Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 526, 2023 г.

А. Н. Бородин

О РАСПРЕДЕЛЕНИИ НЕОДНОРОДНЫХ ФУНКЦИОНАЛОВ ОТ БРОУНОВСКОГО ЛОКАЛЬНОГО ВРЕМЕНИ

0. Введение.

Эта статья содержит обобщение теоремы 5.1 гл. V из [1] на случай неоднородных функционалов от броуновского локального времени. Пусть $W(s)$, $s \geqslant 0$, – броуновское движение, $\ell(t,y)$, $t \geqslant 0$, $y \in \mathbf{R}$, – броуновское локальное время. Считаем $W(0) = 0$, так как представленные результаты для произвольного начального значения легко трансформируются к нулевому значению в силу пространственной однородности броуновского движения. Основополагающее значение для распределения функционалов от броуновского локального времени по пространственной переменной имеет следующий результат о том, что в определенных условиях локальное время по этой переменной является марковским процессом. Обоснование марковского свойства для броуновского локального времени в момент, когда броуновское движение впервые достигает заданного уровня, дал Ф. Найт [2]. Д. Рэй [3] предложил чисто аналитическое доказательство этого свойства без привлечения предельной аппроксимации. Мы сформулируем этот результат так, как это представлено в теореме 2.1 гл. V из [1].

Теорема 0.1. *Процесс $\ell(\tau,y)$, $y \in \mathbf{R}$, при условии $W(\tau) = z$ является марковским процессом, который может быть представлен при $z \geqslant 0$ в виде*

$$\ell(\tau,y) = \begin{cases} V_1(y-z) & \text{при } z \leqslant y, \\ V_2(z-y) & \text{при } 0 \leqslant y \leqslant z, \\ V_3(-y) & \text{при } y \leqslant 0, \end{cases}$$

где $V_k(h)$, $h \geqslant 0$, $k = 1,2,3$, – неотрицательные однородные диффузионные процессы, независимые при фиксированных начальных значениях. Для начальных значений процессов V_k выполняются равенства

Ключевые слова: броуновское локальное время, распределение неоднородных функционалов, супремумы локальных времен.

$V_1(0) = V_2(0)$ и $V_3(0) = V_2(z)$. Распределение $V_1(0)$ определяется формулой

$$\frac{d}{dv}\mathbf{P}\{\ell(\tau, z) < v|W(\tau) = z\} = \sqrt{2\lambda}\, e^{-v\sqrt{2\lambda}}\, \mathbb{1}_{[0,\infty)}(v), \tag{0.1}$$

а производящие операторы процессов V_1, V_2, V_3 имеют вид

$$\mathbf{L}_1 = 2v\Big(\frac{d^2}{dv^2} - \sqrt{2\lambda}\frac{d}{dv}\Big), \quad \mathbf{L}_2 = 2v\Big(\frac{d^2}{dv^2} - \sqrt{2\lambda}\frac{d}{dv}\Big) + 2\frac{d}{dv},$$

$$\mathbf{L}_3 = 2v\Big(\frac{d^2}{dv^2} - \sqrt{2\lambda}\frac{d}{dv}\Big),$$

соответственно.

Замечание 0.1. При $z \leqslant 0$ имеет место аналогичное описание в силу свойств пространственной однородности и обратимости времени броуновского моста. В силу этого, процессы V_1 и V_3 в обозначениях поменяются местами.

Замечание 0.2. Процессы V_1 и V_2 имеют одинаковое показательное начальное распределение с плотностью (0.1), а $V_3(0) = V_2(z)$. Процессы $V_k(h)$, $h \geqslant 0$, представимы в виде

$$V_1(h) = e^{-2\sqrt{2\lambda}h} R_0^2\Big(\frac{e^{2\sqrt{2\lambda}h} - 1}{2\sqrt{2\lambda}}\Big), \qquad V_3(h) = e^{-2\sqrt{2\lambda}h} \widehat{R}_0^2\Big(\frac{e^{2\sqrt{2\lambda}h} - 1}{2\sqrt{2\lambda}}\Big),$$

$$V_2(h) = e^{-2\sqrt{2\lambda}h} R_2^2\Big(\frac{e^{2\sqrt{2\lambda}h} - 1}{2\sqrt{2\lambda}}\Big),$$

где при заданных начальных значениях $R_0(t)$, $\widehat{R}_0(t)$ и $R_2(t)$ – независимые бесселевские процессы размерностей 0, 0 и 2 соответственно, удовлетворяющие начальным значениям.

Замечание 0.3. В теореме 0.1 дано специальное описание процесса $\ell(\tau, y)$, $y \in \mathbf{R}$, при условии $W(\tau) = z$. В этом описании у процесса V_1 время y течет в естественном направлении, а у процессов V_2 и V_3 оно течет в обратном направлении, т.е. в процессах V_2 и V_3 параметр времени y стоит со знаком минус. В этом есть определенное удобство, которое заключается в следующем. Процесс V_1 вырождается до нуля, так как $\ell(\tau, y) = 0$ при $y \geqslant \sup_{0\leqslant s\leqslant\tau} W(s)$, и то же самое происходит с процессом V_3, так как $\ell(\tau, y) = 0$ при $y \leqslant \inf_{0\leqslant s\leqslant\tau} W(s)$. Если задавать процесс V_3 в естественном времени, то он начинался бы из нуля в случайный момент времени $y_0 = \inf_{0\leqslant s\leqslant\tau} W(s)$. Процесс V_2, в силу свойства обратимости времени у броуновского моста (см. § 11 гл. I из [1]), при любом направлении времени будет одинаков. По этой же причине инфинитезимальные характеристики процессов V_1 и V_3 тоже совпадают.

1. Распределение простейшего неоднородного функционала от броуновского локального времени

Рассмотрим вопрос о том, как вычислять распределения функционалов от броуновского локального времени. Простейший неоднородный интегральный функционал от броуновского локального времени по пространственной переменной имеет вид

$$B_b(t) := \int_{-\infty}^{b} f(\ell(t,y))\,dy + \int_{b}^{\infty} g(\ell(t,y))\,dy, \tag{1.1}$$

где $f(v)$ и $g(v)$, $v \in [0,\infty)$, – некоторые неотрицательные кусочно непрерывные функции. Для преобразования Лапласа распределения такого функционала будут получены формулы, выраженные в терминах решений дифференциальных уравнений второго порядка, удовлетворяющих некоторым граничным условиям. Вычисление распределений этих функционалов в фиксированный момент времени t сводится к вычислению распределений этих же функционалов, остановленных в случайный момент времени τ, который не зависит от броуновского движения W и имеет экспоненциальное распределение

$$\frac{d}{dt}\mathbf{P}(\tau < t) = \lambda e^{-\lambda t}\,\mathbb{1}_{[0,\infty)}(t). \tag{1.2}$$

Достаточно применить обратное преобразование Лапласа по λ.

