Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 526, 2023 г.

А. В. Люлинцев

МАРКОВСКИЕ ВЕТВЯЩИЕСЯ СЛУЧАЙНЫЕ БЛУЖДАНИЯ ПО $\mathbf{Z}_+$ С ПОГЛОЩЕНИЕМ В НУЛЕ

§1. Описание модели

В настоящей работе изучается процесс ветвящегося случайного блуждания по $\mathbf{Z}_+ = \{0, 1, 2, \dots\}$. Под случайным блужданием в данном случае понимается однородный марковский процесс на фазовом пространстве $\mathbf{Z}_+$ с непрерывным временем t. Такой процесс задается своей матрицей переходных интенсивностей $A = \big(a(n,m)\big)_{n,m\in\mathbf{Z}_+}$ (см., напр., [3]), на которую мы налагаем условия:

A1. $a(n,m) = 0$ при $|n-m| \geqslant 2$;

A2. $a(n,m) > 0$ при $|n-m| = 1, n \neq 0$; $a(n,n) < 0$ при $n \neq 0$; $a(0,m) = 0$ и

$$\sum_{m\in\mathbf{Z}_+} a(n,m) = a(n,n-1) + a(n,n) + a(n,n+1) = 0.$$

(в последней формуле мы используем соглашение $a(0,-1) = 0$);

A3. $a(n,m) = a(m,n)$;

A4. $\sup\limits_{n,m\in\mathbf{Z}_+} |a(n,m)| < \infty$.

Условия A1 и A2 означают, что частица может переходить только в соседние точки $\mathbf{Z}_+$, то есть при каждой смене положения частицы ее координата изменяется на единицу, и при старте из любого состояния $n \in \mathbf{Z}_+$ любое состояние $m \in \mathbf{Z}_+$ достижимо, то есть случайное блуждание является неприводимым. Условие $a(0,m) = 0$, которое соответствует тому, что нулевая строка матрицы A состоит из нулей, означает, что нуль на решетке $\mathbf{Z}_+$ является поглощающим состоянием, то есть частица с ненулевой вероятностью может перейти в нуль, однако там мгновенно погибает.

Ключевые слова: марковский ветвящийся процесс, ветвящиеся случайные блуждания, матрицы Якоби, ортогональные многочлены.

Данная работа была поддержана Санкт-Петербургским международным математическим Институтом имени Леонарда Эйлера, грантовое соглашение No. 075-15-2022-289 от 06.04.2022.

Таким образом, в отличие от [5], где рассматривался случай отражения в нуле (частица, находящаяся в нуле, через экспоненциальное время возвращалась в единицу), траектория данного случайного блуждания может начинаться только из точки $n \in \mathbf{Z}_+ \setminus \{0\} = \{1, 2, 3, \dots\}$.

Для $\varphi, \psi \in \ell_2(\mathbf{Z}_+)$ через (φ, ψ) будем обозначать соответствующее скалярное произведение

$$(\varphi, \psi) = \sum_{m \in \mathbf{Z}_+} \varphi(m)\, \psi(m).$$

Через $\mathring{\ell}_2(\mathbf{Z}_+)$ обозначим подпространство $\ell_2(\mathbf{Z}_+)$ векторов, у которых нулевая координата равна нулю, то есть

$$\mathring{\ell}_2(\mathbf{Z}_+) = \{x \in \ell_2(\mathbf{Z}_+) : x \perp \vec{e}_0\}.$$

Для $n \in \mathbf{Z}_+ \setminus \{0\}$ через $\xi_n(t)$ обозначим траекторию случайного блуждания с начальным условием $\xi_n(0) = n$. Если в некоторый момент времени t_0 частица оказывается в нулевом состоянии, то есть, $\xi_n(t_0) = 0$, то для всех $t > t_0$ частица остается в нулевом состоянии, то есть $\xi_n(t) = 0$. Марковское семейство $\xi_n(t)$ стандартным образом определяет полугруппу операторов

$$P_0^t : \mathring{\ell}_2(\mathbf{Z}_+) \to \mathring{\ell}_2(\mathbf{Z}_+), \quad t \geqslant 0,$$

где оператор P_0^t действует на функцию $\varphi \in \mathring{\ell}_2(\mathbf{Z}_+)$ как

$$[P_0^t \varphi](n) = \mathbf{E}\, \varphi\bigl(\xi_n(t)\bigr). \tag{1}$$

Через $\mathcal{A}$ обозначим генератор (инфинитезимальный оператор) полугруппы P_0^t. Найдем явное выражение для оператора $\mathcal{A}$. При $t \to 0+$ имеем

$$\begin{aligned}
[P_0^t \varphi](n) - \varphi(n) &= \varphi(n)\bigl(1 + t a(n,n)\bigr) + t \sum_{m \in \mathbf{Z}_+ \setminus \{n\}} a(n,m)\, \varphi(m) + o(t) - \varphi(n) \\
&= t\Bigl(a(n,n)\, \varphi(n) + \sum_{m \in \mathbf{Z}_+ \setminus \{n\}} a(n,m)\, \varphi(m)\Bigr) + o(t) \\
&= t\, [\mathcal{A}\varphi](n) + o(t),
\end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}
[\mathcal{A}\varphi](n) &= \sum_{m \in \mathbf{Z}_+} a(n,m)\, \varphi(m) \\
&= a(n,n-1)\, \varphi(n-1) + a(n,n)\, \varphi(n) + a(n,n+1)\, \varphi(n+1)
\end{aligned}$$

есть оператор, задаваемый матрицей A в стандартном базисе в $\ell_2(\mathbf{Z}_+)$.

Для описания ветвящегося случайного блуждания добавим к случайному блужданию механизм ветвления. Будем предполагать, что источники ветвления находятся в каждой точке $n \in \mathbf{Z}_+ \setminus \{0\}$. В связи с тем, что в нуле происходит гибель частиц, характеристики источника в нуле не повлияют на процесс, поэтому сразу будем считать, что в нуле источника ветвления нет. В рассматриваемой нами модели источник ветвления описывается последовательностью коэффициентов $d_k(n)$, $k \in \mathbf{N} \cup \{0\}$, удовлетворяющих условиям

$$d_1(n) \leqslant 0, \quad d_k(n) \geqslant 0 \ \text{ при } \ k \neq 1 \ \text{ и } \ \sum_{k=0}^{\infty} d_k(n) = 0.$$

Для точки нуль $d_k(0) = 0$ для всех $k \in \mathbf{N} \cup \{0\}$.

Данная последовательность коэффициентов однозначно определяется своей инфинитезимальной производящей функцией

$$\varkappa(n,u) = \sum_{k=0}^{\infty} d_k(n)\, u^k, \quad u \in [0,1], \quad n \in \mathbf{Z}_+.$$

Размножение и гибель частиц в источнике ветвления в каждой точке $n \in \mathbf{Z}_+ \setminus \{0\}$ задается процессом Гальтона–Ватсона, где $d_k(n)$ – интенсивность деления на k потомков.

