Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 526, 2023 г.

И. И. Лукашова

ПЕРИОДИЧЕСКИЕ ВЕТВЯЩИЕСЯ СЛУЧАЙНЫЕ БЛУЖДАНИЯ НА $\mathbf{Z}^d$ С ИММИГРАЦИЕЙ

§1. Введение

В настоящей работе рассматривается ветвящееся случайное блуждание (ВСБ) на решетке $\mathbf{Z}^d$ с иммиграцией и источниками ветвления, расположенными периодически. Опишем нашу модель подробнее.

1.1. Описание модели. Напомним, как определяется ветвящийся процесс с иммиграцией (подробнее см. [1]). Процессами с иммиграцией называются ветвящиеся процессы, в которых кроме размножения и превращения частиц происходит постоянный приток частиц извне, управляемый случайным механизмом, не зависящим от имеющихся в системе частиц. Пусть в системе имеются частицы только одного типа. Каждая частица независимо от других и независимо от своего возраста за время $h \to 0$ может разделиться на k частиц с вероятностью

$$p(h,k) = \delta_{k1} + b_k h + o(h),$$

где δ_{kj} – символ Кронекера. Описанный процесс является марковским и носит название ветвящегося процесса с непрерывным временем. Кроме того, независимо от состояния системы, с вероятностью

$$q(h,k) = \delta_{k0} + c_k h + o(h)$$

за время $h \to 0$ возникает k частиц извне. Эти новые частицы в дальнейшем эволюционируют по законам описанного выше ветвящегося марковского процесса с непрерывным временем.

Мы предполагаем, что коэффициенты $\{b_k\}_{k=0}^{\infty}$ и $\{c_k\}_{k=0}^{\infty}$ удовлетворяют условиям:

(i) $b_1 \leqslant 0, \quad b_k \geqslant 0$ для $k \neq 1, \quad \sum\limits_{k=0}^{\infty} b_k = 0,$

Ключевые слова: ветвящееся случайное блуждание, прямой интеграл операторов, периодическое возмущение.

Данная работа была поддержана Санкт-Петербургским международным математическим Институтом имени Леонарда Эйлера, грантовое соглашение N 075-15-2022-289 от 06.04.2022.

(i′) $c_0 \leqslant 0, \quad c_k \geqslant 0$ для $k \neq 0, \quad \sum\limits_{k=0}^{\infty} c_k = 0.$

Определим интенсивность ветвления β источника и интенсивность иммиграции α в источнике, полагая

(ii) $\beta = \sum\limits_{k=0}^{\infty} k b_k < \infty,$

(ii′) $\alpha = \sum\limits_{k=0}^{\infty} k c_k < \infty.$

Ветвящийся процесс с иммиграцией можно рассматривать как частный случай ветвящегося процесса с двумя типами частиц. Для этого, кроме изучаемых частиц, которые мы будем называть частицами типа T_1, удобно ввести еще одну фиктивную частицу типа T_0 (см. [17]). Зададим вероятности превращений частиц за малое время $h \to 0$ следующим образом:

$$\begin{gathered}
\mathbf{P}(T_0 \to T_0) = 1 + c_0 h + o(h);\\
\mathbf{P}(T_0 \to T_0 + kT_1) = c_k h + o(h), \quad k \neq 0;\\
\mathbf{P}(T_1 \to T_1) = 1 + b_1 h + o(h);\\
\mathbf{P}(T_1 \to kT_1) = b_k h + o(h), \quad k \neq 1.
\end{gathered}$$

Тогда иммиграцию можно представить происходящей за счет размножения фиктивной частицы T_0, которая, производя новые частицы типа T_1, сама не исчезает и не размножается. В построенном ветвящемся процессе типы T_0 и T_1 составляют классы сообщающихся типов, $\{T_0\}$ – незамкнутый класс, $\{T_1\}$ – замкнутый класс.

Пусть в начальный момент времени $t = 0$ в системе имеется одна частица типа T_0. Через $m(t)$ обозначим среднее число реальных частиц в системе в момент времени $t \geqslant 0$. В работе [17] доказано следующее утверждение.

Теорема 1. *Справедливо соотношение*

$$m(t) = \begin{cases} \frac{\alpha}{\beta}(e^{\beta t} - 1), & \text{если } \beta \neq 0;\\ \alpha t, & \text{если } \beta = 0. \end{cases}$$

В настоящей работе мы добавим к ветвящемуся процессу с иммиграцией механизм блуждания на решетке $\mathbf{Z}^d$, при этом параметры ветвления и иммиграции будут зависеть от точки решетки.

Итак, теперь опишем ВСБ с иммиграцией. Пусть имеются частицы одного типа. Каждая существующая в данный момент в некоторой точке $w \in \mathbf{Z}^d$ частица за время $h \to 0$ независимо от своего происхождения и возраста и независимо от других частиц может иметь следующую судьбу: частица может или переместиться в пространстве в некоторую точку $u \in \mathbf{Z}^d$ с вероятностью

$$a_1(w,u)h + o(h),$$

или погибнуть и произвести $k \neq 1$ новых частиц, расположенных в точке w, с вероятностью

$$b_k(w)h + o(h),$$

или сохраниться (то есть никаких изменений с частицей не произойдет) с вероятностью

$$1 - \sum_{u \neq w} a_1(w,u)h - \sum_{k \neq 1} b_k(w)h + o(h).$$

Через $A_1 = \{a_1(v,u)\}_{v,u \in \mathbf{Z}^d}$ обозначим матрицу переходных интенсивностей. Предположим, что элементы матрицы A_1 удовлетворяют следующим условиям:

(1) $a_1(v,u) \geqslant 0, \quad v \neq u$;
(2) $a_1(v,v) \leqslant 0$;
(3) $\sum\limits_{u \in \mathbf{Z}^d} a_1(v,u) = 0$ для любого $v \in \mathbf{Z}^d$;
(4) для любых $v, u \in \mathbf{Z}^d$ существует путь $v = u_0, u_1, \ldots, u_n = u$, такой что $a_1(u_i, u_{i+1}) > 0$ при всех $i = 0, \ldots, n-1$ (неприводимость).

