Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 526, 2023 г.

М. С. Ермаков

О РАВНОМЕРНОЙ СОСТОЯТЕЛЬНОСТИ НЕПАРАМЕТРИЧЕСКИХ КРИТЕРИЕВ

§1. Введение

Условие компактности является необходимым условием существования равномерно состоятельных оценок в непараметрическом оценивании [11]. Оно естественно возникает и когда исследуются некорректные задачи с детерминированной помехой [5]. Таким образом, компактность является условием, позволяющим построить равномерно состоятельные оценки. Как следует из данной работы, это же предположение является необходимым и для равномерной состоятельности альтернатив в одной из естественных постановок непараметрической проверки гипотез.

Скажем, что множество альтернатив равномерно состоятельно, если для него существует равномерно состоятельная последовательность (или равномерно состоятельное семейство) статистических критериев проверки гипотез.

Равномерная состоятельность непараметрических множеств альтернатив исследовались многими различными методами и во многих совершенно различных постановках задач. Довольно полный обзор можно найти в [6].

Нами исследуется эта задача, когда гипотеза является простой и множества альтернатив сближаются с гипотезой с ростом объема выборки (или при мощности гауссовского шума, стремящейся к нулю). Решение задачи базируется на результатах Ле Кама и Шварц [21]. Ле Кам и Шварц [21] нашли необходимые и достаточные условия существования равномерно состоятельных оценок и критериев, когда множество оцениваемых параметров и соответственно альтернатив не зависит от объема выборки n. Эти условия довольно громоздки и даны в терминах n-кратных прямых произведений вероятностных мер для всех n. Простая форма этих условий возникает в случае, если вероятностные меры статистического эксперимента являются компактными в топологии слабой сходимости на множестве всех вероятностных мер

Ключевые слова: критерии согласия, состоятельность, обнаружение сигнала.

или, другими словами, если плотности вероятностных мер являются равномерно интегрируемыми. Согласно лемме 2.3 в [10], если множество вероятностных мер компактно в топологии слабой сходимости вероятностных мер, то оно компактно в любой другой топологии слабой сходимости, такой что это множество является в ней пространством Хаусдорфа. Это позволяет указать необходимые и достаточные условия равномерной состоятельности в терминах простых естественных топологий слабой сходимости для распространенных статистических моделей проверки гипотезы о плотности распределения, обнаружения сигнала в гауссовском белом шуме, проверки гипотезы об интенсивности пуассоновского процесса, проверки гипотезы о ковариационном операторе гауссовского процесса и других [6]. Данные результаты можно рассматривать как естественное дополнение к предыдущим многочисленным интересным исследованиям по состоятельности непараметрических критериев [1, 3, 9, 12, 11, 15, 16, 18, 22]. Как уже говорилось, в [6] множества альтернатив не зависели от размера выборки (мощности шума и т.п.).

Долгое время необходимые и достаточные условия равномерной состоятельности для множеств альтернатив, сближающихся с гипотезой с ростом объема выборки и, соответственно, мощности гауссовского шума стремящейся к нулю, оставались неясными. Были построены специальные примеры неразличимости простой гипотезы и сближающихся множеств альтернатив. Первый такой результат был получен Ле Камом [20]. Для задачи проверки гипотезы о плотности распределения Ле Кам [20] показал, что центр шара и внешность шара в $\mathbb{L}_1$ неразличимы. Для задачи обнаружения сигнала в гауссовском белом шуме Ибрагимов и Хасьминский [11] доказали неразличимость центра шара и внешности шара в $\mathbb{L}_2$. Для той же самой задачи Бурнашев [2] показал неразличимость центра и внешности шара в $\mathbb{L}_p$, $p > 1$. Упомянем также работы Ингстера [13] и Ингстера, Кутоянца [14]. Ингстер [13] и Ингстер, Кутоянц [14] показали, что нельзя различить центр шара и его внешность в $\mathbb{L}_2$ для задач проверки гипотез о плотности распределения и интенсивности пуассоновского процесса соответственно.

В [9] нами показано, что если множество альтернатив является ограниченным центрально-симметричным множеством, из которого удаляются шары в $\mathbb{L}_2$, имеющие центрами нулевую точку гипотезы, то существуют равномерно состоятельные критерии для некоторой последовательности радиусов, длины которых стремятся к нулю с ростом объема выборки, если и только если выпуклое центрально-симметричное множество компактно.