Через $\beta(n)$ будем обозначать интенсивность источника в точке $n \in \mathbf{Z} \setminus \{0\}$. По определению $\beta(n) = \varkappa'(n,1) = \sum_{k=1}^{\infty} k\, d_k(n)$. Отметим, что интенсивность в нуле $\beta(0) = 0$. Всюду ниже предполагаем выполнение условия

$$\|\beta\|_\infty = \sup_{n \in \mathbf{Z}_+} |\beta(n)| < \infty. \tag{2}$$

Процесс ветвления предполагается независимым от процесса блуждания.

Таким образом, каждая частица, находящаяся в момент времени t в некоторой точке $n \in \mathbf{Z}_+ \setminus \{0\}$, независимо от остальных частиц в системе, может за малое время h перейти с вероятностью $p(h,n,m) = a(n,m)\, h + o(h)$ в точку $m \neq n$, или произвести $k \neq 1$ потомков, находящихся в этой же точке n, с вероятностью $p_k(h,n) = d_k(n)\, h + o(h)$, или сохраниться (то есть никаких изменений не произойдет) с вероятностью

$$1 - \sum_{m \in \mathbf{Z}_+ \setminus \{n\}} a(n,m)\, h - \sum_{k \in \mathbf{Z}_+ \setminus \{1\}} d_k(n)\, h + o(h).$$

Отметим, что в литературе такие процессы также носят название однородных марковских ветвящихся процессов на фазовом пространстве $\mathbf{Z}_+$ (см. [4, глава V, §3]), но мы, следуя [7], будем называть их ветвящимися случайными блужданиями.

Обозначим через $X_n(t)$, $t \geqslant 0$, процесс, задаваемый оператором $\mathcal{A}$ и производящей функцией $\varkappa(n,u)$, с условием $X_n(0) = \delta_n$ того, что в момент времени $t = 0$ в системе имеется ровно одна частица, находящаяся в точке $n \in \mathbf{Z}_+ \setminus \{0\}$, где δ_n – дельта-мера в точке n. Как и в [6], процесс $X_n(t)$ мы далее будем рассматривать как марковский процесс, принимающий значения в пространстве $\mathcal{M}$ всех конечных целочисленных мер на $\mathbf{Z}_+ \setminus \{0\}$. Всякий элемент $M \in \mathcal{M}$ имеет вид

$$M = \sum_{j=1}^{k} \delta_{m_j}, \tag{3}$$

где $k \in \mathbf{N} \cup \{0\}$ и $m_j \in \mathbf{Z}_+ \setminus \{0\}$. Важно отметить, что в представлении (3) точки m_j не обязательно различны, что соответствует тому, что в одной точке $\mathbf{Z}_+ \setminus \{0\}$ может находиться несколько частиц одновременно, и отличаются находящиеся в одной точке частицы только своими номерами в списке частиц $\{m_1, m_2, \ldots, m_k\}$. Другими словами, каждое m_j соответствует отдельной частице, которую мы кодируем занятой ей точкой m_j и ее номером j в списке. Так как далее мы будем рассматривать только симметрические функции от $X_n(t)$, конкретный выбор нумерации частиц не играет роли. Для $M \in \mathcal{M}$ символом $\{M\}$ будем обозначать множество всех частиц, это множество мы будем записывать как

$$\{M\} = \{m_1, m_2, \ldots, m_k\}, \tag{4}$$

причем в этом представлении каждая точка $\mathbf{Z}_+ \setminus \{0\}$ может встречаться несколько раз, что соответствует тому, что в этой точке находится несколько частиц.

Итак, ветвящееся случайное блуждание $X_n(t)$ мы рассматриваем как $\mathcal{M}$-значный марковский случайный процесс, определяемый условием того, что в начальный момент времени имеется единственная частица в точке $n \in \mathbf{Z}_+ \setminus \{0\}$. Нас будет интересовать величина, равная среднему числу частиц $N_n(t,m)$ в некоторой точке $m \in \mathbf{Z}_+ \setminus \{0\}$ в момент времени $t > 0$, а также асимптотическое поведение этой величины при $t \to \infty$.

Ниже мы покажем, что исследование величин $N_n(t,m)$ связано с исследованием некоторой матрицы Якоби. В терминах ортогональных многочленов, соответствующих этой матрице, будут получены точные значения для величин $N_n(t, m)$ в общей модели, а далее эти результаты будут применены к некоторым конкретным моделям, для которых величины $N_n(t, m)$ будут выражены в терминах специальных функций и будет найдено асимптотическое поведение $N_n(t, m)$ при $t \to \infty$.

Автор выражает глубокую благодарность Н. В. Смородиной за постановку задачи и внимание к работе.

§2. Полугруппа операторов, порождаемая ветвящимся случайным блужданием

Определим еще одну полугруппу операторов. Напомним, что процесс $X_n(t)$ мы рассматриваем как марковский случайный процесс со значениями в пространстве $\mathcal{M}$, при этом случайное множество $\{X_n(t)\}$ определяется формулой (4).

Для каждых $t \geqslant 0$, $n \in \mathbf{Z}_+ \setminus \{0\}$ и $\varphi \in \mathring{\ell}_2(\mathbf{Z}_+)$ определим случайную величину $\Im_{t,n}(\varphi)$, полагая

$$\Im_{t,n}(\varphi) = \sum_{m \in \{X_n(t)\}} \varphi(m) = \int\limits_{\mathbf{Z}_+ \setminus \{0\}} \varphi \, dX_n(t). \tag{5}$$

По определению $\Im_{0,n}(\varphi) = \varphi(n)$.

Для каждого $t \geqslant 0$ определим оператор $P^t : \mathring{\ell}_2(\mathbf{Z}_+) \to \mathring{\ell}_2(\mathbf{Z}_+)$. Этот оператор действует на $\varphi \in \mathring{\ell}_2(\mathbf{Z}_+)$ как

$$[P^t \varphi](n) = \mathbf{E}\, \Im_{t,n}(\varphi). \tag{6}$$

Лемма 1. *Семейство операторов P^t является полугруппой, то есть для всех $s, t \geqslant 0$ справедливо соотношение*

$$P^{t+s} = P^t P^s.$$

Доказательство. Используя (5) и тот факт, что $X_n(t)$ является марковским процессом, получаем

$$\begin{aligned} [P^{t+s}\varphi](n) &= \mathbf{E}\, \Im_{t+s,n}(\varphi) = \mathbf{E}\, \mathbf{E}\left\{ \Im_{t+s,n}(\varphi) \,\middle|\, X_n(t) \right\} \\ &= \mathbf{E}\left\{ \sum_{m \in \{X_n(t)\}} \mathbf{E}\, \Im_{s,m}(\varphi) \right\} = \mathbf{E}\left\{ \sum_{m \in \{X_n(t)\}} [P^s \varphi](m) \right\} \\ &= \mathbf{E}\, \Im_{t,n}(P^s \varphi) = [P^t P^s \varphi](n). \qquad \square \end{aligned}$$

Определим диагональный оператор $\mathcal{B}$, задаваемый в стандартном базисе в $\ell_2(\mathbf{Z}_+)$ матрицей

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & \beta(1) & 0 & \dots \\ 0 & 0 & \beta(2) & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}.$$

Справедливо следующее утверждение.