Кроме того, независимо от имеющихся в системе частиц, в некоторой точке $v \in \mathbf{Z}^d$ (назовем эту точку центром иммиграции) с вероятностью

$$\delta_{k0} + c_k(v)h + o(h)$$

за время $h \to 0$ возникают k новых частиц. Блуждание центра иммиграции задается с помощью матрицы переходных интенсивностей $A_0 = \{a_0(v,u)\}_{v,u \in \mathbf{Z}^d}$, элементы которой удовлетворяют тем же свойствам, что и элементы матрицы A_1.

Также предположим, что коэффициенты $\{b_k(v)\}_{k=0}^{\infty}$ и $\{c_k(v)\}_{k=0}^{\infty}$ удовлетворяют свойствам (i), (ii) и (i'), (ii') соответственно при каждом фиксированном v.

Далее мы будем рассматривать блуждание, ветвление и иммиграцию, параметры которых являются периодическими относительно некоторой решетки. Для этого нам потребуется ввести дополнительную структуру на $\mathbf{Z}^d$.

Пусть $\{g_k\}_{k=1}^d$ – набор линейно независимых векторов в $\mathbf{Z}^d$. Будем называть решеткой множество вида:

$$\Gamma = \{g \in \mathbf{Z}^d : \, g = \sum_{i=1}^{d} n_i g_i, \, n_i \in \mathbf{Z}\}.$$

Введем отношение эквивалентности на $\mathbf{Z}^d$: вершины $u, v \in \mathbf{Z}^d$ эквивалентны, если $u - v \in \Gamma$. Фактор-пространство $\Omega = \mathbf{Z}^d/\Gamma$ будем называть множеством фундаментальных вершин, так как его можно отождествить с множеством попарно неэквивалентных элементов $\{v_1, \ldots, v_p\}$. Отметим, что

$$p = \operatorname{card} \Omega < \infty, \tag{1}$$

и любой элемент $u \in \mathbf{Z}^d$ единственным образом представим в виде суммы:

$$u = \omega_u + \gamma_u,$$

где $\omega_u \in \Omega$, а $\gamma_u \in \Gamma$.

Потребуем дополнительно, чтобы элементы матрицы A_0 и A_1 удовлетворяли следующим условиям:

(5) $a_1(v, u) = a_1(u, v) = a_1(u + g, v + g)$ при любом $g \in \Gamma$;
(6) $\sum\limits_{g \in \Gamma} ||g||^2 |a_1(v, u + g)| < \infty$, где $\| \cdot \|$ – евклидова норма в $\mathbf{R}^d$;
(5′) $a_0(v, u) = a_0(u, v) = a_0(u + g, v + g)$ при любом $g \in \Gamma$;
(6′) $\sum\limits_{g \in \Gamma} ||g||^2 |a_0(v, u + g)| < \infty$.

Условия (5, 5′) являются условиями периодичности блуждания и означают инвариантность коэффициентов матриц A_0 и A_1 относительно сдвига на любой элемент из множества Γ. Условия (6, 6′) обеспечивают конечность дисперсии скачков случайных блужданий.

Нас будет интересовать поведение среднего числа частиц в системе при $t \to \infty$ при условии, что в начальный момент времени $t = 0$ в системе нет частиц.

Как и для ветвящегося процесса с иммиграцией, данная модель является частным случаем ветвящегося случайного блуждания с двумя типами частиц. Для этого, кроме изучаемых частиц, которые мы будем называть частицами типа T_1, снова введем одну фиктивную частицу типа T_0.

Блуждание частиц типа T_i, $i = 0, 1$, зададим с помощью матрицы переходных вероятностей $A_i = \{a_i(v,u)\}_{v,u\in\mathbf{Z}^d}$. Вероятность превращения частиц в некоторой точке w за время $h \to 0$ зададим следующим образом:

$$\mathbf{P}_w(T_0 \to T_0) = 1 + c_0(w)h + o(h);$$
$$\mathbf{P}_w(T_0 \to T_0 + kT_1) = c_k(w)h + o(h), \quad k \neq 0;$$
$$\mathbf{P}_w(T_1 \to T_1) = 1 + b_1(w)h + o(h);$$
$$\mathbf{P}_w(T_1 \to kT_1) = b_k(w)h + o(h), \quad k \neq 1.$$

Таким образом, любая частица типа T_1, находящаяся в точке v в момент времени t, за малое время h может или перейти в точку u с вероятностью $p(h,v,u) = a_1(v,u)h + o(h)$, или погибнуть и произвести $k \neq 1$ потомков типа T_1 с вероятностью $p_k(h,v) = b_k(v)h + o(h)$, или сохраниться (остаться собой без делений и перемещений по решетке) с вероятностью

$$1 - \sum_{v\neq u} a_1(v,u)h - \sum_{k\neq 1} b_k(v)h + o(h).$$

Частица типа T_0, находящаяся в точке v в момент времени t, за малое время h с вероятностью $\widetilde{p}(h,v,u) = a_0(v,u)h + o(h)$ может перейти в точку u, или с вероятностью $q_k(h,v) = c_k(v)h + o(h)$ произвести $k \neq 0$ частиц типа T_1 и при этом остаться живой, или с вероятностью

$$1 - \sum_{v\neq u} a_0(v,u)h - \sum_{k\neq 0} c_k(v)h + o(h)$$

остаться сама собой в точке v.

Обозначим через $m_c(t,v,u)$, где $c \in \{0,1\}$, среднее число частиц типа T_1 в точке u в момент времени t при условии, что в начальный момент времени была одна частица типа T_c в точке v. Таким образом, задача о поведении среднего числа частиц для ветвящегося случайного блуждания с иммиграцией эквивалентна исследованию асимптотического поведения $m_0(t,v,u)$ при $t \to \infty$.

1.2. Основные результаты. Для исследования асимптотического поведения $m_0(t,v,u)$ при $t \to \infty$ мы используем методы спектральной теории операторов. Ниже будет показано, что данная задача сводится к исследованию спектра оператора

$$\widehat{\mathcal{A}} = \begin{pmatrix} A_0 & 0 \\ 0 & A_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & Q_0 \\ 0 & Q_1 \end{pmatrix}, \qquad (2)$$

где первое слагаемое является самосопряженным оператором, который отвечает за случайные блуждания, а второе – его возмущением, отвечающим за ветвление и иммиграцию. Также будет показано, что асимптотическое поведение $m_0(t,v,u)$ определяется структурой правого края спектра данного оператора.