Теорема 1.1. *Пусть $f(v)$, $g(v)$, $v \in [0,\infty)$, – неотрицательные кусочно непрерывные функции, удовлетворяющие условиям $f(0) = 0$, $g(0) = 0$. Тогда*

$$\eta\int_0^\infty e^{-\eta b}\,\mathbf{E}\,e^{-B_b(\tau)}\,db$$

$$= \lambda\eta\int_0^\infty R(v)\,Q(v)\,dv + \lambda\int_0^\infty M(v)\,H(v)\,dv + \lambda\int_0^\infty L(v)\,U(v)\,dv, \tag{1.3}$$

где при $v \in [0,\infty)$ функции R, Q, M, H, L, U являются единственными ограниченными непрерывными решениями задачи

$$2vR''(v) - (\lambda v + g(v))\,R(v) = 0, \quad R(0) = 1, \tag{1.4}$$

$$2vQ''(v) + 2Q'(v) - (\lambda v + g(v))\,Q(v) = -H(v), \tag{1.5}$$

$$2vL''(v) - (\lambda v + f(v))\,L(v) = 0, \qquad L(0) = 1, \tag{1.6}$$

$$2vH''(v) + 2H'(v) - (\lambda v + \eta + f(v))\,H(v) = -L(v), \tag{1.7}$$

$$2vM''(v) - (\lambda v + \eta + f(v))\,M(v) = -\eta R(v), \quad M(0) = 1, \tag{1.8}$$

$$2vU''(v) + 2U'(v) - (\lambda v + f(v))\,U(v) = -M(v). \tag{1.9}$$

Замечание 1.1. Однородное уравнение

$$2vX''(v) + 2X'(v) - (\lambda v + \eta + f(v))\,X(v) = 0, \quad v \geqslant 0,$$

имеет линейно независимое строго возрастающее решение, ограниченное в нуле, и имеет убывающее решение с логарифмической асимптотикой в нуле (см. § 5 гл. V из [1]).

Доказательство. Предположим сначала, что f и g – ограниченные дважды непрерывно дифференцируемые функции с ограниченными первыми и вторыми производными.

При исходном вероятностном пространстве $\big(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P}\big)$ рассмотрим новое вероятностное пространство, которое порождено условными распределениями $\mathbf{P}^z(B) = \mathbf{P}(B\,|\,W(\tau) = z)$, $B \in \mathcal{F}$. Символы вероятности и математического ожидания, относящиеся к этому пространству, будем снабжать индексом z сверху. Согласно теореме 0.1, процесс $\ell(\tau, y)$ в этом вероятностном пространстве является марковским с показательным начальным распределением (0.1).

Поскольку

$$\mathbf{P}\big(W(\tau) \in dz\big) = \frac{\sqrt{\lambda}}{\sqrt{2}} e^{-|z|\sqrt{2\lambda}}\,dz,$$

то

$$\eta \int\limits_0^\infty db\, e^{-\eta b}\,\mathbf{E}\, e^{-B_b(\tau)} = \eta \int\limits_0^\infty db\, e^{-\eta b} \frac{\sqrt{\lambda}}{\sqrt{2}} \int\limits_{-\infty}^\infty e^{-|z|\sqrt{2\lambda}}\,\mathbf{E}^z e^{-B_b(\tau)}\,dz$$

$$= \eta \int\limits_0^\infty db\, e^{-\eta b} \frac{\sqrt{\lambda}}{\sqrt{2}} \bigg(\int\limits_b^\infty e^{-z\sqrt{2\lambda}}\,\mathbf{E}^z e^{-B_b(\tau)}\,dz + \int\limits_0^b e^{-z\sqrt{2\lambda}}\,\mathbf{E}^z e^{-B_b(\tau)}\,dz$$

$$+\int\limits_{-\infty}^{0} e^{z\sqrt{2\lambda}}\,\mathbf{E}^z e^{-B_b(\tau)}\,dz\Big) =: I_1+I_2+I_3. \tag{1.10}$$

Используя марковское свойство и (0.1), найдем, что при $b<z$

$$\mathbf{E}^z e^{-B_b(\tau)} = \sqrt{2\lambda}\int\limits_0^\infty e^{-v\sqrt{2\lambda}}\,\mathbf{E}^z\big\{e^{-B_b(\tau)}\,\big|\,\ell(\tau,z)=v\big\}\,dv$$

$$= \sqrt{2\lambda}\int\limits_0^\infty e^{-v\sqrt{2\lambda}}\,\bar r(z,v)\,\bar q(z,v)\,dv, \tag{1.11}$$

где

$$\bar r(z,v) := \mathbf{E}^z\Big\{\exp\Big(-\int\limits_z^\infty g(\ell(\tau,y))\,dy\Big)\,\Big|\,\ell(\tau,z)=v\Big\},$$

$$\bar q(z,v) := \mathbf{E}^z\Big\{\exp\Big(-\int\limits_b^z g(\ell(\tau,y))\,dy-\int\limits_{-\infty}^b f(\ell(\tau,y))\,dy\Big)\,\Big|\,\ell(\tau,z)=v\Big\}.$$

Применяя теорему 0.1, получим

$$\bar r(z,v) = \mathbf{E}\Big\{\exp\Big(-\int\limits_0^\infty g(V_1(h))\,dh\Big)\,\Big|\,V_1(0)=v\Big\}.$$

Ясно, что функция $\bar r(z,v)$ не зависит от z. Обозначим $\bar R(v) := \bar r(z,v)$.

Применим теорему 12.5 гл. II из [1]. Тогда получим, что функция $\bar R(v)$, $v\in(0,\infty)$, является ограниченным решением следующего однородного уравнения:

$$2v\big(\bar R''(v)-\sqrt{2\lambda}\,\bar R'(v)\big)-g(v)\bar R(v)=0.$$

Известно, что 0-мерный бесселевский процесс, попадая в нуль, из нуля уже не выходит, т.е. остается равным нулю. В силу описания процесса V_1, аналогичное утверждение верно и для него. Отсюда, так как $g(0)=0$, следует, что $\bar R(0)=1$.

Замена $R(v) := e^{-v\sqrt{\lambda/2}}\bar R(v)$, приводит к задаче

$$2vR''(v)-(\lambda v+g(v))R(v)=0, \qquad R(0)=1, \tag{1.12}$$

которая совпадает с задачей (1.4).