Лемма 2. *Генератор полугруппы* P^t *есть оператор* $\mathcal{A}+\mathcal{B}$, *то есть для всех* $\varphi \in \mathring{\ell}_2(\boldsymbol{Z}_+)$, $n \in \boldsymbol{Z}_+ \setminus \{0\}$ *справедливо*

$$\lim_{t\to 0+} \frac{[P^t\varphi](n) - \varphi(n)}{t} = [\mathcal{A}\varphi](n) + \beta(n)\,\varphi(n).$$

Доказательство. При $t \to 0+$ имеем

$$\begin{aligned}
&[P^t\varphi](n) - \varphi(n) = \mathbf{E}\,\mathfrak{I}_{t,n}(\varphi) - \varphi(n) \\
&\quad = \varphi(n)\bigl(1 + t\,a(n,n) + o(t)\bigr)\bigl(1 + t\,b_1(n) + o(t)\bigr) \\
&\qquad + t \sum_{m\in\mathbf{Z}_+\setminus\{n\}} a(n,m)\,\varphi(m) + t \sum_{k\in\mathbf{Z}_+\setminus\{1\}} k\,b_k(n)\,\varphi(n) + o(t) - \varphi(n) \\
&\quad = t \sum_{m\in\mathbf{Z}_+} a(n,m)\,\varphi(m) + t \sum_{k=0}^{\infty} \varphi(n) + o(t) \\
&\quad = t\,[\mathcal{A}\varphi](n) + t\,\beta(n)\,\varphi(n) + o(t).
\end{aligned}$$

Из последней формулы мгновенно следует утверждение леммы. □

Заметим, что утверждение леммы 2 эквивалентно операторному тождеству (см., например, [2, глава 8, §2])

$$P^t = e^{t\mathcal{H}}, \quad \text{где} \quad \mathcal{H} = \mathcal{A} + \mathcal{B},$$

где оператор $\mathcal{A}$ отвечает блужданию, а диагональный оператор $\mathcal{B}$ отвечает ветвлению.

В нашей модели оператор $\mathcal{H}$ в стандартном базисе в $\ell_2(\mathbf{Z}_+)$ задается матрицей

$$H = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ b_0 & a_1 & b_1 & 0 & \dots \\ 0 & b_1 & a_2 & b_2 & \dots \\ 0 & 0 & b_2 & a_3 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}, \qquad (7)$$

где последовательности $\{a_k\}, \{b_k\}$ для всех $k \in \mathbf{Z}_+$ определяются равенствами

$$a_k = a(k,k) + \beta(k), \quad b_k = a(k+1,k) > 0.$$

Важно отметить (и далее мы будем это использовать), что верно и обратное, всякая матрица H вида (7) с условием $b_k > 0$ для любого $k \in \mathbf{Z}_+$ может быть однозначно представлена в виде суммы матриц, отвечающих операторам блуждания и ветвления, именно,

$$H = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots \\ b_0 & -(b_0+b_1) & b_1 & \dots \\ 0 & b_1 & -(b_1+b_2) & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & a_1+b_0+b_1 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & a_2+b_1+b_2 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}. \qquad (8)$$

Из условий A3, A4 и (2) вытекает, что оператор $\mathcal{H}$ является самосопряженным ограниченным оператором в $\mathring{\ell}_2(\mathbf{Z}_+)$.

Функция $u(n,t) = [P^t\varphi](n)$ является решением задачи Коши

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = \mathcal{H}u, \\ u(n,0) = \varphi(n). \end{cases}$$

Рассмотрим в качестве φ индикаторную функцию одноточечного множества $\{m\}$, где $m \in \mathbf{Z}_+ \setminus \{0\}$,

$$\mathbb{I}_{\{m\}}(k) = \delta_{mk}, \quad \text{где } \delta_{mk} \text{ — символ Кронекера.}$$

Из (5) следует, что $\mathfrak{I}_{t,n}(\mathbb{I}_{\{m\}})$ есть число частиц в точке m в момент времени t при условии того, что в начальный момент времени в системе имелась ровно одна частица, находящаяся в точке n. Соответственно, в этом случае среднее число частиц $N_n(t,m)$ в точке m есть

$$N_n(t,m) = \mathbf{E}\,\mathfrak{I}_{t,n}(\mathbb{I}_{\{m\}}) = [P^t\mathbb{I}_{\{m\}}](n) = [e^{t\mathcal{H}}\mathbb{I}_{\{m\}}](n). \qquad (9)$$

Таким образом, исследование среднего числа частиц в точке сводится к нахождению экспоненты оператора $\mathcal{H}$.

Обзор литературы, связанной с данной задачей, представлен в [5].

В случае, когда нуль является отражающим, а не поглощающим состоянием, задача решена в работе [5]. Рассматривался самосопряженный ограниченный оператор в $\ell_2(\mathbf{Z}_+)$, который в стандартном базисе задавался матрицей Якоби

$$\begin{pmatrix} a_0 & b_0 & 0 & 0 & \dots \\ b_0 & a_1 & b_1 & 0 & \dots \\ 0 & b_1 & a_2 & b_2 & \dots \\ 0 & 0 & b_2 & a_3 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix},$$

с которой связаны ортогональные многочлены $\{P_n(\lambda)\}_{n=0}^{\infty}$. Как известно из теории ортогональных многочленов и матриц Якоби (см. [1, глава I]), с матрицей (7) связано и другое семейство ортогональных многочленов $\{Q_n(\lambda)\}_{n=1}^{\infty}$, которые еще носят название многочленов второго рода. Семейство многочленов второго рода в точности соответствует модели, в которой нуль является поглощающим состоянием.

§3. Формула для среднего числа частиц $N_n(t,m)$

Сначала приведем необходимые сведения из теории якобиевых матриц и ортогональных многочленов. Подробное изложение данной теории можно найти, например, в [1].

Для каждого $\lambda \in \sigma(\mathcal{H})$ решаем задачу на собственные значения:

$$HQ(\lambda) = \lambda Q(\lambda), \quad \text{где } Q(\lambda) = \big(0, 1/b_0, Q_2(\lambda), \dots\big)^T, \tag{10}$$

Из (10) и явного вида (7) матрицы H получаем рекуррентное соотношение для $\{Q_n(\lambda)\}_{n=0}^{\infty}$:

$$b_{n-1}Q_{n-1}(\lambda) + a_nQ_n(\lambda) + b_nQ_{n+1}(\lambda) = \lambda Q_n(\lambda), \quad n = 1, 2, \dots, \tag{11}$$

где $Q_0(\lambda) = 0, Q_1(\lambda) = 1/b_0$.