Оператор (2) является ограниченным периодическим оператором, действующим из $(l_2(\mathbf{Z}^d))^2$ в $(l_2(\mathbf{Z}^d))^2$, а потому для изучения его спектра будем пользоваться теорией разложения оператора в прямой интеграл. Разложение в прямой интеграл является естественным обобщением дискретного преобразования Фурье (см. [16]). Ниже мы покажем, что оператор (2) унитарно эквивалентен оператору умножения на матрицу $\widehat{A}(\theta)$ размером $2p \times 2p$, где p определено (1), а параметр θ принадлежит $\widetilde{\Omega}$ (см. формулу (7)). Также мы покажем, что верхняя граница спектра $\max \sigma(\widehat{\mathcal{A}})$ оператора (2) совпадает со старшим собственным значением матрицы $\widehat{A}(0)$.

Как и для ветвящегося процесса с иммиграцией, классификация ветвящегося случайного блуждания с иммиграцией определяется только параметрами ветвления. В зависимости от значения величины $\max \sigma(A_1 + Q_1)$ (верхняя граница спектра оператора $A_1 + Q_1$) введем следующую классификацию: будем говорить, что если $\max \sigma(A_1 + Q_1) > 0$, то процесс является надкритическим; если $\max \sigma(A_1 + Q_1) = 0$, то – критическим; если $\max \sigma(A_1 + Q_1) < 0$, то – докритическим.

Далее мы покажем, что для среднего числа частиц $m_0(t,v,u)$ при $t \to \infty$ в надкритическом и докритическом случаях справедливо соотношение

$$m_0(t,v,u) = C(v,u,d) \cdot \frac{e^{\max \sigma(\widehat{\mathcal{A}}) \cdot t}}{t^{d/2}} \left(1 + o(1)\right).$$

1.3. История вопроса. В настоящее время ветвящиеся случайные блуждания являются одной из наиболее популярных моделей при рассмотрении систем, способных к эволюции путем делений (размножения), гибели, рождения, перемещений, а также миграций. Сейчас эта область интенсивно развивается, а ее развитие находит применение во все более и более разнообразных сферах (см. [2–5]). Так, на сегодняшний день появляется все больше статей с применением ВСБ в медицине (скорость инфицирования населения), информатике (методы распространения информации) и др.

В работах [6, 7, 8] были рассмотрены модели с одним типом частиц и конечным числом источников ветвления одного типа. Матрица переходных интенсивностей $A = \{a(v,u)\}$ в данных работах предполагалась однородной, то есть при всех $u, v \in \mathbf{Z}^d$ выполнено:

$$a(v,u) = a(u,v) = a(0,u-v).$$

Эволюция частиц задавалась с помощью процесса Бьенеме–Гальтона–Ватсона (см. [1, 9]). Для такой модели ВСБ были получены условия экспоненциального роста среднего числа частиц в произвольной точке пространства при $t \to \infty$.

В работе [10] рассматривалось ВСБ с источниками ветвления трех типов: источники без нарушения симметричности блуждания в точке гибели и размножения частицы, источники с нарушением симметричности блуждания за счет введения параметра, отвечающего за отношение между блужданием и ветвлением в источнике, и "псевдоисточники" с нарушением только симметричности блуждания.

Далее, в работах [11, 12, 13] была рассмотрена модель ветвящегося случайного блуждания с одним типом частиц и с бесконечным числом периодически расположенных источников. В предложенной модели матрица переходных интенсивностей предполагалась периодической относительно некоторой решетки Γ (см. свойство (5)). Для изучения среднего числа частиц в системе был использован подход, основанный на разложении оператора, описывающего эволюцию локальной численности частиц, в прямой интеграл операторов. Мы обобщим данный подход на случай ветвящегося случайного блуждания с иммиграцией.

Ранее ВСБ с иммиграцией на $\mathbf{Z}^d$ были рассмотрены в [14]. В данной работе исследовалась модель с бесконечным числом одинаковых источников, причем интенсивность деления частицы на n потомков считалась экспоненциально убывающей с ростом n функцией, а интенсивность рождаемости предполагалась меньше интенсивности смертности. При заданных условиях было доказано существование пределов у первых двух моментов численности частиц в системе при $t \to \infty$, а также исследовались условия существования устойчивого состояния системы с иммиграцией.

§2. Вывод основного уравнения

Обозначим через $l_2(\mathbf{Z}^d)$ пространство суммируемых с квадратом комплексных функций $f : \mathbf{Z}^d \to \mathbf{C}$ с нормой

$$\|f\|^2_{l_2(\mathbf{Z}^d)} = \sum_{v\in\mathbf{Z}^d} |f(v)|^2 < \infty.$$

Далее введем пространство $(l_2(\mathbf{Z}^d))^2$, которое будем при необходимости отождествлять с пространством $l_2(\mathbf{Z}^d \times \{0,1\})$. Именно, функцию $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2) \in (l_2(\mathbf{Z}^d))^2$ мы будем отождествлять с функцией $\widetilde{\varphi} \in l_2(\mathbf{Z}^d \times \{0,1\})$, определяемой как $\widetilde{\varphi}(v,c) = \varphi_c(v)$.

Обозначим через $X_{(v,c)}(t)$, $t \geqslant 0$, ВСБ с иммиграцией при условии, что в начальный момент времени $t = 0$ в системе была только одна частица типа T_c, $c \in \{0,1\}$, находящаяся в точке $v \in \mathbf{Z}^d$.