Рассмотрим $\bar q(z,v)$. Снова применяя теорему 0.1, и учитывая обратное направление течения времени у процессов V_3, V_2, их однородность и то, что $V_2(0)=v$, получим $\bar q(z,v)=\bar q_b(z-b,v)$. Действительно,

$$\bar q_b(z-b,v)$$

$$:= \mathbf{E}\exp\Big(-\int\limits_0^{z-b} g(V_2(h))\,dh-\int\limits_{z-b}^{z} f(V_2(h))\,dh-\int\limits_0^{\infty} f(V_3(h))\,dh\Big)$$

$$=\int\limits_0^{\infty}\mathbf{E}\Big\{\exp\Big(-\int\limits_0^{\infty} f(V_3(h))\,dh-\int\limits_{z-b}^{z} f(V_2(h))\,dh\Big)\,\Big|\,V_2(z-b)=\rho\Big\}$$

$$\times\,\mathbf{E}\Big\{\exp\Big(-\int\limits_0^{z-b} g(V_2(h))\,dh\Big);V_2(z-b)\in d\rho\Big\}$$

$$=\mathbf{E}\Big\{\bar H_b(V_2(z-b))\exp\Big(-\int\limits_0^{z-b} g(V_2(h))\,dh\Big)\,\Big|\,V_2(0)=v\Big\},$$

где

$$\bar H_b(\rho):=\mathbf{E}\Big\{\exp\Big(-\int\limits_0^{\infty} f(V_3(h))\,dh-\int\limits_{z-b}^{z} f(V_2(h))\,dh\Big)\,\Big|\,V_2(z-b)=\rho\Big\}.$$

Аналогично, используя марковское свойство процесса V_2 и его однородность, получим

$$\bar H_b(v):=\mathbf{E}\Big\{\bar L(V_2(b))\exp\Big(-\int\limits_0^{b} f(V_2(h))\,dh\Big)\,\Big|\,V_2(0)=v\Big\},$$

$$\bar L(v):=\mathbf{E}\Big\{\exp\Big(-\int\limits_0^{\infty} f(V_3(h))\,dh\Big)\,\Big|\,V_3(0)=v\Big\}.$$

Применим теорему 13.2 гл. II к функциям $\bar q_b(t,v)$, $\bar H_b(\rho)$ и теорему 12.5 гл. II из [1] к функции $\bar L(v)$, получим следующие дифференциальные задачи:

$$\frac{\partial}{\partial t}\bar q_b(t,v)=2v\Big(\frac{\partial^2}{\partial v^2}\bar q_b(t,v)-\sqrt{2\lambda}\frac{\partial}{\partial v}\bar q_b(t,v)\Big)+2\frac{\partial}{\partial v}\bar q_b(t,v)-g(v)\bar q_b(t,v),$$
$$\bar q_b(0,v)=\bar H_b(v),$$
$$\frac{\partial}{\partial b}\bar H_b(v)=2v\Big(\frac{\partial^2}{\partial v^2}\bar H_b(v)-\sqrt{2\lambda}\frac{\partial}{\partial v}\bar H_b(v)\Big)+2\frac{\partial}{\partial v}\bar H_b(v)-f(v)\bar H_b(v),$$
$$\bar H_0(v)=\bar L(v),$$
$$2v\big(\bar L''(v)-\sqrt{2\lambda}\,\bar L'(v)\big)-f(v)\bar L(v)=0,\quad \bar L(0)=1.$$

Замена функций $q_b(t,v):=e^{-v\sqrt{\lambda/2}}\bar q_b(t,v)$, $H_b(v):=e^{-v\sqrt{\lambda/2}}\bar H_b(v)$, $L(v):=e^{-v\sqrt{\lambda/2}}\bar L(v)$, приводит к следующим дифференциальным задачам:

$$\frac{\partial}{\partial t}q_b(t,v)=2v\frac{\partial^2}{\partial v^2}q_b(t,v)+2\frac{\partial}{\partial v}q_b(t,v)-(\lambda v-\sqrt{2\lambda}+f(v))q_b(t,v),\tag{1.14}$$
$$q_b(0,v)=H_b(v),\tag{1.15}$$

и

$$\frac{\partial}{\partial b}H_b(v)=2v\frac{\partial^2}{\partial v^2}H_b(v)+2\frac{\partial}{\partial v}H_b(v)-(\lambda v-\sqrt{2\lambda}+f(v))H_b(v),\tag{1.16}$$
$$H_0(v)=L(v),\tag{1.17}$$
$$2vL''(v)-(\lambda v+f(v))L(v)=0,\quad L(0)=1.\tag{1.18}$$

В силу (1.10) и (1.11) имеем

$$I_1=\eta\lambda\int_0^\infty dvR(v)\int_0^\infty db\,e^{-(\eta+\sqrt{2\lambda})b}Q_b(v),$$

где

$$Q_b(v):=\int_0^\infty e^{-s\sqrt{2\lambda}}q_b(s,v)\,ds.$$

Эта функция удовлетворяет уравнению

$$2vQ_b''(v)+2Q_b'(v)-(\lambda v+f(v))Q_b(v)=-H_b(v).$$

Следовательно,

$$Q(v):=\int_0^\infty db\,e^{-(\eta+\sqrt{2\lambda})b}Q_b(v)$$

удовлетворяет уравнению

$$2vQ''(v) + 2Q'(v) - (\lambda v + f(v))Q(v) = -H(v), \tag{1.19}$$

где

$$H(v) := \int_0^\infty db\, e^{-(\eta+\sqrt{2\lambda})b} H_b(v)$$

удовлетворяет уравнению

$$2vH''(v) + 2H'(v) - (\lambda v + \eta + f(v))H(v) = -L(v). \tag{1.20}$$

В итоге имеем

$$I_1 = \eta\lambda \int_0^\infty R(v)Q(v)\, dv.$$

Это дает первое слагаемое в формуле (1.3).

Выведем второе слагаемое. Используя марковское свойство, найдем, что при $0 < z < b$

$$\mathbf{E}^z e^{-B_b(\tau)} = \sqrt{2\lambda} \int_0^\infty e^{-v\sqrt{2\lambda}}\, \mathbf{E}^z \big\{ e^{-B_b(\tau)} \big| \ell(\tau, z) = v \big\}\, dv$$

$$= \sqrt{2\lambda} \int_0^\infty e^{-v\sqrt{2\lambda}}\, \bar{m}_b(b - z, v)\bar{p}(z, v)\, dv, \tag{1.21}$$

где

$$\bar{m}_b(b - z, v) : = \mathbf{E}^z \Big\{ \exp\Big(- \int_z^b f(\ell(\tau, y))\, dy - \int_b^\infty g(\ell(\tau, y))\, dy \Big) \Big| \ell(\tau, z) = v \Big\},$$

$$\bar{p}(z, v) : = \mathbf{E}^z \Big\{ \exp\Big(- \int_{-\infty}^z f(\ell(\tau, y))\, dy \Big) \Big| \ell(\tau, z) = v \Big\}.$$

Рассмотрим $\bar{m}_b(b-z,v)$. Обозначим $s := b-z$. Снова применяя теорему 0.1, получим, что $\bar{m}_b(s,v) = \bar{m}(s,v)$, т.е. не зависит от b, и что

$$
\begin{aligned}
\bar{m}(s,v) &= \int_0^\infty \mathbf{E}\Big\{ \exp\Big(-\int_0^s f(V_1(h))\,dh \\
&\quad - \int_s^\infty g(V_1(h))\,dh\Big) \Big| V_1(s)=\rho\Big\} \mathbf{P}\big(V_1(s)\in d\rho\big) \\
&= \int_0^\infty \mathbf{E}\Big\{ \exp\Big(-\int_s^\infty g(V_1(h))\,dh\Big) \Big| V_1(s)=\rho\Big\} \\
&\quad \times \mathbf{E}\Big\{ \exp\Big(-\int_0^s f(V_1(h))\,dh\Big); V_1(s)\in d\rho\Big\} \\
&= \mathbf{E}\Big\{ \bar{R}(V_1(s)) \exp\Big(-\int_0^s f(V_1(h))\,dh\Big) \Big| V_1(0)=v\Big\},
\end{aligned}
$$

где $R(v) = e^{-v\sqrt{\lambda/2}}\bar{R}(v)$ удовлетворяет уравнению (1.12). Ясно, что $\bar{m}(0,v) = \bar{R}(v)$, $\bar{m}(s,0) = 1$.