Цель работы – доказать аналогичный результат без предположения центральной симметричности выпуклого множества и распространить этот результат на "малые шары" из $\mathbb{L}_p$, $p > 1$.

§2. Равномерно состоятельные множества

2.1. Проверка гипотезы о плотности распределения. Пусть независимые одинаково распределенные случайные величины $X_1, \dots, X_n$ имеют вероятностную меру $\mathbf{P}$, определенную на σ-алгебре $\mathfrak{B}$, заданной на множестве S. Обозначим через $\mathcal{P}$ множество всех вероятностных мер на $(S, \mathfrak{B})$.

Для вероятностной меры $\mathbf{P}_0 \in \mathcal{P}$ обозначим $\mathbb{L}_p$, $1 < p < \infty$, множество вещественных измеримых функций g, таких что

$$\|g\|_p^p = \int_S |g|^p d\,\mathbf{P}_0 < \infty.$$

Для всех $\rho > 0$ и $u \in \mathbb{L}_p$ определим шары $B_\rho(u) = \{\, g \,:\, \|g - u\|_p \leqslant \rho,\ g \in \mathbb{L}_p\}$.

Зафиксируем ограниченное выпуклое множество $U \subset \mathbb{L}_p$. Для каждого $u \in U$ и любого $\rho > 0$ предположим, что существует ограниченная функция $g \in B_\rho(u) \cap U$.

Скажем, что $u \in U$ является внутренней точкой выпуклого множества U, если для любой ограниченной функции $v \in U$ существует $\lambda < 0$, такое что $u + \lambda(v - u) \in U$. Заметим, что такое определение внутренней точки выпуклого множества отличается от традиционного (см. [4, с. 410]).

Предположим, что $f_0 \equiv 0$ является внутренней точкой U.

Стоит задача проверки гипотезы

$$\mathbb{H}_0 \;:\; f \doteq \frac{d\mathbb{P}}{d\mathbb{P}_0} - 1 = f_0$$

против альтернатив

$$\mathbb{H}_n \;:\; f \in V(\rho_n) = U \setminus B_{\rho_n}(f_0),$$

где $\rho_n > 0$, $\rho_n \to 0$ при $n \to \infty$.

Для критерия K_n обозначим через $\alpha(K_n) = \mathbf{E}_0[K_n]$ его вероятность ошибки первого рода, а через $\beta(K_n, f)$ – его вероятность ошибки второго рода для альтернативы $f \in V(\rho_n)$.

Скажем, что последовательность критериев K_n, $0 < \alpha(K_n, f_0) \leqslant \alpha < 1$, равномерно состоятельна, если найдутся $n_0 > 0$ и $\delta > 0$, такие что для всех $n > n_0$ имеет место

$$\beta(K_n, V(\rho_n)) \doteq \sup_{f \in V(\rho_n)} \beta(K_n, f) < 1 - \alpha - \delta$$

В противном случае скажем, что последовательность критериев K_n, $0 < \alpha(K_n, f_0) \leqslant \alpha < 1$, является равномерно несостоятельной.

Теорема 2.1. *Найдется последовательность $\rho_n \to 0$ при $n \to \infty$, такая что последовательность множеств альтернатив $V(\rho_n)$ равномерно состоятельна, если и только если множество U относительно компактно в $\mathbb{L}_p$.*

Скажем, что последовательность r_n является скоростью различимости, если множества альтернатив $V(\rho_{1n})$ равномерно несостоятельны для любой последовательности $\rho_{1n} > 0$, $\rho_{1n}/r_n \to 0$ при $n \to \infty$, а множества альтернатив $V(\rho_{2n})$ равномерно состоятельны для любой последовательности $\rho_{2n} > 0$, $\rho_{2n}/r_n \to \infty$ при $n \to \infty$.