Нетрудно показать, что $Q_n(\lambda)$ является многочленом от λ. Далее через $\mathbf{R}[\lambda]$ будем обозначать пространство всех многочленов от λ с вещественными коэффициентами.

Приведем некоторые свойства многочленов $\{Q_n(\lambda)\}_{n=0}^{\infty}$.

Лемма 3. *Для всех $n \in \boldsymbol{Z}_+ \setminus \{0\}$ справедливы следующие утверждения:*

1. $\deg Q_n(\lambda) = n-1$.
2. *Коэффициент при* λ^{n-1} *в многочлене* $Q_n(\lambda)$ *равен* $\dfrac{1}{b_0 b_1 \cdots b_{n-1}}$.

Доказательства см., например, [1, глава I, §§1–2].

Теперь рассмотрим матрицу $\mathring{H}$, полученную из матрицы H путем вычеркивания нулевой стоки и нулевого стобца, то есть

$$\mathring{H} = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & 0 & 0 & \dots \\ b_1 & a_2 & b_2 & 0 & \dots \\ 0 & b_2 & a_3 & b_3 & \dots \\ 0 & 0 & b_3 & a_4 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}. \tag{12}$$

Матрица (12) является якобиевой матрицей, а потому ей соответствуем семейство ортогональных многочленов первого рода $\{\mathring{P}_n(\lambda)\}_{n=0}^{\infty}$, которые ортогональны по мере $\mathring{\rho}$ (подробнее см. [1]). Справедливы следующие утверждения.

Лемма 4. *Пусть* $Q(\lambda)$ *– решение уравнения* (10)*. Тогда для любых* $n \in \boldsymbol{Z}_+ \setminus \{0\}$ *справедливо соотношение*

$$Q_n(\lambda) = \frac{1}{b_0} \mathring{P}_{n-1}(\lambda).$$

Лемма 5. *Многочлены* $\{Q_n(\lambda)\}_{n=1}^{\infty}$ *ортонормированы по мере* $b_0^2 \mathring{\rho}$.

Доказательства см., например, [1, глава I, §§1–2].

Таким образом, установлена связь ортогональных многочленов первого и второго рода и найдена мера, по которой ортонормированы многочлены $\{Q_n(\lambda)\}_{n=1}^{\infty}$.

Следующим шагом, как и в [5], построим аналог преобразования Фурье. Именно, мы построим унитарный оператор, сплетающий оператор $\mathcal{H}$ и оператор умножения на λ в $L_2(\mathbf{R}, b_0^2 \mathring{\rho})$. Для этого сначала определим отображение V на стандартном базисе в $\mathring{\ell}_2(\mathbf{Z}_+)$, полагая

$$V : \vec{e}_n \mapsto Q_n(\lambda), \quad n \in \mathbf{Z}_+ \setminus \{0\}.$$

Далее продолжим это отображение по линейности на множество $\mathcal{L}$ всех конечных линейных комбинаций векторов $\vec{e}_n, n \in \mathbf{Z}_+ \setminus \{0\}$.

В силу лемм 4 и 5, построенный оператор $V : \mathcal{L} \to \mathbf{R}[\lambda] \subset L_2(\mathbf{R}, b_0^2 \rho)$ является изометрическим. Продолжим его на замыкание $\mathcal{L}$, то есть на все $\mathring{\ell}_2(\mathbf{Z}_+)$, тогда $V(\mathring{\ell}_2(\mathbf{Z}_+))$ совпадет с замыканием $\mathbf{R}[\lambda]$ в $L_2(\mathbf{R}, b_0^2 \mathring{\rho})$.

В нашем случае (напомним, что $\sigma(\mathcal{H}) \subset [B_1, B_2]$) множество многочленов плотно в $L_2(\mathbf{R}, b_0^2\mathring{\rho})$, а потому замыкание $\mathbf{R}[\lambda]$ совпадает с $L_2(\mathbf{R}, b_0^2\mathring{\rho})$ (см. [1, глава I, §1, глава II, §§2–3]). Таким образом, оператор V является унитарным оператором (или, другими словами, изометрическим изоморфизмом пространств $\mathring{\ell}_2(\mathbf{Z}_+)$ и $L_2(\mathbf{R}, b_0^2\mathring{\rho})$).

Покажем теперь, что V диагонализует $\mathcal{H}$. Справедливо следующее утверждение.

Лемма 6. *Для* $f \in L_2(\boldsymbol{R}, b_0^2\mathring{\rho})$

$$[V\mathcal{H}V^* f](\lambda) = \lambda f(\lambda).$$

Доказательство. Утверждение леммы эквивалентно тому, что для произвольного $g \in \mathring{\ell}_2(\mathbf{Z}_+)$ выполнено $[V\mathcal{H}g](\lambda) = \lambda[Vg](\lambda)$. Ясно, что это соотношение достаточно проверить для $g = \vec{e}_n$ и всех $n \in \mathbf{Z}_+ \setminus \{0\}$. Для $n = 1$ имеем

$$\begin{aligned}[V\mathcal{H}e_1](\lambda) &= V[a_1\vec{e}_1 + b_1\vec{e}_2](\lambda) \\ &= a_1Q_1(\lambda) + b_1Q_2(\lambda) = \lambda Q_1(\lambda) = \lambda[V\vec{e}_1](\lambda).\end{aligned}$$

А при $n \geqslant 2$

$$\begin{aligned}[V\mathcal{H}e_n](\lambda) &= V[b_{n-1}\vec{e}_{n-1} + a_n\vec{e}_n + b_n\vec{e}_{n+1}](\lambda) \\ &= b_{n-1}Q_{n-1}(\lambda) + a_nQ_n(\lambda) + b_nQ_{n+1}(\lambda) = \lambda Q_n(\lambda) \\ &= \lambda[V\vec{e}_n](\lambda). \qquad \square\end{aligned}$$

Из леммы 6 и определения функции от самосопряженного оператора (см., например, [2, глава 6, §§1–3]) вытекает соотношение

$$[Ve^{t\mathcal{H}}V^* f](\lambda) = e^{t\lambda} f(\lambda),$$

то есть оператор $e^{t\mathcal{H}}$ диагонализуется с помощью оператора V и становится оператором умножения на $e^{t\lambda}$.

Определим скалярное произведение для $f, g \in L_2(\mathbf{R}, b_0^2\mathring{\rho})$, полагая

$$(f, g)_{b_0^2\mathring{\rho}} = \int\limits_{\mathbf{R}} f(\lambda)\, g(\lambda)\, b_0^2\, \mathring{\rho}(d\lambda).$$

С помощью леммы 6 можем получить формулу для среднего числа частиц $N_n(t, m)$. Справедливо следующее утверждение.