Далее, так как $V_3(0) = V_2(z)$, имеем

$$
\begin{aligned}
\bar{p}(z,v) &= \int_0^\infty \mathbf{E}\Big\{ \exp\Big(-\int_0^\infty f(V_3(h))\,dh\Big) \Big| V_3(0)=\rho\Big\} \\
&\quad \times \mathbf{E}\Big\{ \exp\Big(-\int_0^z f(V_2(h))\,dh\Big); V_2(z)\in d\rho\Big\} \\
&= \mathbf{E}\Big\{ \bar{L}(V_2(z)) \exp\Big(-\int_0^z f(V_2(h))\,dh\Big) \Big| V_2(0)=v\Big\} = \bar{H}_z(v),
\end{aligned}
$$

где $L(v) = e^{-v\sqrt{\lambda/2}}\bar{L}(v)$ удовлетворяет уравнению (1.18).

Применим теорему 13.2 гл. II из [1] к функции $\bar m(t,v)$ и получим следующую дифференциальную задачу:

$$\frac{\partial}{\partial t}\bar m(t,v) = 2v\Big(\frac{\partial^2}{\partial v^2}\bar m(t,v) - \sqrt{2\lambda}\frac{\partial}{\partial v}\bar m(t,v)\Big) - f(v)\bar m(t,v),$$
$$\bar m(0,v) = \bar R(v).$$

Замена $m(t,v) := e^{-v\sqrt{\lambda/2}}\bar m(t,v)$ приводит к следующей дифференциальной задаче:

$$\frac{\partial}{\partial t}m(t,v) = 2v\frac{\partial^2}{\partial v^2}m(t,v) - (\lambda v + f(v))m(z,v), \tag{1.22}$$
$$m(0,v) = R(v). \tag{1.23}$$

Положим $p(z,v) := e^{-v\sqrt{\lambda/2}}\bar p(t,v)) = H_z(v)$. В силу (1.10) и (1.21), имеем

$$I_2 = \eta\int\limits_0^\infty \mathbf{E}e^{-B_b(\tau)}\,db = \eta\int\limits_0^\infty db\,e^{-\eta b}\frac{\sqrt{\lambda}}{\sqrt{2}}\int\limits_0^b e^{-z\sqrt{2\lambda}}\mathbf{E}^z e^{-B_b(\tau)}dz$$

$$= \lambda\eta\int\limits_0^\infty db\,e^{-\eta b}\int\limits_0^b dz\,e^{-z\sqrt{2\lambda}}\int\limits_0^\infty m_b(b-z,v)\,p(z,v)\,dv$$

$$= \lambda\int\limits_0^\infty dv\int\limits_0^\infty dz\,e^{-(\eta+\sqrt{2\lambda})z}p(z,v)\int\limits_z^\infty e^{-\eta(b-z)}m_b(b-z,v)\,db$$

$$= \lambda\int\limits_0^\infty dv\,M(v)\int\limits_0^\infty dz\,e^{-(\eta+\sqrt{2\lambda})z}H_z(v) = \lambda\int\limits_0^\infty dv\,M(v)\,H(v),$$

где

$$M(v) := \eta\int\limits_0^\infty e^{-\eta s}m(s,v)\,ds, \quad M(0) = 1.$$

Функция $M(v)$ удовлетворяет уравнению (1.8).

Это дает второе слагаемое в формуле (1.3).

Выведем третье слагаемое. Используя марковское свойство, найдем, что при $z<0$

$$\mathbf{E}^z e^{-B_b(\tau)} = \sqrt{2\lambda}\int\limits_0^\infty e^{-v\sqrt{2\lambda}}\,\mathbf{E}^z\big\{e^{-B_b(\tau)}\big|\ell(\tau,z)=v\big\}\,dv$$

$$= \sqrt{2\lambda} \int_0^\infty e^{-v\sqrt{2\lambda}}\, \bar u_b(z,v) \bar L(v)\, dv, \tag{1.24}$$

где

$$\bar u_b(z,v) := \mathbf{E}^z\Big\{ \exp\Big(-\int_z^0 f(\ell(\tau,y))\, dy - \int_0^b f(\ell(\tau,y))\, dy - \int_b^\infty g(\ell(\tau,y))\, dy\Big) \Big| \ell(\tau,z)=v\Big\},$$

$$\bar L(v) = \mathbf{E}^z\Big\{ \exp\Big(-\int_{-\infty}^z f(\ell(\tau,y))\, dy\Big) \Big| \ell(\tau,z)=v\Big\} = \mathbf{E}\Big\{ \exp\Big(-\int_0^\infty f(V_3(h)) dh\Big) \Big| V_3(0)=v\Big\},$$

так как процессы V_1 и V_3 одинаково распределены.

Рассмотрим $\bar u_b(z,v)$. Снова применяя теорему 0.1, получим

$$\bar u_b(z,v) = \int_0^\infty \mathbf{E}\Big\{ \exp\Big(-\int_0^z f(V_2(h))\, dh\Big) \Big| V_3(0)=\rho\Big\} \times \mathbf{E}^z\Big\{ \exp\Big(-\int_0^b f(V_3(h))\, dh - \int_b^\infty g(V_3(h))\, dh\Big); V_3(0)\in d\rho\Big\}.$$

Так как $V_3(0) = V_2(z)$, то

$$\bar u_b(z,v) = \mathbf{E}\Big\{ \bar T_b(V_2(z)) \exp\Big(-\int_0^z f(V_2(h))\, dh\Big) \Big| V_2(0)=v\Big\},$$

где $\bar T_b$ имеет вид

$$\bar T_b(\rho) := \mathbf{E}^z\Big\{ \exp\Big(-\int_0^b f(V_3(h)\, dh - \int_b^\infty g(V_3(h))\, dh\Big) \Big| V_3(0)=\rho\Big\}$$

$$= \mathbf{E}\Big\{\bar{R}(V_3(b))\exp\Big(-\int_0^b f(V_3(h)\,dh\Big)\Big|\,V_3(0)=\rho\Big\} = \bar{m}(b,\rho).$$

Последнее равенство выполняется, так как процессы V_1 и V_3 одинаково распределены при одних и тех же начальных условиях.