Замечание 2.1. В доказательстве теоремы 2.1 для точки нуль мы строим множество W, такое что $U \subset W$, и показываем, что n-поперечники Колмогорова d_n, $1 \leqslant n < \infty$, множества W стремятся к нулю. Те же самые рассуждения мы можем провести для любой внутренней точки $u \in U$ и построить множество W_u, $U \subset W_u$ с поперечниками Колмогорова d_{ui}, $1 \leqslant i < \infty$. Если взять $h = u$ в доказательстве теоремы 2.1 и провести те же самые рассуждения с применением (3.3), то мы получим $cd_n \leqslant d_{un} \leqslant Cd_n$, $1 \leqslant n < \infty$, где коэффициенты c, C являются пропорциональными коэффициентам подобия. Те же самые соображения подобия позволяют показать, что асимптотики метрических энтропий $B_\delta(0) \cap U$ и $B_\delta(u) \cap U$ имеют одинаковый порядок при $\delta \to 0$, если по крайней мере одна из асимптотик этих энтропий имеет степенной порядок.

Данные аргументы являются основой доказательства того, что мы имеем одинаковые скорости различимости в задачах проверки гипотез $\mathbb{H}_0 : f = 0$ против $\mathbb{H}_n : f \in U \setminus B_{\rho_n}(0)$ и $\mathbb{H}_{0u} : f = u$ против $\mathbb{H}_{nu} : f \in U \setminus B_{\rho_n}(u)$. Если точка u зависит от n, можно получить различные скорости различимости [24].

Замечание 2.2. Ограниченное множество $W \subset \mathbb{L}_p([0,1])$ компактно (см. теорему 20, гл. IV в [4] и (1.1) в [19]), если и только если найдется $\omega(h) \to 0$ при $h \to 0$, такое что для любого $f \in W$ имеет место

$$\int_0^{1-h} |f(t+h) - f(t)|^p \, dt < \omega(h). \tag{2.1}$$

Обозначим через $W_{C\omega}$ наибольшее множество, такое что функции $f \in W_{C\omega}$ или их производные удовлетворяют (2.1) и $\|f\|_p \leqslant C$. Тогда для любого компактного множества $W \subset \mathbb{L}_p([0,1])$, можно найти множество $W_{C\omega}$, такое что асимптотики поперечников множеств W и $W_{C\omega}$ совпадают и $W \subset W_{C\omega}$. Следовательно, можно предположить, что тестовые статистики, имеющие оптимальную скорость различимости для множеств альтернатив $W_{C\omega} \setminus B(\rho_n)$, будут равномерно состоятельными и иметь ту же оптимальную скорость различимости для множеств альтернатив $W \setminus B(\rho_n)$. Тогда множества $W_{C\omega}$ будут наибольшими множествами, как в непараметрическом оценивании [7, 17, 23], так и при непараметрической проверке гипотез [8, 9].

Таким образом можно предположить, что не существует множеств W более широких, чем множества $W_{C\omega}$ имеющих одинаковый оптимальный порядок скорости сходимости оценок [7, 17, 23] (различимости критериев [8, 9]).

Следствие 2.1. *Пусть дана априорная информация, что $f \in U$, где U – ограниченное выпуклое множество в $\mathbb{L}_p$, $p > 1$. Тогда существует равномерно состоятельная оценка $\|f\|_p$, если и только если множество U относительно компактно.*

Доказательство теоремы 2.1 основано на теореме 2.2 о равномерной состоятельности множеств альтернатив, которые не зависят от n.

Для $p > 1$ рассмотрим задачу проверки гипотезы

$$\mathbb{H}_0 \ : \ f \in W_0 \subset \mathbb{L}_p$$

против альтернатив

$$\mathbb{H}_1 \ : \ f \in W_1 \subset \mathbb{L}_p.$$

Скажем, что последовательность критериев K_n равномерно состоятельна, если

$$\limsup_{n\to\infty} \big(\sup_{f_0 \in W_0} \alpha(K_n, f_0) + \sup_{f \in W_1} \beta(K_n, f)\big) < 1.$$

Теорема 2.2. *Пусть W_0 и W_1 – ограниченные множества в $\mathbb{L}_p$, $p>1$. Тогда существует равномерно состоятельная последовательность критериев, если и только если замыкания множеств W_0 and W_1 не пересекаются в слабой топологии.*

Теорема 2.2 следует из замечания (см. [21, с. 141]) и леммы 2.3 в [10] (см. теорему 4.1 в [6]).