Теорема 1. *Пусть* $X_n(t)$, $X_n(0) = \delta_n$, $n \in \boldsymbol{Z}_+ \setminus \{0\}$, *— ветвящееся случайное блуждание на* $\boldsymbol{Z}_+$ *с поглощением в нуле, соответствующая ему матрица* H *(и оператор* $\mathcal{H}$*) задаются формулой* (7)*. Тогда* *для среднего числа* $N_n(t,m)$ *частиц в точке* $m \in \boldsymbol{Z}_+ \setminus \{0\}$ *в момент времени* $t \geqslant 0$ *справедливо равенство*

$$N_n(t,m) = \int\limits_{\boldsymbol{R}} e^{t\lambda}\, Q_m(\lambda)\, Q_n(\lambda)\, b_0^2\, \mathring{\rho}(d\lambda).$$

Доказательство. Заметим, что функция $\mathbb{I}_{\{m\}}$ является вектором $\vec{e}_m$ в пространстве $\ell_2(\mathbf{Z}_+)$. Соответственно, в силу (9) имеем

$$\begin{aligned} N_n(t,m) &= \mathbb{E}\mathfrak{I}_{t,n}(\mathbb{I}_{\{m\}}) = [e^{t\mathcal{H}}\mathbb{I}_{\{m\}}](n) = \big[V^*\big(e^{t\lambda}Q_m(\lambda)\big)\big](n) \\ &= \big(e^{t\lambda}Q_m(\lambda), Q_n(\lambda)\big)_{b_0^2\mathring{\rho}} = \int\limits_{\mathbf{R}} e^{t\lambda}\, Q_m(\lambda)\, Q_n(\lambda)\, b_0^2\, \mathring{\rho}(d\lambda). \qquad \square \end{aligned}$$

Используя лемму 4, можем переформулировать утверждение теоремы 1 с помощью многочленов первого рода для укороченной матрицы.

Следствие 1. *Пусть* $X_n(t)$, $X_n(0) = \delta_n$, $n \in \boldsymbol{Z}_+ \setminus \{0\}$, *– ветвящееся случайное блуждание на* $\boldsymbol{Z}_+$ *с поглощением в нуле, соответствующая ему матрица* H *(и оператор* $\mathcal{H}$*) задаются формулой* (7)*. Тогда для среднего числа* $N_n(t,m)$ *частиц в точке* $m \in \boldsymbol{Z}_+ \setminus \{0\}$ *в момент времени* $t \geqslant 0$ *справедливо равенство*

$$N_n(t,m) = \int\limits_{\boldsymbol{R}} e^{t\lambda}\, \mathring{P}_{m-1}(\lambda)\, \mathring{P}_{n-1}(\lambda)\, \mathring{\rho}(d\lambda).$$

Из последней формулы следует, что величина $N_n(t,m)$ не зависит от b_0. Этот эффект можно объяснить следующим образом. Рассмотрим представление (8) для матрицы нашей модели ветвящегося случайного блуждания. С одной стороны, b_0 отвечает за вероятность перехода из единицы в нуль, с другой стороны, b_0 влияет на интенсивность ветвления в единице. Получается, увеличивая b_0, мы увеличиваем вероятность перехода в поглощающее состояние, но, вместе с тем, увеличивается и интенсивность появления новых частиц в единице. Следствие 1 показывает, что эти величины соизмеримы и параметр b_0 не влияет на среднее число частиц в точках.

§4. Примеры

4.1. Многочлены Чебышева II рода. Рассмотрим оператор $\mathcal{H}$, который в стандартном базисе $\ell_2(\mathbf{Z}_+)$ задается матрицей

$$H = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 2b_0 & 0 & 1 & 0 & \dots \\ 0 & 1 & 0 & 1 & \dots \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 2b_0 & -(2b_0+1) & 1 & 0 & \dots \\ 0 & 1 & -2 & 1 & \dots \\ 0 & 0 & 1 & -2 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & \frac{2b_0+1}{2} & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}, \tag{13}$$

где b_0 есть произвольная положительная постоянная.

Заметим, что правая часть (13) соответствует представлению (8) матрицы H в виде суммы матриц, где первая из них отвечает за блуждание, а вторая – за ветвление.

Для данной модели из теоремы 1 вытекает следующее утверждение.

Теорема 2. *Пусть $X_n(t)$, $X_n(0) = \delta_n$, $n \in \boldsymbol{Z}_+ \setminus \{0\}$, – ветвящееся случайное блуждание на $\boldsymbol{Z}_+$ с поглощением в нуле, соответствующая ему матрица H (и оператор $\mathcal{H}$) задаются формулой* (13)*. Тогда для среднего числа частиц $N_n(t,m)$ в точке $m \in \boldsymbol{Z}_+ \setminus \{0\}$ в момент времени $t \geqslant 0$ справедливо равенство*

$$N_n(t,m) = I_{m-n}(t) - I_{m+n}(t),$$

где

$$I_n(t) = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi e^{t\cos\theta}\cos n\theta\, d\theta, \quad n \in \boldsymbol{Z}, \tag{14}$$

– функция Инфельда (*модифицированная функция Бесселя* I *рода*)*.*

Доказательство. Укороченная матрица для матрицы (13) имеет вид

$$\mathring{H} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \dots \\ 1 & 0 & 1 & 0 & \dots \\ 0 & 1 & 0 & 1 & \dots \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}. \tag{15}$$

На основании результатов работы [5, теорема 2] известно, что ортогональные многочлены, соответствующие данной матрице, суть многочлены Чебышева II рода

$$\mathring{P}_n(\lambda) = \frac{\sin{(n+1)\arccos\lambda}}{\sqrt{1-\lambda^2}},$$

которые ортонормированы по мере

$$\rho(d\lambda) = \frac{2}{\pi}\mathbb{I}_{[-1,1]}(\lambda)\sqrt{1-\lambda^2}\,d\lambda.$$

Используя следствие 1 и [5, теорему 2], получаем

$$N_n(t,m) = \int\limits_{\mathbf{R}} e^{t\lambda}\,\mathring{P}_{m-1}(\lambda)\,\mathring{P}_{n-1}(\lambda)\,\mathring{\rho}(d\lambda) = I_{m-n}(t) - I_{m+n}(t). \qquad \square$$

Следствие 2. *Пусть $X_n(t)$, $X_n(0) = \delta_n$, $n \in \boldsymbol{Z}_+ \setminus \{0\}$, — ветвящееся случайное блуждание на $\boldsymbol{Z}_+$ с поглощением в нуле, удовлетворяющий условиям теоремы 2. Тогда для среднего числа частиц $N_n(t,m)$ в точке $m \in \boldsymbol{Z}_+ \setminus \{0\}$ справедливо асимптотическое равенство при $t \to \infty$*

$$N_n(t,m) = \frac{2mne^t}{t\sqrt{2\pi t}}\left(1 + O\left(\frac{1}{t}\right)\right).$$