Применим теорему 13.2 гл. II из [1] к функции $\bar{u}_b(z,v)$ и получим следующую дифференциальную задачу:

$$\frac{\partial}{\partial t}\bar{u}_b(z,v) = 2v\big(\frac{\partial^2}{\partial v^2}\bar{u}_b(t,v) - \sqrt{2\lambda}\frac{\partial}{\partial v}\bar{u}_b(t,v)\big) + 2\frac{\partial}{\partial v}\bar{u}_b(t,v) - f(v)\bar{u}_b(t,v),$$
$$\bar{u}_b(0,v) = \bar{m}(b,v).$$

Замена $u_b(t,v) := e^{-v\sqrt{\lambda/2}}\bar{u}_b(t,v)$ приводит к задаче:

$$\frac{\partial}{\partial z}u_b(z,v) = 2v\frac{\partial^2}{\partial v^2}u_b(z,v) + 2\frac{\partial}{\partial v}u_b(z,v) - (\lambda v - \sqrt{2\lambda} + f(v))u_b(z,v),$$
$$u_b(0,v) = m(b,v).$$

Функция

$$U_b(v) := \int_{-\infty}^{0} e^{z\sqrt{2\lambda}}u_b(z,v)\,dz,$$

удовлетворяет уравнению

$$2vU_b''(v) + 2U_b'(v) - (\lambda v + f(v))U_b(v) = -m(b,v).$$

Тогда преобразование

$$U(v) := \eta\int_0^\infty e^{-\eta b}U_b(v)\,db$$
$$= \int_{-\infty}^{0} e^{z\sqrt{2\lambda}}\mathbf{E}\Big\{M(V_2(z))\exp\Big(-\int_0^z f(V_2(h))\,dh\Big)\Big|\,V_2(0)=v\Big\}dz$$

удовлетворяет уравнению (1.9):

$$2vU''(v) + 2U'(v) - (\lambda v + f(v))\,U(v) = -M(v).$$

В силу (1.10) и (1.24), имеем

$$I_3 = \eta\int_0^\infty e^{-\eta b}\mathbf{E}e^{-B_b(\tau)}\,db = \eta\int_0^\infty db\,e^{-\eta b}\frac{\sqrt{\lambda}}{\sqrt{2}}\int_{-\infty}^{0} e^{z\sqrt{2\lambda}}\mathbf{E}^z e^{-B_b(\tau)}dz$$

$$= \lambda\eta \int\limits_0^\infty db\, e^{-\eta b} \frac{\sqrt{\lambda}}{\sqrt{2}} \int\limits_{-\infty}^0 e^{z\sqrt{2\lambda}} \int\limits_0^\infty u_b(z,v)\, L(v)\, dv\, dz$$

$$= \lambda\eta \int\limits_0^\infty db\, e^{-\eta b} U_b(v)\, L(v)\, dv = \lambda \int\limits_0^\infty dv\, L(v)\, U(v).$$

Как и при доказательстве теоремы 4.1 гл. IV из [1], результат для кусочно непрерывных функций $f(v)$ и $g(v)$, $v \geqslant 0$, доказывается с помощью аппроксимации $f(v)$ и $g(v)$ непрерывно дифференцируемыми функциями.

Теорема 1.1 доказана. □

2. Распределение интегральных функционалов и супремумов броуновского локального времени на смежных интервалах

Имея выражения для преобразований Лапласа распределений неотрицательных интегральных функционалов от процесса, можно вычислять распределения функционалов типа супремума (см. § 2 гл. III и § 5 гл. V из [1]). В этом параграфе будут получены результаты, которые позволяют вычислять совместные распределения функционала $B_b(\tau)$ и величин $\sup\limits_{y\in(-\infty,b)} \ell(\tau,y)$, $\sup\limits_{y\in(b,\infty)} \ell(\tau,y)$.

Теорема 2.1. *Пусть $f(v)$, $g(v)$, $v \in [0,\infty)$, – неотрицательные кусочно непрерывные функции, удовлетворяющие условиям $f(0) = 0$, $g(0) = 0$. Тогда при любых неотрицательных $\bar f$ и $\bar g$*

$$\eta \int\limits_0^\infty e^{-\eta b}\, \mathbf{E}\Big\{ e^{-B_b(\tau)};\ \sup_{y\in(-\infty,b)} \ell(\tau,y) \leqslant \bar f,\ \sup_{y\in(b,\infty)} \ell(\tau,y) \leqslant \bar g \Big\}\, db$$

$$= \eta\lambda \int\limits_0^{\bar g} R(v)\, Q(v)\, dv + \lambda \int\limits_0^{\bar f} M(v)\, H(v)\, dv + \lambda \int\limits_0^{\bar f} L(v)\, U(v)\, dv, \qquad (2.1)$$

где при $v \in [0, \max\{\bar f, \bar g\})$ *функции* R, Q, M, H, L, U *являются единственными ограниченными непрерывными решениями задачи*

$$2vR''(v) - (\lambda v + g(v))\, R(v) = 0, \quad R(0) = 1, \quad R(\bar g) = 0, \tag{2.2}$$

$$2vQ''(v) + 2Q'(v) - (\lambda v + g(v))\, Q(v) = -H(v), \quad Q(\bar g) = 0, \tag{2.3}$$

$$2vL''(v) - (\lambda v + f(v))\, L(v) = 0, \quad L(0) = 1, \quad L(\bar f) = 0, \tag{2.4}$$

$$2vH''(v) + 2H'(v) - (\lambda v + \eta + f(v))\, H(v) = -L(v), \ H(\bar f) = 0, \tag{2.5}$$

$$2vM''(v) - (\lambda v + \eta + f(v))\, M(v) = -\eta R(v), \ M(0) = 1, \ M(\bar f) = 0, \tag{2.6}$$

$$2vU''(v) + 2U'(v) - (\lambda v + f(v))\, U(v) = -M(v), \quad U(\bar f) = 0. \tag{2.7}$$

Замечание 2.1. Функции R, Q правее точки $\bar g$ и функции M, H, L, U правее точки $\bar f$ считаются равными нулю.

Доказательство. Применим теорему 1.1. Обозначим для краткости

$$f_\gamma(v) := f(v) + \gamma\, \mathbb{1}_{(\bar f, \infty)}(v), \qquad g_\gamma(v) := g(v) + \gamma\, \mathbb{1}_{(\bar g, \infty)}(v). \tag{2.8}$$

Многие из предыдущих обозначений с заменой функций $f(v)$ и $g(v)$ на функции $f_\gamma(v)$ и $g_\gamma(v)$ будем снабжать индексом γ. Так, например,

$$B_b^\gamma(t) := \int\limits_{-\infty}^{b} f_\gamma(\ell(t, y))\, dy + \int\limits_{b}^{\infty} g_\gamma(\ell(t, y))\, dy. \tag{2.9}$$

Доказательство теоремы 2.1 основано на очевидном соотношении

$$\eta \int\limits_0^\infty e^{-\eta b}\, \mathbf{E}\Big\{ e^{-B_b(\tau)}; \sup_{y \in (-\infty, b)} \ell(\tau, y) \leqslant \bar f, \sup_{y \in (b, \infty)} \ell(\tau, y) \leqslant \bar g \Big\}\, db$$

$$= \lim_{\gamma \to \infty} E_\gamma,$$

где

$$E_\gamma := \eta \int\limits_0^\infty e^{-\eta b}\, \mathbf{E}\Big\{ \exp\Big(- \int\limits_{-\infty}^{b} \big(f(\ell(\tau, y)) + \gamma\, \mathbb{1}_{(\bar f, \infty)}(\ell(\tau, y)) \big)\, dy$$

$$- \int\limits_{b}^{\infty} \big(g(\ell(\tau, y)) + \gamma\, \mathbb{1}_{(\bar g, \infty)}(\ell(\tau, y)) \big) dy \Big) \Big\}\, db =: I_1^\gamma + I_2^\gamma + I_3^\gamma.$$