Если замыкания в слабой топологии множеств W_0 и W_1 не пересекаются, то существует конечное число функций $g_1, \dots, g_k \in \mathbb{L}_q$, $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$, и постоянных $c_1, \dots, c_k$, таких что для любого $u \in W_0$ имеет место $c_i > \int_S u\, g_i\, d\mathbf{P}_0$ для всех i, $1 \leqslant i \leqslant k$, и для любого $v \in W_1$, найдется индекс i, $1 \leqslant i \leqslant k$, такой что $\int_S v\, g_i\, d\mathbf{P}_0 > c_i$.

2.2. Проверка гипотез о функции интенсивности пуассоновского процесса. Пусть нам даны $n-$ независимых реализаций пуассоновского процесса $\kappa_1, \dots, \kappa_n$ со средней мерой $\mathbf{P}$, определенной на борелевской σ-алгебре $\mathfrak{B}$, заданной на множестве S. Предположим, что средняя мера $\mathbf{P}$ абсолютно непрерывна относительно меры ν и имеет функцию интенсивности $h(t) = \frac{d\mathbf{P}}{d\nu}(t)$, $t \in S$. Здесь ν является мерой, определенной на борелевских множествах σ-алгебры $\mathfrak{B}$ и $\nu(S) < \infty$, $\mathbf{P}(S) < \infty$.

Стоит задача проверки гипотезы $H_0 : f(t) \doteq h(t) - 1 = f_0 \equiv 0$ против альтернатив $H_n : f \in V(\rho_n) \subset \mathbb{L}_p$, $p > 1$. Определение множеств $V(\rho_n)$, $\rho_n > 0$, то же самое как и в предыдущем подразделе с единственным отличием, плотности заменяются функциями интенсивности. Определение внутренней точки выпуклого множества U тоже остается без изменений.

Теорема 2.3. *Пусть U – ограниченное выпуклое множество в $\mathbb{L}_p$, $p > 1$. Пусть f_0 – внутренняя точка множества U. Тогда существует последовательность $\rho_n \to 0$ при $n \to \infty$, такая что множества альтернатив $V(\rho_n)$ равномерно состоятельны, если и только если множество U относительно компактно.*

Доказательство теоремы 2.3 полностью совпадает с доказательством теоремы 2.1. Достаточно только применить теорему 5.9 из [6] вместо теоремы 2.2.

2.3. Обнаружение сигнала в гауссовском белом шуме. Пусть мы наблюдаем реализацию случайного процесса $Y_\epsilon(t)$, $t \in (0,1)$, определяемого стохастическим дифференциальным уравнением

$$dY_\varepsilon(t) = S(t)\,dt + \varepsilon\,dw(t), \quad \varepsilon > 0,$$

где $S \in \mathbb{L}_2(0,1)$ – неизвестный сигнал, а $dw(t)$ – гауссовский белый шум.

Пусть U – ограниченное выпуклое множество в $\mathbb{L}_2(0,1)$. Мы скажем, что $S_0 \in U$ внутренняя точка выпуклого множества U, если для любого $S \in U$, найдется $\lambda < 0$, такая что $S_0 + \lambda(S - S_0) \in U$.

Обозначим через $B_r(S)$ шар в $\mathbb{L}_p$, $p > 1$, имеющий радиус $r > 0$ и центр $S \in \mathbb{L}_p$.

Стоит задача проверки гипотезы

$$\mathbb{H}_0 \ : \ S(t) = S_0(t) \equiv 0, \quad t \in [0,1],$$

против альтернативы

$$\mathbb{H}_\varepsilon \ : \ S \in V(\rho_\varepsilon) = U \setminus B_{\rho_\varepsilon}(S_0), \quad \rho_\varepsilon > 0.$$

Для любого критерия K_ε, $\varepsilon > 0$, обозначим $\alpha(K_\varepsilon) = \mathbf{E}_0[K_\varepsilon]$ – его вероятность ошибки первого рода и $\beta(K_\varepsilon, S)$ – его вероятность ошибки второго рода для альтернативы $S \in V(\rho_\varepsilon)$.