Далее мы будем рассматривать $X_{(v,c)}(t)$ как марковский процесс со значениями в пространстве $\mathcal{M}$, где $\mathcal{M}$ – пространство всех конечных целочисленных мер на $\mathbf{Z}^d \times \{0,1\}$. Любой элемент $M \in \mathcal{M}$ имеет вид

$$M = \Big(\sum_{j=1}^{q_0} \delta_{(x_j^0,0)}, \sum_{j=1}^{q_1} \delta_{(x_j^1,1)} \Big), \tag{3}$$

где $q_c \in \mathbf{N} \cup \{0\}$ – число частиц типа T_c в системе, $c \in \{0,1\}$, а $x_j^c \in \mathbf{Z}^d$ – их координаты с учетом возможных повторений. Формула (3) означает, что в системе имеется q_0 частиц типа T_0, которые находятся в точках $x_1^0, x_2^0, \ldots, x_{q_0}^0$, и q_1 частиц типа T_1, которые находятся в точках $x_1^1, x_2^1, \ldots, x_{q_1}^1$. Заметим, что в нашей модели величина q_0 принимает только два значения: 0 или 1, в зависимости от типа частицы, существующей в начальный момент времени $t = 0$. Обозначим $\big\{X_{(v,c)}(t)\big\}$ множество пар вида (x_j^c, c), маркирующее все частицы, находящиеся в системе.

Для всех $t \geqslant 0$, $v \in \mathbf{Z}^d$ и $\varphi \in (l_2(\mathbf{Z}^d))^2$ определим случайную величину

$$I_{t,v}(\varphi) = (I_{t,v,0}(\varphi), I_{t,v,1}(\varphi)),$$

где

$$I_{t,v,c}(\varphi) = \sum_{(x,r)\in\{X_{(v,c)}(t)\}} \varphi(x,r), \quad c = 0,1. \tag{4}$$

Определим теперь семейство операторов $\{\widehat{P}^t\}_{t\geqslant 0}$, действующих на функцию $\varphi = (\varphi_0, \varphi_1)^T \in (l_2(\mathbf{Z}^d))^2$, как

$$[\widehat{P}^t \varphi](v) = \mathbf{E}\, I_{t,v}(\varphi) = \Big(\mathbf{E}\, I_{t,v,0}(\varphi),\, \mathbf{E}\, I_{t,v,1}(\varphi)\Big)^T.$$

Лемма 1. *Семейство операторов $\{\widehat{P}^t\}_t$ является полугруппой, т.е. для любых $s, t \geqslant 0$ выполнено*

$$\widehat{P}^{t+s} = \widehat{P}^t \widehat{P}^s.$$

Доказательство. Через $\mathcal{F}_t$ обозначим σ-алгебру, порожденную процессами $X_{(v,c)}(t)$, $c = 0, 1$. Так как данные процессы марковские, то для любых $t, s \geqslant 0$ и $v \in \mathbf{Z}^d$

$$\mathbf{E}(I_{t+s,v,c}(\varphi)|\mathcal{F}_t) = \mathbf{E}(I_{t+s,v,c}(\varphi)|X_{(v,c)}(t)).$$

Пусть $M \in \mathcal{M}$. Вычислим условное математическое ожидание

$$\mathbf{E}(I_{t+s,v,c}(\varphi)|\mathcal{F}_t) = \mathbf{E}(I_{t+s,v,c}(\varphi)|X_{(v,c)}(t) = M)$$

при

$$M = (\sum_{j=1}^{q_0} \delta_{(x_j^0, 0)}, \sum_{j=1}^{q_1} \delta_{(x_j^1, 1)}).$$

Представим $I_{t+s,v,c}(\varphi)$ как сумму $q_0 + q_1$ слагаемых, каждое из которых отвечает общему «предку» в момент времени t:

$$\mathbf{E}(I_{t+s,v,c}(\varphi)|X_{(v,c)}(t) = M) = \sum_{j=1}^{q_0} [\widehat{P}^s \varphi]_0(x_j^0) + \sum_{j=1}^{q_1} [\widehat{P}^s \varphi]_1(x_j^1).$$

Из последнего равенства и (4) вытекает соотношение

$$\mathbf{E}(I_{t+s,v,c}(\varphi)|\mathcal{F}_t) = I_{t,v,c}(\widehat{P}^s \varphi),$$

и, соответственно, соотношение

$$\mathbf{E}(I_{t+s,v}(\varphi)|\mathcal{F}_t) = I_{t,v}(\widehat{P}^s \varphi).$$

Вычисляя математическое ожидание от левой и правой частей последнего равенства, получаем утверждение леммы. □

Лемма 2. *Генератором полугруппы $\widehat{P}^t$ является оператор*

$$\widehat{\mathcal{A}} : (l_2(\mathbf{Z}^d))^2 \to (l_2(\mathbf{Z}^d))^2,$$

определенный формулой:

$$\widehat{\mathcal{A}} = \begin{pmatrix} A_0 & 0 \\ 0 & A_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & Q_0 \\ 0 & Q_1 \end{pmatrix}, \tag{5}$$

где операторы $A_0, A_1, Q_0, Q_1 : l_2(\mathbf{Z}^d) \to l_2(\mathbf{Z}^d)$ *определяются следующим образом:*

$$A_i f(v) = \sum_{u \in \mathbf{Z}^d} a_i(v,u) f(u), \quad i = 0, 1,$$

$$Q_0 f(v) = \alpha(v) f(v),$$

$$Q_1 f(v) = \beta(v) f(v).$$

Доказательство. При $t \to 0$ имеем

$$\left[\widehat{P}^t \varphi\right]_0(v) = \varphi_0(v)(1 + a_0(v,v)t + c_0(v)t) + \sum_{u \neq v} \varphi_0(u) a_0(v,u)t + \\ + \sum_{k \neq 0} (\varphi_0(v) + k\varphi_1(v)) c_k(v)t + o(t);$$

$$\left[\widehat{P}^t \varphi\right]_1(v) = \varphi_1(v)(1 + a_1(v,v)t + b_1(v)t) + \sum_{u \neq v} \varphi_1(u) a_1(v,u)t + \\ + \sum_{k \neq 1} \varphi_1(v) k b_k(v)t + o(t).$$

Из последних двух формул мгновенно следует утверждение леммы. □

Через $e^{\widehat{\mathcal{A}}t}$ обозначим экспоненту от оператора $\widehat{\mathcal{A}}$ (определение функции от оператора см. в [18, глава 6]). Из леммы 2 вытекает соотношение

$$\begin{pmatrix} m_0(t,v,u) \\ m_1(t,v,u) \end{pmatrix} = e^{\widehat{\mathcal{A}}t} \begin{pmatrix} 0 \\ \delta_u(v) \end{pmatrix}, \tag{6}$$

где, как и раньше, $m_c(t,v,u)$ обозначает среднее число частиц типа T_1 в точке u в момент времени t при условии, что в начальный момент времени $t = 0$ в системе находилась только одна частица типа c в точке v. Формула (6) показывает, что для изучения асимптотического поведения $m_c(t,v,u)$ при $t \to \infty$ необходимо изучить спектр оператора $\widehat{\mathcal{A}}$.