Здесь

$$I_1^\gamma = \eta\lambda \int\limits_0^\infty dv\, R_\gamma(v) \int\limits_0^\infty db\, e^{-(\eta+\sqrt{2\lambda})b} Q_b^\gamma(v) = \eta\lambda \int\limits_0^\infty dv\, R_\gamma(v)\, Q_\gamma(v),$$

$$I_2^\gamma = \lambda \int\limits_0^\infty dv\, M_\gamma(v)\, H_\gamma(v), \qquad I_3^\gamma = \lambda \int\limits_0^\infty dv\, L_\gamma(v)\, U_\gamma(v).$$

Начнем с рассмотрения предельного поведения I_1^γ при $\gamma \to \infty$. Согласно (1.4), функция

$$R_\gamma(v) := e^{-v\sqrt{\lambda/2}}\, \mathbf{E}\Big\{ \exp\Big(-\int\limits_0^\infty g_\gamma(V_1(h))\, dh\Big) \Big| V_1(0) = v\Big\}$$

является единственным ограниченным решением задачи

$$2vR_\gamma''(v) - (\lambda v + g(v) + \gamma\, \mathbb{1}_{(\bar g,\infty)}(v))\, R_\gamma(v) = 0, \qquad R_\gamma(0) = 1. \quad (2.10)$$

Очевидно, что при $\gamma \to \infty$ имеем предельное соотношение

$$R_\gamma(v) \to e^{-v\sqrt{\lambda/2}} \bar R(v) =: R(v), \quad (2.11)$$

где

$$\bar R(v) := \mathbf{E}\Big\{ \exp\Big(-\int\limits_0^\infty g(V_1(h))\, dh\Big) \mathbb{1}_{[0,\bar g]}\Big(\sup_{h\in(0,\infty)} V_1(h)\Big) \Big| V_1(0) = v\Big\}.$$

Действительно, в выражении для функции $R_\gamma(v)$ формальную единицу после экспоненты от интегрального функционала можно представить в виде суммы

$$1 = \mathbb{1}_{[0,\bar g]}\Big(\sup_{h\in(0,\infty)} V_1(h)\Big) + \mathbb{1}_{(\bar g,\infty)}\Big(\sup_{h\in(0,\infty)} V_1(h)\Big). \quad (2.12)$$

Тогда первое слагаемое будет равно $R(v)$, а второе будет стремиться к нулю.

Имея сходимость (2.11), в задаче (2.10) можно перейти к пределу (см. аналогичный переход при доказательстве теоремы 2.1 гл. III из [1]) и получить, что функция $R(v)$, $v \in [0, \bar g]$, является единственным решением задачи (2.2).

Положим

$$\bar{L}_\gamma(v) := \mathbf{E}\Big\{ \exp\Big(-\int\limits_0^\infty f_\gamma(V_3(h))\,dh\Big) \Big| V_3(0) = v\Big\}.$$

Согласно (1.6), функция $L_\gamma(v) := e^{-v\sqrt{\lambda/2}}\bar{L}_\gamma(v)$ является единственным ограниченным решением задачи

$$2vL_\gamma''(v) - (\lambda v + f(v) + \gamma \mathbb{1}_{(\bar{f},\infty)}(v))L_\gamma(v) = 0, \qquad L_\gamma(0) = 1. \quad (2.13)$$

Как и выше, при $\gamma \to \infty$ имеем предельное соотношение

$$L_\gamma(v) \to e^{-v\sqrt{\lambda/2}}\bar{L}(v) =: L(v), \quad (2.14)$$

где

$$\bar{L}(v) := \mathbf{E}\Big\{ \exp\Big(-\int\limits_0^\infty f(V_3(h))\,dh\Big)\mathbb{1}_{[0,\bar{f}]}\Big(\sup_{h\in(0,\infty)} V_3(h)\Big) \Big| V_3(0) = v\Big\}.$$

Имея сходимость (2.14), в задаче (2.13) можно перейти к пределу (см. аналогичный переход при доказательстве теоремы 2.1 гл. III из [1]) и получить, что функция $L(v)$, $v \in [0, \bar{f}]$, является единственным решением задачи (2.4).

Положим при $b < z$

$$\bar{H}_b^\gamma(v) := \mathbf{E}\Big\{ \bar{L}_\gamma(V_2(b)) \exp\Big(-\int\limits_0^b f_\gamma(V_2(h))\,dh\Big) \Big| V_2(0) = v\Big\},$$

и $H_b^\gamma(v) := e^{-v\sqrt{\lambda/2}}\bar{H}_b^\gamma(v)$. Пусть

$$H_\gamma(v) := \int\limits_0^\infty db\, e^{-(\eta+\sqrt{2\lambda})b} H_b^\gamma(v).$$

Согласно (1.20), функция H_γ является единственным ограниченным решением уравнения

$$2vH_\gamma''(v) + 2H_\gamma'(v) - (\lambda v + \eta + f(v) + \gamma\,\mathbb{1}_{(\bar{f},\infty)}(v))H_\gamma(v) = -L_\gamma(v). \quad (2.15)$$

При $\gamma \to \infty$ имеет место предельное соотношение

$$H_\gamma(v) \to H(v), \quad (2.16)$$

где

$$H(v) := e^{-v\sqrt{\lambda/2}} \int\limits_0^\infty db\, e^{-(\eta+\sqrt{2\lambda})b} \bar H_b(v),$$

а

$$\bar H_b(v) := \mathbf{E}\Big\{\bar L(V_2(b)) \exp\Big(-\int\limits_0^b f(V_2(h))\, dh\Big) \mathbb{1}_{[0,\bar f]}\Big(\sup_{h\in(0,b)} V_2(h)\Big) \Big| V_2(0)=v\Big\}.$$

В силу сходимостей (2.14) и (2.16), в задаче (2.15) можно перейти к пределу и получить, что функция $H(v)$, $v \in [0, \bar f]$, является единственным решением задачи (2.5).