Скажем, что семейство критериев K_ε, $0 < \alpha(K_\varepsilon) \leqslant \alpha < 1$, $\varepsilon > 0$, равномерно состоятельно, если найдутся $\varepsilon_0 > 0$ и $\delta > 0$, такие что для всех $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$, имеет место

$$\beta(K_\varepsilon, V(\rho_\varepsilon)) = \sup_{S \in V(\rho_\varepsilon)} \beta(K_\varepsilon, S) < 1 - \alpha - \delta.$$

Теорема 2.4. *Пусть U – ограниченное выпуклое множество в $\mathbb{L}_p \cap \mathbb{L}_2$, $p > 1$. Пусть S_0 – внутренняя точка выпуклого множества U. Тогда найдется $\rho_\varepsilon \to 0$ при $\varepsilon \to 0$, такое что семейство альтернатив $V(\rho_\varepsilon)$ равномерно состоятельно, если и только если множество U относительно компактно.*

Доказательство теоремы 2.3 полностью совпадает с доказательством теоремы 2.1. Достаточно применить теорему 5.3 из [6] вместо теоремы 2.2.

2.4. Проверка гипотезы о решении линейной некорректной задачи. В гильбертовом пространстве $\mathbb{H}$ наблюдается гауссовский случайный вектор

$$Y_\varepsilon = A\,S + \varepsilon\,\xi, \quad \varepsilon > 0, \quad S \in \mathbb{H}. \tag{2.2}$$

Здесь $A : \mathbb{H} \to \mathbb{H}$ – известный линейный оператор, а ξ – гауссовский случайный вектор, имеющий известный ковариационный оператор $R : \mathbb{H} \to \mathbb{H}$ и $\mathbf{E}\,[\xi] = 0$.

Обозначим через $B_r(S)$ шар в $\mathbb{H}$, имеющий радиус $r > 0$ и центр $S \in \mathbb{H}$. Пусть U – ограниченное выпуклое множество в $\mathbb{H}$.

Рассматривается задача проверки гипотезы

$$\mathbb{H}_0 \ : \ S = S_0 = 0$$

против альтернатив

$$\mathbb{H}_\varepsilon \ : \ S \in V(\rho_\varepsilon) = U \setminus B_{\rho_\varepsilon}(S_0), \quad \rho_\varepsilon > 0.$$

Ниже мы используем то же самое определение равномерной состоятельности и внутренней точки, что и в подразделе 2.3.

Для любого оператора $K : \mathbb{H} \to \mathbb{H}$ обозначим через $\mathfrak{R}(K)$ образ K. Предположим, что ядра операторов A и R нулевые и $\mathfrak{R}(A) \subseteq \mathfrak{R}(R^{1/2})$.

Теорема 2.5. *Пусть оператор $R^{-1/2}A$ ограничен в $\mathbb{H}$. Пусть S_0 – внутренняя точка выпуклого множества U. Тогда существует $\rho_\varepsilon \to 0$ при $\varepsilon \to 0$, такое что множества альтернатив $V(\rho_\varepsilon)$ равномерно состоятельны, если и только если множество U относительно компактно.*

Доказательство. Утверждение теоремы 2.4 справедливо для множеств альтернатив $R^{-1/2}A\,V(\rho_n)$. Таким образом достаточно применить обратное отображение $A^{-1}R^{1/2}$ к $R^{-1/2}A\,V(\rho_n)$ (см. [6]). $\square$

2.5. Проверка гипотезы о значении оператора, известном со случайной ошибкой. Пусть Θ – множество всех ограниченных линейных операторов $\mathbb{H} \to \mathbb{H}$, где $\mathbb{H}$ – сепарабельное гильбертово пространство.

Пусть $A \in \Theta$ – неизвестный линейный оператор.

Пусть для любого $S \in \mathbb{H}$ мы наблюдаем случайный гауссовский вектор

$$Y_{\varepsilon,S} \;=\; A\,S + \epsilon\,\xi_S,$$

где $\mathbf{E}\,[\xi_S] = 0$ и $\mathbf{E}\,[\langle \xi_{S_1}, \xi_{S_2} \rangle] = \langle S_1, S_2 \rangle$. Здесь $\langle S_1, S_2 \rangle$ обозначает скалярное произведение векторов $S_1, S_2 \in \mathbb{H}$. Пусть U – выпуклое подмножество Θ. Скажем, что $A_1 \in U$ – внутренняя точка U, если для любого $A \in U$, найдется $\lambda < 0$, такое что $A_1 + \lambda(A - A_1) \in U$.