§3. Спектральный анализ оператора $\widehat{\mathcal{A}}$

Обозначим невозмущенную часть оператора $\widehat{\mathcal{A}}$ через

$$\widehat{\mathcal{A}}_0 = \begin{pmatrix} A_0 & 0 \\ 0 & A_1 \end{pmatrix}.$$

Лемма 3. *Оператор* $\widehat{\mathcal{A}}_0 : (l_2(\mathbf{Z}^d))^2 \to (l_2(\mathbf{Z}^d))^2$ *– неположительный.*

Доказательство. Неположительность операторов A_0 и A_1 для конечного числа ненулевых коэффициентов $a_0(v, \cdot)$, $a_1(v, \cdot)$ доказана в [15]. Случай бесконечного числа коэффициентов, не обращающихся в нуль, рассмотрен в [13].

Обозначим через $G_{A_i} = (\mathbf{Z}^d, \mathcal{E}_{A_i})$, $i = 0, 1$, граф с множеством вершин $\mathbf{Z}^d$ и множеством ребер

$$\mathcal{E}_{A_i} = \left\{(v, u) : a_i(v, u) > 0, v, u \in \mathbf{Z}^d\right\}.$$

Определим пространство функций $l_2(\mathcal{E}_{A_i}, A_i)$, действующих на ребрах графа G_{A_i}, $i = 1, 2$, как пространство функций $h : \mathcal{E}_{A_i} \to \mathbf{C}$ с нормой:

$$\|h\|_{\mathcal{E}_{A_i}} = \sum_{(v_k, v_l) \in \mathcal{E}_{A_i}} |h(v_k, v_l)|^2 a_i(v_k, v_l).$$

В [13] показано, что существуют операторы $d_0 : l_2(\mathbf{Z}^d) \to l_2(\mathcal{E}_{A_0}, A_0)$ и $d_1 : l_2(\mathbf{Z}^d) \to l_2(\mathcal{E}_{A_1}, A_1)$, такие что $A_0 = -d_0^* d_0$ и $A_1 = -d_1^* d_1$, тогда оператор $\widehat{\mathcal{A}}$ можно представить в виде:

$$\widehat{\mathcal{A}}_0 = -\begin{pmatrix} d_0 & 0 \\ 0 & d_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d_0^* & 0 \\ 0 & d_1^* \end{pmatrix}.$$

Из последнего представления немедленно следует неположительность оператора $\widehat{\mathcal{A}}_0$. □

Оператор $\widehat{\mathcal{A}}$ является периодическим, поэтому для исследования спектра оператора воспользуемся методом разложения оператора в прямой интеграл, описанным в [16, глава XIII.16].

Введем необходимые обозначения. Пусть $\langle \cdot, \cdot \rangle$ – стандартное скалярное произведение в $\mathbf{R}^d$. Введем множество векторов $\{\widetilde{g}_j\}_{i=1}^d$ таким образом, что $\langle \widetilde{g}_j, g_i \rangle = 2\pi\delta_{ij}$, где δ_{ij} – символ Кронекера. Будем называть множество $\{\widetilde{g}_j\}_{j=1}^d$ двойственным базисом, задающим двойственную ячейку $\widetilde{\Omega}$, определяемую следующим образом:

$$\widetilde{\Omega} = \Big\{\theta \in \mathbf{R}^d : \theta = \sum_{j=1}^{d} \theta_j \widetilde{g}_j,\, 0 \leqslant \theta_j < 1,\, j = 1, 2, \ldots, d\Big\}. \tag{7}$$

Прямым интегралом $\mathcal{H}$ гильбертовых пространств $(l_2(\Omega))^2$ называют пространство классов эквивалентности измеримых квадратично интегрируемых векторных полей, наделенное скалярным произведением

$$(u, v)_{\mathcal{H}} = \int\limits_{\widetilde{\Omega}} \langle u(\theta), v(\theta) \rangle_{(l_2(\Omega))^2}\, d\theta.$$

Для прямого интеграла обычно используется символическое обозначение

$$\mathcal{H} = \int\limits_{\widetilde{\Omega}} \oplus (l_2(\Omega))^2\, d\theta.$$

Говорят, что оператор $\widehat{A}$ разложен в прямой интеграл операторов на пространстве $\mathcal{H}$, если при всех $\theta \in \widetilde{\Omega}$ существует операторозначная функция $\widehat{A}(\theta) : (l_2(\Omega))^2 \to (l_2(\Omega))^2$, такая что для всех $\psi \in \mathcal{H}$ выполнено:

$$(\widehat{A}\psi)(\theta) = \widehat{A}(\theta)\, \psi(\theta),$$

при этом $\widehat{A}(\theta)$ называется оператором в слое.