Завершим предельный переход для I_1^γ при $\gamma \to \infty$. Напомним, что в этом случае $b < z$. Имеем

$$q_b^\gamma(s,v) := e^{-v\sqrt{\lambda/2}} \mathbf{E}\Big\{\bar H_b^\gamma(V_2(s)) \exp\Big(-\int\limits_0^s g_\gamma(V_2(h))\, dh\Big) \Big| V_2(0) = v\Big\}$$

и

$$Q_b^\gamma(v) := \int\limits_0^\infty e^{-s\sqrt{2\lambda}} q_b^\gamma(s,v)\, ds, \quad Q_\gamma(v) := \int\limits_0^\infty db\, e^{-(\eta+\sqrt{2\lambda})b} Q_b^\gamma(v).$$

Функция $Q_\gamma(v)$ согласно (1.19) удовлетворяет уравнению

$$2v\, Q_\gamma''(v) + 2Q_\gamma'(v) - (\lambda v + g(v) + \gamma\, \mathbb{1}_{(\bar g,\infty)}(v))\, Q_\gamma(v) = -H_\gamma(v). \quad (2.17)$$

При $\gamma \to \infty$ имеет место предельное соотношение

$$Q_\gamma(v) \to Q(v), \quad (2.18)$$

где

$$Q(v) := e^{-v\sqrt{\lambda/2}} \int\limits_0^\infty db\, e^{-(\eta+\sqrt{2\lambda})b} \int\limits_0^\infty e^{-s\sqrt{2\lambda}} \mathbf{E}\Big\{\bar H_b(V_2(s))$$

$$\times \exp\Big(-\int\limits_0^s g(V_2(h))\, dh\Big) \mathbb{1}_{[0,\bar g]}\Big(\sup_{h\in(0,s)} V_2(h)\Big) \Big| V_2(0) = v\Big\}\, ds.$$

В силу сходимостей (2.16) и (2.18), в задаче (2.17) можно перейти к пределу и получить, что функция $Q(v)$, $v \in [0, \bar g]$, является единственным решением задачи (2.3).

В результате находим, что при $\gamma \to \infty$

$$I_1^\gamma \to \eta\lambda \int\limits_0^g dv\, R(v)\, Q(v).$$

Перейдем к рассмотрению предельного поведения I_2^γ при $\gamma \to \infty$. Имеем

$$M_\gamma(v) := \eta \int\limits_0^\infty e^{-\eta s} m_\gamma(s,v)\, ds, \quad M_\gamma(0) = 1,$$

где

$$m_\gamma(s,v) = e^{-v\sqrt{\lambda/2}}\, \mathbf{E}\Big\{ \bar{R}_\gamma(V_1(s)) \exp\Big(- \int\limits_0^s f_\gamma(V_1(h))\, dh \Big) \Big| V_1(0) = v \Big\}.$$

Функция $M_\gamma(v)$ согласно (1.8) удовлетворяет уравнению

$$2v\, M_\gamma''(v) - (\lambda v + \eta + f(v) + \gamma \mathbb{1}_{(\bar{f},\infty)}(v))\, M_\gamma(v) = -\eta R_\gamma(v). \tag{2.19}$$

При $\gamma \to \infty$ имеет место предельное соотношение

$$M_\gamma(v) \to M(v), \tag{2.20}$$

где

$$M(v) := e^{-v\sqrt{\lambda/2}} \int\limits_0^\infty ds\, e^{-\eta s} \mathbf{E}\Big\{ \bar{R}(V_1(s)) \exp\Big(- \int\limits_0^s f(V_1(h))\, dh \Big)$$
$$\times \mathbb{1}_{[0,\bar{f}]}\Big(\sup_{h \in (0,s)} V_1(h) \Big) \Big| V_1(0) = v \Big\}.$$

В силу сходимостей (2.11) и (2.20), в задаче (2.19) можно перейти к пределу и получить, что функция $M(v)$, $v \in [0, \bar{f}]$, является единственным решением задачи (2.6).

Функция $H_\gamma(v)$ удовлетворяет уравнению (2.15) и предельному соотношению (2.16).

В результате находим, что при $\gamma \to \infty$

$$I_2^\gamma \to \lambda \int\limits_0^f dv\, M(v)\, H(v).$$

Перейдем к рассмотрению предельного поведения при $\gamma \to \infty$ величины

$$I_3^\gamma = \lambda \int_0^\infty dv\, L_\gamma(v)\, U_\gamma(v).$$

Имеем сходимость (2.14). Кроме того,

$$U_\gamma(v) = \int_{-\infty}^0 e^{z\sqrt{2\lambda}}\, \mathbf{E}\Big\{ M_\gamma(V_2(z)) \exp\Big(- \int_0^z f_\gamma(V_2(h))\, dh\Big) \Big| V_2(0) = v \Big\}\, dz.$$

Функция $U_\gamma(v)$ согласно (1.9) удовлетворяет уравнению

$$2v\, U_\gamma''(v) + 2U_\gamma' - (\lambda v + f(v) + \gamma \mathbb{1}_{(\bar f, \infty)}(v))\, U_\gamma(v) = -M_\gamma(v). \qquad (2.21)$$

В силу (2.20), при $\gamma \to \infty$ имеет место предельное соотношение

$$U_\gamma(v) \to U(v), \qquad (2.22)$$

где

$$U(v) := \int_{-\infty}^0 e^{z\sqrt{2\lambda}} \mathbf{E}\Big\{ M(V_2(z)) \exp\Big(- \int_0^z f(V_2(h))\, dh\Big) dz.$$
$$\times \mathbb{1}_{[0,\bar f]}\Big(\sup_{h \in (0,s)} V_2(h)\Big) \Big| V_2(0) = v \Big\}.$$

В силу сходимостей (2.20) и (2.22), в задаче (2.21) можно перейти к пределу и получить, что функция $U(v)$, $v \in [0, \bar f]$, является единственным решением задачи (2.7).

В результате находим, что при $\gamma \to \infty$

$$I_3^\gamma \to \lambda \int_0^f dv\, L(v)\, U(v).$$

Окончательно получим

$$\lim_{\gamma \to \infty} E_\gamma = \eta\lambda \int_0^g R(v)\, Q(v)\, dv + \lambda \int_0^f M(v)\, H(v)\, dv + \lambda \int_0^f L(v)\, U(v)\, dv.$$

Теорема 2.1 доказана. □

3. Распределение супремумов броуновского локального времени на смежных интервалах

Мы хотим вычислить выражение для

$$\eta \int_0^\infty e^{-\eta b}\,\mathbf{P}\Big(\sup_{y\in(-\infty,b)} \ell(\tau_\lambda,y) \leqslant f,\ \sup_{y\in(b,\infty)} \ell(\tau_\lambda,y)\leqslant g\Big)\,db, \tag{3.1}$$

где τ_λ распределено по закону (1.2). Для упрощения вычислений достаточно найти это выражение при $\lambda = 2$ и с параметром 2η вместо η. Действительно, можно воспользоваться свойством автомодельности броуновского движения и, следовательно, броуновского локального времени (см. замечание 1.1 гл. V из [1]). Для упрощения записи мы можем заменить в (2.1) $\bar f$ на f и $\bar g$ на g, так как это в данном параграфе не приводит к путанице с обозначением функций $f(v)$ и $g(v)$ как в предыдущем параграфе.

Для процесса $\ell(t,x)$, $(t,x)\in[0,\infty)\times\mathbf{R}$, справедливо *свойство автомодельности*: при любом фиксированном $c>0$ конечномерные распределения процесса $\sqrt{c}\,\ell(t/c, x/\sqrt{c})$ совпадают с конечномерными распределениями процесса $\ell(t,x)$.