Обозначим через $A_0 \in \Theta$ линейный оператор, такой что для любого $S \in \mathbb{H}$, мы имеем $A_0 S = 0$.

Для нормы Гильберта–Шмидта в Θ обозначим через $B(r)$ шар в Θ, имеющий радиус $r > 0$ и центр A_0. Пусть A_0 – внутренняя точка U.

Стоит задача проверки гипотезы $H_0 \,:\, A = A_0$ против альтернатив $H_1 \,:\, A \in V(\rho_\varepsilon) \doteq U \setminus B(\rho_\varepsilon)$, где $\rho_\varepsilon > 0$.

Определение равномерной состоятельности аналогично определению подраздела 2.3.

В теореме, приведенной ниже, рассматривается ограниченность и компактность относительно нормы Гильберта–Шмидта.

Теорема 2.6. *Пусть U – ограниченное выпуклое множество и пусть A_0 – внутренняя точка U. Тогда существует семейство $\rho_\varepsilon \to 0$ при $\varepsilon \to 0$, такое что множества альтернатив $V(\rho_\varepsilon)$ равномерно состоятельны, если и только если множество U относительно компактно.*

Рассуждения аналогичны доказательству теоремы 2.4. Достаточно только применить теорему 5.7 из [6].

§3. Доказательство теоремы 2.1

Предположим, что существует равномерно состоятельная последовательность множеств альтернатив $V(\rho_n)$, $\rho_n \to 0$ при $n \to \infty$. Тогда, применяя теорему 2.2, мы укажем компактное множество W, такое что $U \subset W$.

Зафиксируем $\varepsilon_1 > 0$. Для каждого натурального $i > 1$ положим $\varepsilon_i = \frac{\varepsilon_{i-1}}{2}$.

По теореме 2.2, для каждого i найдутся функции $g_{i1}, \dots, g_{ik_i} \in \mathbb{L}_q$, $\|g_{ij}\|_q = 1$ for $1 \leqslant j \leqslant k_i$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, и постоянные $c_{i1}, \dots, c_{ik_i}$, такие что

$$V(\varepsilon_i) \subset \cup_{l=1}^{i} \cup_{j=1}^{k_l} \Pi(g_{lj}, c_{lj}) \tag{3.1}$$

и

$$0 \notin \cup_{l=1}^{i} \cup_{j=1}^{k_l} \Pi(g_{lj}, c_{lj}), \tag{3.2}$$

где

$$\Pi(g_{lj}, c_{lj}) = \Big\{ f \,:\, \int_S g_{lj}\, f\, d\,\mathbf{P}_0 > c_{lj}, f \in \mathbb{L}_p \Big\}.$$

Обозначим через $\Gamma(g_{lj}, c_{lj})$ граничную гиперплоскость множества $\Pi(g_{lj}, c_{lj})$.

Определим множества $G_i = \{g_{i1}, \dots, g_{ik_i}\}$, $1 \leqslant i < \infty$.

Ясно. что мы можем дополнительно предположить, что, если $g \in G_i$, то $-g \in G_i$, $1 \leqslant i < \infty$. В противном случае мы просто можем добавить такие функции. Более того, мы можем предположить, что если $g_{ij_1} = -g_{ij_2}$, $1 \leqslant j_1 \neq j_2 \leqslant k_i$, то $c_{ij_1} = c_{ij_2}$.

Мы можем также предположить, что g_{ij} – ступенчатые функции и, следовательно, $g_{ij} \in \mathbb{L}_p \cap \mathbb{L}_q$, $1 \leqslant j \leqslant k_i$, $1 \leqslant i < \infty$. В противном случае мы можем заменить функции g_{ij} их ступенчатыми аппроксимациями, изменив незначительно постоянные c_{ij}. Мы можем выбрать функции g_{ij} так, что функция $g_{i_1 j_1}$ ортогональна функции g_{i_2,j_2} в $\mathbb{L}_2$ при любых $1 \leqslant i_1 \neq i_2 < \infty$ и $1 \leqslant j_1 < k_{i_1}$, $1 \leqslant j_2 < k_{i_2}$.

Для i, $1 \leqslant i < \infty$, обозначим через M_i линейное подпространство, порожденное функциями $g_{i1}, \dots, g_{ik_i}$.