Для оператора $\widehat{A}$, разложенного в прямой интеграл, используется обозначение

$$\widehat{A} = \int\limits_{\widetilde{\Omega}} \oplus \widehat{A}(\theta)\, d\theta.$$

Теорема 2. *Оператор $\widehat{\mathcal{A}}$, определенный в* (5)*, унитарно эквивалентен прямому интегралу операторов в слое, т.е. существует унитарный оператор $\widehat{U} : (l_2(\mathbf{Z}^d))^2 \to \mathcal{H}$, такой что*

$$\widehat{U}\widehat{\mathcal{A}}\widehat{U}^{-1} = \int\limits_{\widetilde{\Omega}} \oplus \widehat{A}(\theta)\, d\theta.$$

Оператор $\widehat{A}(\theta) : (l_2(\Omega))^2 \to (l_2(\Omega))^2$ *имеет вид:*

$$\widehat{A}(\theta) = \begin{pmatrix} A_0(\theta) & 0 \\ 0 & A_1(\theta) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & \widetilde{Q}_0 \\ 0 & \widetilde{Q}_1 \end{pmatrix},$$

где

$$A_i(\theta) = \sum_{u\in\Omega} \widetilde{a}_i(v,u,\theta) f(u), \quad \widetilde{a}_i(v,u,\theta) = \sum_{g\in\Gamma} e^{-i\langle g,\theta\rangle} a_i(v+g,u), \quad i=0,1;$$

$$(\widetilde{Q}_0 f)(v) = \alpha(v) f(v);$$

$$(\widetilde{Q}_1 f)(v) = \beta(v) f(v).$$

Доказательство. Рассмотрим оператор $\widehat{U} : (l_2(\mathbf{Z}^d))^2 \to \mathcal{H}$, определенный как

$$\widehat{U} = \begin{pmatrix} U_0 & 0 \\ 0 & U_0 \end{pmatrix}, \tag{8}$$

где оператор U_0 определен формулой:

$$(U_0 f)(v,\theta) = |\widetilde{\Omega}|^{-\frac{1}{2}} \sum_{g\in\Gamma} e^{-i\langle g,\theta\rangle} f(v+g).$$

Можно показать, что обратный к оператору $\widehat{U}$ действует по правилу:

$$\widehat{U}^{-1} = \begin{pmatrix} U_0^{-1} & 0 \\ 0 & U_0^{-1} \end{pmatrix}, \tag{9}$$

где $(U_0^{-1}\widetilde{f})(v) = \frac{1}{|\widetilde{\Omega}|} \int\limits_{\widetilde{\Omega}} \widetilde{f}(v,\theta) e^{i\langle v,\theta\rangle}\, d\theta$.

В [13] показано, что U_0 является унитарным оператором из $l_2(\mathbf{Z}^d)$ в $\mathcal{H}_1$, где $\mathcal{H}_1$ – пространство прямого интеграла пространств $l_2(\Omega)$, то есть для всех $f \in l_2(\mathbf{Z}^d)$ выполнено равенство $\|U_0 f\|^2_{\mathcal{H}_1} = \|f\|^2_{l_2(\mathbf{Z}^d)}$, а значит,

$$\|\widehat{U}\varphi\|^2_{\mathcal{H}} = \|\varphi\|^2_{(l_2(\mathbf{Z}^d))^2}$$

для всех $\varphi \in (l_2(\mathbf{Z}^d))^2$.

Из [13, теорема 2] следует, что для $i = 0,1$

$$(U_0 A_i f)(v,\theta) = A_i(\theta)(U_0 f)(v,\theta),$$

$$(U_0 Q_i f)(v,\theta) = \widetilde{Q}_i (U_0 f)(v,\theta),$$

а значит,

$$(\widehat{U}\widehat{\mathcal{A}_0}\varphi)(v,c,\theta) = \begin{pmatrix} (U_0 A_0 \varphi_1)(v,\theta) & 0 \\ 0 & (U_0 A_1 \varphi_2)(v,c,\theta) \end{pmatrix}$$
$$= \widehat{A}_0(\theta)(\widehat{U}\varphi)(v,c,\theta).$$

Аналогичное равенство верно для $\begin{pmatrix} 0 & Q_0 \\ 0 & Q_1 \end{pmatrix}$, т.е.

$$\left(\widehat{U}\begin{pmatrix} 0 & Q_0 \\ 0 & Q_1 \end{pmatrix}\varphi\right)(v,c,\theta) = \begin{pmatrix} 0 & \widetilde{Q}_0 \\ 0 & \widetilde{Q}_1 \end{pmatrix}(\widehat{U}\varphi)(v,c,\theta). \qquad \square$$

Заметим, что операторы $A_1(\theta)+\widetilde{Q}_1$ и $A_0(\theta)$ являются самосопряженными конечномерными операторами при любом $\theta \in \widetilde{\Omega}$. Через $\{\lambda_i(\theta)\}_{i=1}^p$ и $\{\lambda_i^0(\theta)\}_{i=1}^p$ обозначим собственные числа, отвечающие операторам $A_1(\theta) + \widetilde{Q}_1$ и $A_0(\theta)$ соответственно. Далее мы считаем, что собственные значения упорядочены по убыванию, то есть

$$\lambda_1(\theta) \geqslant \cdots \geqslant \lambda_p(\theta),$$

$$0 \geqslant \lambda_1^0(\theta) \geqslant \cdots \geqslant \lambda_p^0(\theta).$$

Лемма 4. *Старшее собственное значение оператора $A_0(0)$ равно 0.*

Доказательство. Рассмотрим функцию $f : l_2(\Omega) \to l_2(\Omega)$, такую что

$$f(v_j) = 1$$

при всех $j = 1\ldots,p$. По определению,

$$\lambda_1^0(0) = \sup_{h\in l_2(\Omega)} \frac{\langle A_0(0)h,h\rangle_{l_2(\Omega)}}{\langle h,h\rangle_{l_2(\Omega)}} \geqslant \frac{\langle A_0(0)f,f\rangle_{l_2(\Omega)}}{\langle f,f\rangle_{l_2(\Omega)}}.$$

Так как

$$(A_0(0)f)(v) = \sum_{u\in\Omega} \widetilde{a}_0(v,u,0)f(u),$$

где

$$\widetilde{a_0}(v,u,0) = \sum_{g\in\Gamma} a_0(v+g,u),$$

и в силу свойства $a_0(v,u)=a_0(v+g,u+g)$, получим

$$(A_0(0)f)(v)=\sum_{u\in\Omega}\sum_{g\in\Gamma}a_0(v+g,u)f(u)=\sum_{u\in\Omega}\sum_{g\in\Gamma}a_0(v,u-g)$$
$$=\sum_{u\in\mathbf{Z}^d}a_0(v,u)=0.$$

Таким образом, $\lambda_1^0(0)\geqslant 0$, но так как оператор $A_0(0)$ неположительный, то это означает, что $\lambda_1^0(0)=0$.