Доказательство. Воспользуемся асимптотикой для функции Инфельда из [5]

$$I_n(t) = \frac{e^t}{\sqrt{2\pi t}}\left[\sum_{j=0}^{k-1}\frac{(-1)^j(n,j)}{(2t)^j} + O\left(\frac{1}{t^k}\right)\right] \quad \text{при } t \to \infty, \tag{16}$$

где символ Ганкеля (n,j) определяется формулой

$$(n,j) = \frac{(4n^2-1^2)(4n^2-3^2)\dots(4n^2-(2j-1)^2)}{2^{2j}j!}.$$

Тогда главный член для $N_n(t,m)$ имеет вид

$$N_n(t,m) = I_{n-m} - I_{n+m} = \frac{2mne^t}{t\sqrt{2\pi t}}\left(1 + O\left(\frac{1}{t}\right)\right). \qquad \square$$

Используя (16), можно найти и следующие члены асимптотического разложения.

Далее положим

$$H_1 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 2b_0 & 0 & 1 & 0 & \dots \\ 0 & 1 & 0 & 1 & \dots \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}, \quad \mathring{H}_1 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \dots \\ 1 & 0 & 1 & 0 & \dots \\ 0 & 1 & 0 & 1 & \dots \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}. \tag{17}$$

Введем еще матрицу, отвечающую ветвлящемуся случайному блужданию с отражением в нуле

$$H_2 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \dots \\ 1 & 0 & 1 & 0 & \dots \\ 0 & 1 & 0 & 1 & \dots \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}. \tag{18}$$

Мы можем сравнить эти две модели, рассмотрев случай, когда в начальный момент частица находится в некоторой точке $n \in \mathbf{Z}_+ \setminus \{0\}$ и начинает блуждать с отражением в нуле (соответствует матрице H_2, исследован в [5]), и случай, когда в начальный момент времени частица находится $n \in \mathbf{Z}_+ \setminus \{0\}$ и начинает блуждать с поглощением в нуле (соответствует матрице H_1, исследован в теореме 2 и следствии 2 настоящей работы). Нас будет интересовать отношение среднего числа частиц в данных моделях при больших временах. Справедливо следующее утверждение.

Следствие 3. *Пусть $X_n(t)$, $X_n(0) = \delta_n$, $n \in \boldsymbol{Z}_+ \setminus \{0\}$, – ветвящееся случайное блуждание на $\boldsymbol{Z}_+$ с поглощением в нуле, соответствующая ему матрица H_1 (и оператор $\mathcal{H}_1$) задаются формулой* (17). *Для процесса $X_n(t)$ через $N_n^X(t,m)$ обозначим среднее число частиц в точке $m \in \boldsymbol{Z}_+ \setminus \{0\}$ в момент времени $t \geqslant 0$. Пусть $Y_n(t)$, $Y_n(0) = \delta_n$, $n \in \boldsymbol{Z}_+ \setminus \{0\}$, – ветвящееся случайное блуждание на $\boldsymbol{Z}_+$ с отражением в нуле, соответствующая ему матрица H_2 (и оператор $\mathcal{H}_2$) задаются формулой* (18). *Для процесса $Y_n(t)$ через $N_n^Y(t,m)$ обозначим среднее число частиц в точке $m \in \boldsymbol{Z}_+ \setminus \{0\}$ в момент времени $t \geqslant 0$. Тогда спрведливо следующее равенство*

$$\lim_{t\to+\infty} \frac{N_n^X(t,m)}{N_n^Y(t,m)} = \frac{mn}{(m+1)(n+1)}.$$

Доказательство. Воспользуемся следствием 2 и асимптотическим равенством для $N_n^Y(t,m)$ из [5]

$$\lim_{t\to+\infty}\frac{N_n^X(t,m)}{N_n^Y(t,m)}=\lim_{t\to+\infty}\frac{\frac{2mne^t}{t\sqrt{2\pi t}}\left(1+O\left(\frac{1}{t}\right)\right)}{\frac{2(m+1)(n+1)e^t}{t\sqrt{2\pi t}}\left(1+O\left(\frac{1}{t}\right)\right)}=\frac{mn}{(m+1)(n+1)}. \qquad \square$$

4.2. Многочлены Чебышева I рода. Рассмотрим теперь оператор $\mathcal{H}$, который в стандартном базисе $\ell_2(\mathbf{Z}_+)$ задается матрицей

$$H=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}0&0&0&0&\dots\\2b_0&0&\sqrt{2}&0&\dots\\0&\sqrt{2}&0&1&\dots\\0&0&1&0&\dots\\\dots&\dots&\dots&\dots&\dots\end{pmatrix}$$

$$=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}0&0&0&0&\dots\\2b_0&-(2b_0+\sqrt{2})&\sqrt{2}&0&\dots\\0&1&-2&1&\dots\\0&0&1&-2&\dots\\\dots&\dots&\dots&\dots&\dots\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0&0&0&0&\dots\\0&\frac{2b_0+\sqrt{2}}{2}&0&0&\dots\\0&0&1&0&\dots\\0&0&0&1&\dots\\\dots&\dots&\dots&\dots&\dots\end{pmatrix}, \tag{19}$$

где b_0 есть произвольная положительная постоянная.

Заметим, что правая часть (19) соответствует представлению (8) матрицы H в виде суммы матриц, где первая из них отвечает за блуждание, а вторая – за ветвление.

Для данной модели из теоремы 1 вытекает следующее утверждение.

Теорема 3. *Пусть $X_n(t)$, $X_n(0)=\delta_n$, $n\in\boldsymbol{Z}_+\setminus\{0\}$, – ветвящееся случайное блуждание на $\boldsymbol{Z}_+$ с поглощением в нуле, соответствующая ему матрица H (и оператор $\mathcal{H}$) задаются формулой (19). Тогда для среднего числа частиц $N_n(t,m)$ в точке $m\in\boldsymbol{Z}_+\setminus\{0\}$ в момент времени $t\geqslant 0$ справедливо равенство*

$$N_n(t,m)=\begin{cases}I_0(t), & n=m=1;\\ \sqrt{2}\,I_{m-1}(t), & n=1,\ m>1;\\ \sqrt{2}\,I_{n-1}(t), & n>1,\ m=1;\\ I_{m-n}(t)+I_{m+n-2}(t), & n,m>1,\end{cases}$$

где функция Инфельда $I_n(t)$ определяется формулой (16).