Обозначим через $B(M_i, \rho)$ шар в подпространстве M_i of $\mathbb{L}_p$, имеющий нулевой центр и радиус $\rho > 0$.

Зафиксируем $\delta > 0$. Мы можем взять число функций g_{ij}, $\|g_{ij}\|_q = 1$, $1 \leqslant j \leqslant k_i$, настолько большим, что для любого $f \in B(M_i, \varepsilon_{i-1})$, найдется g_{ij}, $1 \leqslant j \leqslant k_i$, такая что

$$\Big|\int_S g_{ij} f \, d\mathbf{P}_0\Big| < \frac{\varepsilon_{i-1}}{1-\delta}.$$

Обозначим $d_i \doteq \frac{\varepsilon_{i-1}}{1-\delta}$.

В определении множества W мы применим индукцию по i.

Так как множество U ограничено, найдется d_1, такое что для любого j, $1 \leqslant j \leqslant k_1$, и произвольного $f \in U$, имеет место $f \in \bar{\Pi}(g_{1j}, d_1)$, где $\bar{\Pi}(g_{1j}, d_{1j}) = \mathbb{L}_p \setminus \Pi(g_{1j}, d_1)$.

Пусть $v \in U \setminus B_{\varepsilon_1}(0)$, $\int_S g_{11} v d\mathbf{P}_0 > c_{11}$, и пусть v – ограниченная функция. Тогда найдется $\lambda < 0$, такое что $h \doteq \lambda v \in U$ и $1+\lambda v$ является плотностью распределения.

Обозначим $\Pi_0 = \Big\{ f \,:\, \int_S g_{11} f d\mathbf{P}_0 > 0, f \in \mathbb{L}_p \Big\}$. Пусть Γ_0 является граничной гиперплоскостью Π_0. Обозначим $W_1 = \cap_{j=1}^{k_1} \bar{\Pi}(g_{1j}, d_1)$.

Пусть $i > 1$. Для каждого j, $1 \leqslant j \leqslant k_i$, проведем гиперплоскость Υ_{ij}, проходящую через точку h и $\Gamma(g_{ij}, d_i) \cap \Gamma_0$. Обозначим $\Psi_{i,j}$ множество, имеющее $\Upsilon_{i,j}$ в качестве границы и содержащее $(U \setminus B(\varepsilon_{i-1})) \cap \Pi_0$.

Обозначим $W_i = \cap_{j=1}^{k_i} \Psi_{ij} \cap W_{i-1}$. Тогда $U \cap \Pi_0 \subset W_i$.

Обозначим через L_i линейное пространство, порожденное функциями из линейных пространств $M_1, \dots, M_i$.

Пусть $R > 0$ таково, что $U \subset B_R(0)$.

Используя соображения подобия треугольников, для любого i, $1 < i < \infty$, и любого j, $1 \leqslant j \leqslant k_i$, имеем

$$\begin{aligned}
&\sup_f \inf_{f_1} \{\|f - f_1\|_p \,:\, f \in \Upsilon_{i,j} \cap W_i \cap L_i,\; f_1 \in W_{i-1} \cap L_{i-1}\,\} \\
&\leqslant |\lambda|^{-1} R \sup_f \{\|f - f_1\|_p : f \in \Upsilon_{i,j} \cap W_i \cap L_i \cap \Gamma_0, f_1 \in W_{i-1} \cap L_{i-1} \cap \Gamma_0\} \\
&\leqslant d_i |\lambda|^{-1} R.
\end{aligned} \tag{3.3}$$

Обозначим через W замыкание $\cap_{i=1}^{\infty} W_i$. Согласно (3.3), n-поперечники W стремятся к нулю и следовательно множество W относительно компактно. Так как $U \cap \Pi_0 \subset W$, то $U \cap \Pi_0$ также относительно компактно. Случай $U \setminus \Pi_0$ исследуется аналогично.