□

Лемма 5. *Старшие собственные значения $\lambda_1^0(0)$ и $\lambda_1(0)$ операторов $A_0(0)$ и $A_1(0)+\widetilde{Q}_1$ соответственно являются простыми.*

Доказательство можно найти в [13].

Известно (см. [19]), что спектр оператора $\widehat{A}(\theta)$ равен объединению спектров операторов $A_1(\theta)+\widetilde{Q}_1$ и $A_0(\theta)$, то есть

$$\sigma(\widehat{A}(\theta))=\bigcup_{j=1}^{p}\{\lambda_j^0(\theta)\}\cup\{\lambda_j(\theta)\}.$$

Коэффициенты операторов являются непрерывными функциями $\theta\in\widetilde{\Omega}$ и, следовательно, собственные значения $\lambda_i^0(\theta)$ и $\lambda_j(\theta)$ непрерывны по переменной $\theta\in\widetilde{\Omega}$ при всех $j=1,\dots,p$. Тогда, согласно [16, XIII.85], спектр оператора $\widehat{\mathcal{A}}$ состоит из $2p$ возможно перекрывающихся спектральных зон

$$\bigcup_{j=1}^{p}\lambda_j^0(\widetilde{\Omega})\cup\lambda_j(\widetilde{\Omega}),$$

где $\lambda_j^0(\widetilde{\Omega})$ и $\lambda_j(\widetilde{\Omega})$ обозначают область значений функций $\lambda_j^0(\theta)$ и $\lambda_j(\theta)$ соответственно.

Далее покажем, что основной вклад в поведение операторной экспоненты (6) при $t\to\infty$ вносит верхняя граница спектра $\widehat{\mathcal{A}}$, которая совпадает с максимумом из старших собственных значений операторов $A_0(0)$ и $A_1(0)+\widetilde{Q}_1$. Для спектра оператора A_1+Q_1 справедлива следующая теорема (см. [13]).

Теорема 3. *Для правого края спектра оператора A_1+Q_1 справедливы следующие утверждения:*

а) *максимум функции $\lambda_1(\theta)$ достигается только при $\theta=0$;*

b) *расстояние от правого края спектра оператора* $A_1 + Q_1$ *до правого края второй спектральной зоны строго положительно, т.е.*

$$\lambda_1(0) - \sup_{\theta \in \widetilde{\Omega}} \lambda_2(\theta) > 0;$$

c) *гессиан функции* $\lambda_1(\theta)$ *не обращается в нуль при* $\theta = 0$*, т.е.*

$$\text{Hess } \lambda_1(0) \neq 0;$$

d) *число* $\lambda_1(0)$ *не является собственным значением оператора* $A_1 + Q_1$*, т.е. правый край спектра не вырожден.*

Замечание 1. Аналогичное утверждение справедливо и для правого края спектра оператора A_0.

§4. Асимптотическое поведение среднего числа частиц

Теорема 4. *Пусть* $\lambda_1(0) > 0$ *– старшее собственное значение оператора* $A_1(0) + \widetilde{Q}_1$*. Тогда для любых* $u, v \in \mathbf{Z}^d$ *существует константа* $C(u, v, d)$*, такая что*

$$m_0(v, u, t) = C(v, u, d) \cdot \frac{e^{\lambda_1(0)t}}{t^{d/2}} \left(1 + o\left(1\right)\right), \quad t \to \infty.$$

Доказательство. Напомним, что

$$\begin{pmatrix} m_0(v, u, t) \\ m_1(v, u, t) \end{pmatrix} = \widehat{P}^t \begin{pmatrix} 0 \\ \delta_u(v) \end{pmatrix} = e^{\widehat{\mathcal{A}}t} \begin{pmatrix} 0 \\ \delta_u(v) \end{pmatrix},$$

где $m_i(v, u, t)$ – среднее число частиц в системе в точке u в момент времени t при условии, что в начальный момент времени $t = 0$ была одна частица типа T_i.

Далее имеем:

$$\begin{pmatrix} m_0(v, u, t) \\ m_1(v, u, t) \end{pmatrix} = \widehat{U}^{-1} \widehat{U} e^{\widehat{\mathcal{A}}t} \widehat{U}^{-1} \widehat{U} \begin{pmatrix} 0 \\ \delta_u(v) \end{pmatrix} = \widehat{U}^{-1} e^{\widehat{A}(\theta)t} \widehat{U} \begin{pmatrix} 0 \\ \delta_u(v) \end{pmatrix}.$$

В последней формуле операторы $\widehat{U}$ и $\widehat{U}^{-1}$ определены формулами (8) и (9).

Напомним, что через $\{\lambda_i(\theta)\}_{i=1}^p$ и $\{\lambda_i^0(\theta),\}_{i=1}^p$ обозначены собственные числа, отвечающие операторам $A_1(\theta) + \widetilde{Q}_1$ и $A_0(\theta)$ соответственно.

Представим функцию $\widehat{U}\begin{pmatrix}0\\ \delta_u(v)\end{pmatrix}(\theta)$ в виде:

$$\widehat{U}\begin{pmatrix}0\\ \delta_u(v)\end{pmatrix}(\theta)=\frac{1}{|\widetilde{\Omega}|^{1/2}}e^{-i\langle\gamma_u-\gamma_v,\theta\rangle}d_1^{\omega_u}(\theta)\Psi_1(\omega_v,\theta)+\widetilde{\Psi}(\omega_v,\theta), \qquad (10)$$

где $\Psi_1(\,\cdot\,,\theta)$ – собственный вектор матрицы $\widehat{A}(\theta)$, отвечающий старшему собственному значению $\lambda_1(\theta)$, $d_1^{\omega_u}(\theta)=\langle\delta_{\omega_u}(\,\cdot\,),\Psi_1(\,\cdot\,,\theta)\rangle_{(l_2(\Omega))^2}$ – коэффициент разложения, а $\widetilde{\Psi}(\,\cdot\,,\theta)$ – проекция вектора $\widehat{U}\begin{pmatrix}0\\ \delta_u(\,\cdot\,)\end{pmatrix}(\theta)$ на ортогональное дополнение к вектору $\Psi_1(\,\cdot\,,\theta)$. Выберем $\delta>0$ так, чтобы для любого $\theta\in\widetilde{\Omega}$ выполнялось

$$\lambda_2(\theta)\leqslant\lambda_1(0)-\delta.$$

Далее применим оператор $e^{\widehat{A}(\theta)t}$ к правой части формулы (10) и заметим, что справедливо

$$\|e^{\widehat{A}(\theta)t}\widetilde{\Psi}(\omega_v,\theta)\|_{(l_2(\Omega))^2}\leqslant e^{(\lambda_1(0)-\delta)t}\|\widetilde{\Psi}(\omega_v,\theta)\|_{(l_2(\Omega))^2}$$

