{21}(t, \theta, y) = c e^{\imath(\theta, y)} e^{a(\theta)t} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{t^k}{k!} \big(d(\theta) - a(\theta)\big)^{k-1}$$
$$= c e^{\imath(\theta, y)} e^{r_1 t} e^{\widehat{a}_1(\theta)t} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{t^k}{k!} \big(d(\theta) - a(\theta)\big)^{k-1}$$

В [1, лемма 2.1.2] было показано, что функция $\widehat{a}_1(\theta)$ имеет единственный максимум в точке $\theta = 0$. Тогда, применяя обратное преобразование Фурье, получаем

$$\begin{aligned} m_{21}(t,x,y) &= \frac{ce^{r_1 t}}{(2\pi)^d} \int\limits_{[-\pi,\pi]^d} e^{\imath(\theta,y-x)} e^{\widehat{a}_1(\theta)t} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{t^k}{k!} \big(d(\theta)-a(\theta)\big)^{k-1} d\theta \\ &= \frac{ce^{r_1 t}}{(2\pi)^d} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{t^k}{k!} \int\limits_{[\pi,\pi]^d} e^{\imath(\theta,y-x)} e^{\widehat{a}_1(\theta)t} \big(d(\theta)-a(\theta)\big)^{k-1} d\theta. \end{aligned}$$

Каждый интеграл из ряда выше является интегралом Лапласа (см., например, теорема 2.1.1, [1]). Тогда

$$\begin{aligned} m_{21}(t,x,y) &\sim \frac{ce^{r_1 t}}{(2\pi)^d} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{t^k}{k!} \Big(\frac{2\pi}{t}\Big)^{d/2} c' \big(d(0)-a(0)\big)^{k-1} \\ &= \frac{cc'}{(2\pi)^d} e^{r_1 t} \Big(\frac{2\pi}{t}\Big)^{d/2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{t^k}{k!} \big(d(0)-a(0)\big)^{k-1} \\ &= \frac{cc'}{(2\pi t)^{d/2}} e^{r_1 t} \begin{cases} \frac{e^{(d(0)-a(0))t}-1}{(d(0)-a(0))}, & \theta : a(0) \neq d(0), \\ t, & \theta : a(0) = d(0). \end{cases} \end{aligned}$$

Случай $b > 0$, $c = 0$ аналогичен предыдущему случаю.

Случай $b > 0$, $c > 0$. Рассмотрим функцию $\widehat{m}_{11}(t,\theta,y)$. Остальные функции рассматриваются аналогично. Тогда

$$\widehat{m}_{11}(t,\theta,y) = \frac{e^{\imath(\theta,y)}}{\sqrt{D(\theta)}} \big((a(\theta)-\lambda_2(\theta))\, e^{\lambda_1(\theta)t} + (\lambda_1(\theta)-d(\theta))\, e^{\lambda_2(\theta)t} \big).$$

Отсюда для $\widehat{m}_{11}(t,\theta,y)$ получаем следующее представление:

$$\begin{aligned} \widehat{m}_{11}(t,\theta,y) = \frac{e^{\imath(\theta,y)}}{\sqrt{D(\theta)}}\, & e^{\frac{(a(\theta)+d(\theta))}{2} - \frac{t\sqrt{D(\theta)}}{2}} \Big(a(\theta)\big(e^{t\sqrt{D(\theta)}}-1\big)\Big) \\ & + \lambda_1(\theta) - \lambda_2(\theta)\, e^{t\sqrt{D(\theta)}}. \end{aligned}$$

Как и для случая $b = 0$, $c > 0$, применив обратное преобразование Фурье, получаем

$$m_{11}(t,x,y) = \frac{1}{(2\pi)^d} \int\limits_{[-\pi,\pi]^d} e^{\imath(\theta, y-x)}\, e^{a(\theta)t/2}$$
$$\times \Big((a(\theta) - \lambda_2(\theta))\, e^{(d(\theta)+\sqrt{D(\theta)})t/2}$$
$$+ (\lambda_1(\theta) - a(\theta))\, e^{(d(\theta)-\sqrt{D(\theta)})t/2} \Big) \frac{d\theta}{\sqrt{D(\theta)}}$$