Доказательство. Укороченная матрица для матрицы (19) имеет вид

$$\mathring{H} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & \sqrt{2} & 0 & 0 & \dots \\ \sqrt{2} & 0 & 1 & 0 & \dots \\ 0 & 1 & 0 & 1 & \dots \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}. \tag{20}$$

На основании результатов работы [5, теорема 2] известно, что ортогональные многочлены, соответствующие данной матрице, суть многочлены Чебышева I рода

$$P_0(\lambda) = 1, \quad P_n(\lambda) = \sqrt{2}\cos(n \arccos \lambda), \quad n = 1, 2, \dots,$$

которые ортонормированы по мере

$$\rho(d\lambda) = \frac{1}{\pi}\mathbb{I}_{[-1,1]}(\lambda)\,\frac{d\lambda}{\sqrt{1-\lambda^2}}.$$

Используя следствие 1 и [5, теорему 2], получаем

$$N_n(t,m) = \int\limits_{\mathbf{R}} e^{t\lambda}\,\mathring{P}_{m-1}(\lambda)\,\mathring{P}_{n-1}(\lambda)\,\mathring{\rho}(d\lambda)$$

$$= \begin{cases} I_0(t), & n = m = 1; \\ \sqrt{2}\,I_{m-1}(t), & n = 1,\ m > 1; \\ \sqrt{2}\,I_{n-1}(t), & n > 1,\ m = 1; \\ I_{m-n}(t) + I_{m+n-2}(t), & n, m > 1. \end{cases}$$

□

Следствие 4. *Пусть $X_n(t)$, $X_n(0) = \delta_n$, $n \in \boldsymbol{Z}_+ \setminus \{0\}$, – ветвящееся случайное блуждание на $\boldsymbol{Z}_+$ с поглощением в нуле, удовлетворяющее условиям теоремы 2. Тогда для среднего числа частиц $N_n(t,m)$ в точке $m \in \boldsymbol{Z}_+ \setminus \{0\}$ справедливо асимптотическое равенство при $t \to \infty$*

$$N_n(t,m) = \begin{cases} \dfrac{e^t}{\sqrt{2\pi t}}\left(1 + \dfrac{1}{8t} + O\left(\dfrac{1}{t^2}\right)\right), & n = m = 1; \\ \dfrac{\sqrt{2}e^t}{\sqrt{2\pi t}}\left(1 - \dfrac{4(m-1)^2-1}{8t} + O\left(\dfrac{1}{t^2}\right)\right), & n = 1, m > 1; \\ \dfrac{\sqrt{2}e^t}{\sqrt{2\pi t}}\left(1 - \dfrac{4(n-1)^2-1}{8t} + O\left(\dfrac{1}{t^2}\right)\right), & n > 1, m = 1; \\ \dfrac{2e^t}{\sqrt{2\pi t}}\left(1 - \dfrac{4(m-1)^2+4(n-1)^2-1}{8t} + O\left(\dfrac{1}{t^2}\right)\right), & n, m > 1. \end{cases}$$

Доказательство. Применяя к результату теоремы 3 асимптотическое равенство (16) для функции Инфельда, получаем утверждение следствия. □

Используя (16), можно найти и следующие члены асимптотического разложения.

Далее положим

$$H_1 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 2b_0 & 0 & \sqrt{2} & 0 & \dots \\ 0 & \sqrt{2} & 0 & 1 & \dots \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}, \quad \overset{\circ}{H}_1 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & \sqrt{2} & 0 & 0 & \dots \\ \sqrt{2} & 0 & 1 & 0 & \dots \\ 0 & 1 & 0 & 1 & \dots \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}. \tag{21}$$

Введем еще матрицу, отвечающую ветвлящемуся случайному блужданию с отражением в нуле

$$H_2 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & \sqrt{2} & 0 & 0 & \dots \\ \sqrt{2} & 0 & 1 & 0 & \dots \\ 0 & 1 & 0 & 1 & \dots \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}. \tag{22}$$

Мы можем сравнить эти две модели, рассмотрев случай, когда в начальный момент частица находится в некоторой точке $n \in \mathbf{Z}_+ \setminus \{0\}$ и начинает блуждать с отражением в нуле (соответствует матрице H_2, исследован в [5]), и случай, когда в начальный момент частица находится в $n \in \mathbf{Z}_+ \setminus \{0\}$ и начинает блуждать с поглощением в нуле (соответствует матрице H_1, исследован в теореме 3 и следствии 4 данной работы). Нас будет интересовать отношение среднего числа частиц в данных моделях при больших временах. Справедливо следующее утверждение.

Следствие 5. *Пусть $X_n(t)$, $X_n(0) = \delta_n$, $n \in \boldsymbol{Z}_+ \setminus \{0\}$, – ветвящееся случайное блуждание на $\boldsymbol{Z}_+$ с поглощением в нуле, соответствующая ему матрица H_1 (и оператор $\mathcal{H}_1$) задаются формулой (21). Для процесса $X_n(t)$ через $N_n^X(t,m)$ обозначим среднее число частиц в точке $m \in \boldsymbol{Z}_+ \setminus \{0\}$ в момент времени $t \geqslant 0$. Пусть $Y_n(t)$, $Y_n(0) = \delta_n$, $n \in \boldsymbol{Z}_+ \setminus \{0\}$, – ветвящееся случайное блуждание на $\boldsymbol{Z}_+$ с отражением в нуле, соответствующая ему матрица H_2 (и оператор $\mathcal{H}_2$)*

задаются формулой (22). *Для процесса* $Y_n(t)$ *через* $N_n^Y(t,m)$ *обозначим среднее число частиц в точке* $m \in \boldsymbol{Z}_+ \setminus \{0\}$ *в момент времени* $t \geqslant 0$. *Тогда спрведливо следующее равенство*

$$\lim_{t\to+\infty} \frac{N_n^X(t,m)}{N_n^Y(t,m)} = \begin{cases} \frac{1}{2}, & n=m=1; \\ \frac{1}{\sqrt{2}}, & n=1, m>1; \\ \frac{1}{\sqrt{2}}, & n>1, m=1; \\ 1, & n,m>1. \end{cases}.$$

Доказательство. Воспользуемся следствием 4 и асимптотическим равенством для $N_n^Y(t,m)$ из [5]. □

4.3. Многочлены Лежандра. Наконец, рассмотрим оператор $\mathcal{H}$, который в стандартном базисе в $\ell_2(\mathbf{Z}_+)$ задается матрицей

$$H = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ b_0 & 0 & \dfrac{1}{\sqrt{1\cdot 3}} & 0 & 0 & \dots \\ 0 & \dfrac{1}{\sqrt{1\cdot 3}} & 0 & \dfrac{2}{\sqrt{3\cdot 5}} & 0 & \dots \\ 0 & 0 & \dfrac{2}{\sqrt{3\cdot 5}} & 0 & \dfrac{3}{\sqrt{5\cdot 7}} & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dfrac{3}{\sqrt{5\cdot 7}} & 0 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}, \tag{23}$$

где b_0 есть произвольная положительная постоянная.