Список литературы

1. L. Birge, *Robust tests for model selection.* — IMS Collections **9** (2012), 47–64.
2. M. V. Burnashev, *On the minimax solution of inaccurately known signal in a white Gaussian noise . Background.* — Theory Probab. Appl. **24** (1979), 107–119.
3. A. Dembo, Y. Peres, *A topological criterion for hypothesis testing.* — Ann. Statist. **22** (1994), 106–117.
4. N. Dunford, J. T. Schwartz, *Linear operators.* NY, Interscience Publishers, 1958.
5. H. Engl, M. Hanke and A. Neubauer, *Regularization of Inverse Problems*, Kluwer, 1996.
6. M. S. Ermakov, *On consistent hypothesis testing.* — J. Math. Sci., **225** (2017), 751–769.
7. M. S. Ermakov, *Minimax nonparametric estimation on maxisets* — J. Math. Sci. **244**, (2020), 779–788.
8. M. S. Ermakov, *On asymptotically minimax nonparametric detection of signal in Gaussian white noise.* — J. Math. Sci., **251** (2020), 78–87.
9. M. S. Ermakov, *On uniform consistency of nonparametric tests I.* — J. Math. Sci., **258** (2021), 802–837.
10. P. Gänssler, *Compactness and sequential compactness on the space of measures.* — Z. Wahrsch. Verw. Geb. **17** (1971), 124–146.
11. I. A. Ibragimov, R. Z. Khasminskii, *On the estimation of infinitely dimensional parameter in Gaussian white noise.* — Dokl. AN USSR **236** (1977), 1053–1055.
12. W. Hoeffding, J. Wolfowitz, *Distinguishability of sets of distributions.* — Ann. Math. Statist. **29** (1958), 700–718.
13. Yu. I. Ingster, *Asymptotically minimax hypothesis testing for nonparametric alternatives. I, II, III.* — Math. Methods Statist. **2** (1993), 85–114, 171–189, 249–268.
14. Yu. I. Ingster, Yu. A. Kutoyants, *Nonparametric hypothesis testing for intensity of the Poisson process.* — Math. Methods Statist. **16** (2007), 218–246.

15. Yu. I. Ingster, I. A. Suslina, *Nonparametric Goodness-of-fit Testing under Gaussian Models.* — Lect. Notes Statist. **169**, NY, Springer, 2002.
16. A. Janssen, *Global power function of goodness of fit tests.* — Ann, Statist. **28** (2020), 239–253.
17. G. Kerkyacharian, D. Picard, *Density estimation by kernel and wavelets methods: optimality of Besov spaces.* — Statist. Probab. Lett. **18** (1993), 327–336.
18. C. Kraft, *Some conditions for consistency and uniform consistency of statistical procedures.* — Univ. Californ. Publ. Statist. **2** (1955), 125–142.
19. V. Krotov, *Criteria for compactness in $\mathbb{L}_p$-spaces, $p > 0$.* — Russian Acad. Sci. Sbornik Math. **203**, No. 7 (2012) 1045–1064.
20. L. Le Cam, *Convergence of estimates under dimensionality restrictions.* — Ann. Statist. **1** (1973), 38–53.
21. L. Le Cam, L. Schwartz, *A necessary and sufficient conditions for the existence of consistent estimates,* — Ann. Math. Statist. **31** (1960), 140–150.
22. J. Pfanzagl, *On the existence of consistent estimates and tests.* — Z. Wahrsch. Verw. Geb. **10** (1968), 43–62.
23. V. Rivoirard, *Maxisets for linear procedures.* — Statist. Probab. Lett. **67** (2004), 267–275.
24. Y. Wei, M. J. Wainwright, *The local geometry of testing in ellipses: tight control via localized Kolmogorov widths.* — IEEE Trans. Inform. Theory **66**, No. 8 (2020), 5110–5129.

Ermakov M. S. On uniform consistency of nonparametric tests.

For problem of hypothesis testing on a density we explore condition of existence of uniformly consistent tests. Hypothesis is simple. Sets of alternatives is convex sets in $\mathbb{L}_p$, $p > 1$, with deleted balls. Hypothesis is center of balls. We show that, there is sequence of radii of the balls tending to zero as sample size increases such that the sets of alternatives are uniformly consistent, if and only if convex set is compact. Similar results are established for problem of hypothesis testing on a density, for signal detection in Gaussian white noise, for linear ill-posed problems with random Gaussian noise and so on.

Институт проблем машиноведения РАН
Большой пр. В.О., 61;
Санкт-Петербургский
государственный Университет
Университетский пр., 28, Петродворец
198504 Санкт-Петербург
Россия
E-mail: erm2512@gmail.com

Поступило 5 сентября 2023 г.