Разложим подынтегральное выражение в ряд Тейлора

$$m_{11}(t,x,y) = \frac{1}{(2\pi)^d} \int\limits_{[-\pi,\pi]^d} e^{\imath(\theta, y-x)}\, e^{a(\theta)t/2}$$
$$\times \Big[\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\big[(d(\theta)+\sqrt{D(\theta)})\, t\big]^k}{2^k k!} \big(a(\theta) - \lambda_2(\theta)\big)$$
$$+ \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\big[(d(\theta)-\sqrt{D(\theta)})\, t\big]^k}{2^k k!} \big(\lambda_1(\theta) - a(\theta)\big) \Big] \frac{d\theta}{\sqrt{D(\theta)}}.$$

Таким образом,

$$m_{11}(t,x,y) = \frac{1}{(2\pi)^d} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{2^k k!} \int\limits_{[\pi,\pi]^d} e^{\imath(\theta, y-x)}\, e^{a(\theta)t/2}$$
$$\times \Big(\big(a(\theta) - \lambda_2(\theta)\big)\big(d(\theta) + \sqrt{D(\theta)}\big)^k$$
$$+ \big(\lambda_1(\theta) - a(\theta)\big)\big(d(\theta) - \sqrt{D(\theta)}\big)^k \Big) \frac{d\theta}{\sqrt{D(\theta)}}$$
$$\sim \frac{c' e^{r_1 t/2}}{(2\pi t)^{d/2}} \sum_{k=0}^{\infty} \Big(\big(a(0) - \lambda_2(0)\big)\, \big(d(0) + \sqrt{D(0)}\big)^k$$
$$+ \big(\lambda_1(0) - a(0)\big)\, \big(d(0) - \sqrt{D(0)}\big)^k \Big) \frac{1}{\sqrt{D(0)}}$$
$$= \frac{c' e^{r_1 t/2}}{(2\pi t)^{d/2} \sqrt{D(0)}} \Big(\big(a(0) - \lambda_2(0)\big)\, e^{(d(0)+\sqrt{D(0)})/2}$$
$$+ \big(\lambda_1(0) - a(0)\big)\, e^{(d(0)-\sqrt{D(0)})/2} \Big).$$

Для функций $m_{12}(t,x,y)$, $m_{21}(t,x,y)$ и $m_{22}(t,x,y)$ асимптотические представления получаются аналогично. □

Полученные результаты для первых моментов не зависят от коэффициента α из условия (2) в случае, когда $b > 0$ и $c > 0$, так как начальное условие предполагает наличие частиц каждого типа в узле решетки и источники ветвления расположены в каждом узле целочисленной решетки $\mathbb{Z}^d$.

Список литературы

1. Е. Б. Яровая, *Ветвящиеся случайные блуждания в неоднородной среде*, Москва, Издательство Центра прикладных исследований при механико-математическом факультете МГУ, 2007.
2. A. Rytova, E. Yarovaya, *Survival analysis of particle populations in branching random walks.* — Commun. Statist. Part B: Simulation and Computation **50**, No. 4 (2019), 1–15.
3. Iu. Makarova, D. Balashova, S. Molchanov, E. Yarovaya, *Branching random walks with two types of particles on multidimensional lattices.* — Mathematics **10**, No. 6 (2022), 1–46.
4. S. Molchanov, J. Whitmeyer, *Spatial models of population processes.* — In: Modern Problems of Stochastic Analysis and Statistics – selected contributions in honor of Valentin Konakov (V. Panov ed.), pp. 435–454, Springer, 2017.
5. Yu. Makarova, V. Kutsenko, E. Yarovaya, *On two-type branching random walks and their applications for genetic modelling.* — In: Recent Developments in Stochastic Methods and Application, Springer Proceedings in Mathematics & Statistics, **371**, pp. 255–268, 2021.

Makarova Iu. Branching random walks with two types of particles and different variances of jumps.

We consider the model of two-type branching random walk in which each type has not only its own branching mechanism but also its own generator of random walk. We obtained the asymptotic behaviour for the first moments of subpopulations.

МГУ имени М. В. Ломоносова,
Москва
E-mail: ykmakarova@gmail.com

Поступило 16 октября 2023 г.