Заметим, что правая часть (23) соответствует представлению (8) матрицы H в виде суммы матриц, где первая из них отвечает за блуждание, а вторая — за ветвление.

Для данной модели из теоремы 1 вытекает следующее утверждение.

Теорема 4. *Пусть* $X_n(t)$, $X_n(0) = \delta_n$, $n \in \boldsymbol{Z}_+ \setminus \{0\}$, *– ветвящееся случайное блуждание на* $\boldsymbol{Z}_+$ *с поглощением в нуле, соответствующая ему матрица* H (*и оператор* $\mathcal{H}$) *задаются формулой* (23). *Тогда для среднего числа частиц* $N_n(t,m)$ *в точке* $m \in \boldsymbol{Z}_+ \setminus \{0\}$ *в момент* *времени* $t \geqslant 0$ *справедливо равенство*

$$N_n(t,m) = \frac{1}{2}\int\limits_{-1}^{1} e^{t\lambda}\, P_{m-1}(\lambda)\, P_{n-1}(\lambda)\, d\lambda$$

$$= \frac{\sqrt{2m-1}\,\sqrt{2n-1}}{2\,(2m-2)!!\,(2n-2)!!}\int\limits_{-1}^{1} e^{t\lambda}\,\frac{d^{m-1}}{d\lambda^{m-1}}(\lambda^2-1)^{m-1}\,\frac{d^{n-1}}{d\lambda^{n-1}}(\lambda^2-1)^{n-1}\,d\lambda,$$

где $P_n(\lambda)$ – *многочлены Лежандра*

$$P_n(\lambda) = \frac{\sqrt{2n+1}}{(2n)!!}\,\frac{d^n}{d\lambda^n}(\lambda^2-1)^n, \quad n \in \boldsymbol{Z}_+. \tag{24}$$

Доказательство. Укороченная матрица для матрицы (23) имеет вид

$$\mathring{H} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{\sqrt{1\cdot 3}} & 0 & 0 & \dots \\ \frac{1}{\sqrt{1\cdot 3}} & 0 & \frac{2}{\sqrt{3\cdot 5}} & 0 & \dots \\ 0 & \frac{2}{\sqrt{3\cdot 5}} & 0 & \frac{3}{\sqrt{5\cdot 7}} & \dots \\ 0 & 0 & \frac{3}{\sqrt{5\cdot 7}} & 0 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}. \tag{25}$$

На основании результатов работы [5, теорема 3] известно, что ортогональные многочлены, соответствующие данной матрице, суть многочлены Лежандра (25), которые ортонормированы по мере

$$\rho(d\lambda) = \frac{1}{2}\mathbb{I}_{[-1,1]}(\lambda)\,d\lambda.$$

Используя следствие 1 и [5, теорему 3], получаем

$$N_n(t,m) =$$

$$\frac{\sqrt{2m-1}\sqrt{2n-1}}{2(2m-2)!!(2n-2)!!}\int\limits_{-1}^{1} e^{t\lambda}\,\frac{d^{m-1}}{d\lambda^{m-1}}(\lambda^2-1)^{m-1}\,\frac{d^{n-1}}{d\lambda^{n-1}}(\lambda^2-1)^{n-1}\,d\lambda. \quad \square$$

Следствие 7. *Пусть* $X_n(t)$, $X_n(0)=\delta_n$, $n \in \boldsymbol{Z}_+ \setminus \{0\}$, – *ветвящееся случайное блуждание на* $\boldsymbol{Z}_+$ *с поглощением в нуле, удовлетворяющее условиям теоремы* 2. *Тогда для среднего числа частиц* $N_n(t,m)$

в точке $m \in \boldsymbol{Z}_+ \setminus \{0\}$ *справедливо асимптотическое равенство при* $t \to \infty$

$$N_n(t, m) = \frac{e^t\sqrt{2m-1}\sqrt{2n-1}}{2t}\left(1 + O\left(\frac{1}{t}\right)\right).$$

Доказательство. Применяя к результату теоремы 4 результаты работы [5, следствие 3], получаем утверждение следствия. □

Аналогичным образом можно провести асимптотическое сравнение моделей с поглощением и отражением в нуле.

Список литературы

1. Н. И. Ахиезер, *Классическая проблема моментов и некоторые вопросы анализа, связанные с нею.* М., Государственное издательство физико-математической литературы,1961.
2. М. Ш. Бирман, М. З. Соломяк, *Спектральная теория самосопряженных операторов в гильбертовом пространстве.* Учеб. пособие., Л., 1980.
3. И. И. Гихман, А. В. Скороход, *Введение в теорию случайных процессов.* М., Наука, 1977.
4. И. И. Гихман, А. В. Скороход, *Теория случайных процессов,* II. М., Наука, 1973.
5. А. В. Люлинцев, *Непрерывные ветвящиеся марковские процессы на* $\mathbf{Z}_+$: *подход с использованием ортогональных многочленов.* — Теория вероятн. и ее примен., в печати.
6. Н. В. Смородина, Е. Б. Яровая, *Мартингальный метод исследования ветвящихся случайных блужданий.* — Успехи матем. наук. **77**, No. 5(467) (2022), 193–194.
7. Е. Б. Яровая, *Ветвящиеся случайные блуждания в неоднородной среде.* М., Издательство Центра прикладных исследований при механико-математическом факультете МГУ, 2007.

Lyulintsev A. V. Markov branching random walks on $\mathbf{Z}_+$ with absorption at zero.

We consider a homogeneous Markov process with continuous time on $\mathbf{Z}_+ = \{0, 1, 2, \dots\}$, which we interpret as the motion of a particle. A particle can only move to neighboring points $\mathbf{Z}_+$, that is, each time the particle's position changes, its coordinate changes by one. The process is equipped with a branching mechanism. Branch sources can be located at each point of $\mathbf{Z}_+$. At the moment of branching, new particles appear at the branch point and then begin to evolve independently of each other (and of other particles) according to the same laws as the initial particle.

Point zero on the lattice $\mathbf{Z}_+$ is an absorbing state, that is, a particle with a non-zero probability can go to zero, but it instantly dies there. Such a branching random walk is associated with the Jacobian matrix. In terms of orthogonal polynomials of the second kind corresponding to the matrix, formulas are obtained for the average number of particles at an arbitrary fixed point of $\mathbf{Z}_+\setminus\{0\}$ at time $t > 0$. The results are applied to some specific models, an exact value for the average number of particles is obtained in terms of special functions, and its asymptotic behavior is found at large times.

Санкт-Петербургское отделение
Математического института им. В. А. Стеклова
Фонтанка 27
Санкт-Петербург 191023, Россия
E-mail: lav_100k@mail.ru, lav_100k@mail.ru

Поступило 6 сентября 2023 г.