и

$$e^{\widehat{A}(\theta)t}\Psi_1(\omega_v,\theta)=e^{\lambda_1(\theta)t}\Psi_1(\omega_v,\theta).$$

Теперь используя пункт (c) теоремы 3 и метод Лапласа асимптотической оценки интегралов (см. [20]), получаем, что при $t\to\infty$

$$m_0(v,u,t)=C(v,u,d)\cdot\frac{e^{\lambda_1(0)t}}{t^{d/2}}\left(1+o\left(1\right)\right). \qquad \square$$

Теорема 5. *Пусть $\lambda_1(0)<0$ – старшее собственное число оператора $A_1(0)+\widetilde{Q}_1$. Тогда для любых $u,v\in\mathbf{Z}^d$ существует константа $\widetilde{C}=\widetilde{C}(u,v,d)$, такая что*

$$m_0(v,u,t)=\widetilde{C}(v,u,d)\cdot\frac{1}{t^{d/2}}\left(1+o\left(1\right)\right),\quad t\to\infty.$$

Доказательство. Так как $\lambda_1(0)<0$, то правой границей спектра оператора $\widehat{\mathcal{A}}$ является $\lambda_1^0(0)=0$. Тогда, повторяя доказательство теоремы 4 и заменяя $\lambda_1(\theta)$ на $\lambda_1^0(\theta)$, получаем, что

$$m_0(v,u,t)=\widetilde{C}(v,u,d)\cdot\frac{1}{t^{d/2}}\left(1+o\left(1\right)\right),\quad t\to\infty. \qquad \square$$

Список литературы

1. Б. А. Севастьянов, *Ветвящиеся процессы*, Москва, Наука, 1971.
2. M. Cranston, L. Koralov, S. Molchanov, B. Vainberg, *A solvable model for homopolymers and self-similarity near the critical point.* – Rand. Oper. Stoch. Eq. **18**, No. 1 (2010), 73–95.
3. M. Kimmel, D. E. Axelrod, *Branching Processes in Biology*, Springer, 2002.
4. C. R. Nelson, C. R. Plosser, *Trends and random walks in macroeconomic time series: some evidence and implications.* – J. Monetary Econom. **10** No. 2 (1982), 139–162.
5. B. G. Malkiel, K. McCue, *A random walk down Wall Street*, New York, Norton, 1985.
6. Е. А. Антоненко, Е. Б. Яровая, *Расположение положительных собственных значений в спектре эволюционного оператора в ветвящемся случайном блуждании.* – Современные проблемы матем. и механ. **X**, No. 3 (2015), 9–22.
7. Е. Б. Яровая, *Ветвящиеся случайные блуждания в неоднородной среде*, Москва, ЦПИ при мехмате Моск. ун-та. **104**, 2007.
8. Е. Б. Яровая, *Критерии экспоненциального роста числа частиц в моделях ветвящихся случайных блужданий.* – Теория вероятн. и ее примен. **55**, No. 4 (2010), 705–731.
9. K. B. Athreya, P. E. Ney, *Branching Processes*, Courier Corporation, 2004.
10. Е. Б. Яровая, *Спектральные свойства эволюционных операторов в моделях ветвящихся случайных блужданий.* — Матем. заметки **92**, No. 1 (2012), 123–140.
11. М. В. Платонова, К. С. Рядовкин, *Асимптотическое поведение среднего числа частиц ветвящегося случайного блуждания на решетке* $\mathbf{Z}^d$ *с периодическими источниками ветвления.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **466** (2017), 234–256.
12. М. В. Платонова, К. С. Рядовкин, О среднем числе частиц ветвящегося случайного блуждания на решетке с периодическими источниками ветвления. — Докл. Акад. наук **479**, No. 3 (2018), 250–253.
13. М. В. Платонова, К. С. Рядовкин, *Ветвящиеся случайные блуждания на* $\mathbf{Z}^d$ *с периодически расположенными источниками ветвления.* — Теория вероятн. и ее примен. **64**, No. 2 (2019), 283–307.
14. D. Han, Yu. Makarova, S. Molchanov, E. Yarovaya, *Branching Random Walks with Immigration.* — Analyt. Comput. Methods Probab. Theory, 2017.
15. B. Mohar, *Some relations between analytic and geometric properties of infinite graphs.* — Discrete Math. **95**, No. 1 (1991), 193–219.
16. M. Reed, B. Simon, *IV: Analysis of Operators*, Elsevier, 1978.
17. Б. А. Севастьянов, *Предельные теоремы для ветвящихся случайных процессов специального вида.* — Теория вероятн. и ее примен., **2**, No. 3 (1957), 339–348.
18. М. Ш. Бирман, М. З. Соломяк, *Спектральная теория самосопряженных операторов в гильбертовом пространстве*, Лань, 2022.
19. Ф. Р. Гантмахер, *Теория матриц*, Москва, Наука, 1966.
20. М. В. Федорюк, *Метод перевала*, Москва, Наука, 1977.

Lukashova I. I. Periodic branching random walk on $\mathbf{Z}^d$ with immigration.

We consider a continuous-time branching random walk with immigration on $\mathbf{Z}^d$ with branching sources located periodically. The asymptotic behavior of the mean number of particles at an arbitrary point is obtained for $t \to \infty$ in the supercritical and subcritical cases.

С.-Петербургское отделение
Математического института
им. В. А. Стеклова РАН,
Международный математический
институт имени Эйлера,
С.-Петербург, Россия
E-mail: `ilukashova072@gmail.com`

Поступило 28 сентября 2023 г.