Тогда случайная величина τ_λ распределена как $\tau_2/(\lambda/2)$ и распределения процесса $\ell(\tau_\lambda,y)$, $y\in\mathbf{R}$, совпадают с распределениями процесса $\ell(\tau_2/(\lambda/2),y)$, а по свойству автомодельности с распределениями процесса $\dfrac{1}{\sqrt{\lambda/2}}\ell(\tau_2, y\sqrt{\lambda/2})$, $y\in\mathbf{R}$. В связи с этим выражение (3.1) вытекает из нижеследующего выражения при замене $\eta\to\eta/\sqrt{2\lambda}$, $f\to f\sqrt{\lambda/2}$ и $g\to g\sqrt{\lambda/2}$.

Теорема 3.1. *Пусть $f\leqslant g$, тогда*

$$2\eta\int_0^\infty e^{-2\eta b}\mathbf{P}\Big(\sup_{y\in(-\infty,b)}\ell(\tau_2,y)\leqslant f,\ \sup_{y\in(b,\infty)}\ell(\tau_2,y)\leqslant g\Big)\,db$$

$$= 1 - \frac{f}{\operatorname{sh} g \operatorname{sh} f}\Big(\frac{I_1(f)}{I_0(g)} + \operatorname{sh}(g-f) + \operatorname{ch}(g-f)\frac{I_1(f)}{I_0(f)}\Big)$$

$$+\frac{f}{\operatorname{sh} g\operatorname{sh} f(\eta^2-1)}\bigg\{\Big(\frac{H_0'(f)}{H_0(f)}-\eta\Big)\Big(\operatorname{ch}(g-f)+\operatorname{sh}(g-f)\frac{M_0'(f)}{M_0(f)}-\frac{I_0(f)}{I_0(g)}\Big)$$

$$-\operatorname{sh}(g-f)\Big[1+\frac{\eta}{f}+\eta\frac{I_1(f)}{I_0(f)}-\frac{M_0'(f)}{M_0(f)}\Big(\eta+\frac{I_1(f)}{I_0(f)}\Big)\Big]\bigg\},$$

где

$$\frac{H_0'(f)}{H_0(f)} = -1 + (\eta+1)\frac{M(\frac{\eta+3}{2},2,2f)}{M(\frac{\eta+1}{2},1,2f)}, \qquad \frac{M_0'(f)}{M_0(f)} = 1 + \frac{M(\frac{\eta}{2},1,2f)}{fM(\frac{\eta+2}{2},2,2f)}.$$

Следствие 3.1. *При $g\to\infty$ имеем*

$$2\eta\int_0^\infty e^{-2\eta b}\mathbf{P}\Big(\sup_{y\in(-\infty,b)}\ell(\tau,y)\leqslant f\Big)\,db = 1-\frac{fe^{-f}}{\operatorname{sh} f}\Big(1+\frac{I_1(f)}{I_0(f)}\Big)$$

$$+\frac{fe^{-f}}{\operatorname{sh} f(\eta^2-1)}\Big\{\Big(\frac{H_0'(f)}{H_0(f)}-\eta\Big)\Big(1+\frac{M_0'(f)}{M_0(f)}\Big)-1-\frac{\eta}{f}-\eta\frac{I_1(f)}{I_0(f)}+\frac{M_0'(f)}{M_0(f)}\Big(\eta+\frac{I_1(f)}{I_0(f)}\Big)\Big\}.$$

Замечание 3.1. При $f=g$, очевидно,

$$\Big\{\sup_{y\in(-\infty,b)}\ell(\tau,y)\leqslant f,\ \sup_{y\in(b,\infty)}\ell(\tau,y)\leqslant f\Big\} = \Big\{\sup_{y\in\mathbf{R}}\ell(\tau,y)\leqslant f\Big\},$$

и

$$2\eta\int_0^\infty e^{-2\eta b}\mathbf{P}\Big(\sup_{y\in\mathbf{R}}\ell(\tau,y)\leqslant f\Big)\,db = 1-\frac{2fI_1(f)}{\operatorname{sh}^2 fI_0(f)},$$

что согласуется с формулой (5.21) гл. V из [1] или с формулой 1.1.11.2 из [4].

Доказательство. Для удобства применим теорему 2.1 с $\lambda=2$, с заменой η на 2η и с $g(v)\equiv 0$, $f(v)\equiv 0$. При таком выборе параметров уравнения (2.2)–(2.7) значительно упрощаются. Решения задач (2.2) и (2.4) в этом случае имеют следующий вид:

$$R(v) = \frac{\operatorname{sh}(g-v)}{\operatorname{sh} g}, \qquad 0\leqslant v\leqslant g, \tag{3.2}$$

$$L(v) = \frac{\operatorname{sh}(f-v)}{\operatorname{sh} f}, \qquad 0\leqslant v\leqslant f. \tag{3.3}$$

Правее соответственно точек g и f эти решения зануляются.

Решим задачу (2.5) при $f(v)\equiv 0$. При $v\in[0,f]$ рассмотрим уравнение

$$vH''(v)+H'(v)-(v+\eta)H(v) = -\frac{\operatorname{sh}(f-v)}{2\operatorname{sh} f}.$$

Частное решение H_p имеет вид

$$H_p(v) = \frac{\eta\operatorname{sh}(f-v)-\operatorname{ch}(f-v)}{2(\eta^2-1)\operatorname{sh} f}.$$

Ограниченное в нуле решение однородного уравнения имеет вид (см. [1], приложение 4, формулу 16 при $\nu = 0$, $p = 0$)

$$H_0(v) = \frac{1}{\sqrt{v}} M_{-\eta/2,0}(2v) = \sqrt{2}e^{-v} M\Big(\frac{\eta+1}{2}, 1, 2v\Big), \tag{3.4}$$

где $M_{n,m}(x)$ – функция Уиттекера, а $M(a, b, x)$ – функция Куммера (см. [5], гл. 13 или [1], приложение 2).

В итоге, искомое решение задачи таково:

$$H(v) = \frac{1}{2(\eta^2 - 1)\operatorname{sh} f}\Big(\eta \operatorname{sh}(f - v) - \operatorname{ch}(f - v) + \frac{H_0(v)}{H_0(f)}\Big). \tag{3.5}$$

Решим задачу (2.6) при $f(v) \equiv 0$. При $v \in [0, f]$ рассмотрим уравнение

$$vM''(v) - (v + \eta)M(v) = -\eta \frac{\operatorname{sh}(g - v)}{\operatorname{sh} g} \mathbb{1}_{[0,g]}(v).$$

При $f \leqslant g$ частное решение $M_p(v)$, $v \in [0, f]$, имеет вид $\dfrac{\operatorname{sh}(g - v)}{\operatorname{sh} g}$. Зануляющееся в нуле решение однородного уравнения имеет вид (см. [1], приложение 4, формулу 6 при $p = 1/2$)

$$M_0(v) = M_{-\eta/2,1/2}(2v) = 2ve^{-v} M\Big(\frac{\eta+2}{2}, 2, 2v\Big). \tag{3.6}$$

Важно, что $M_0(0) = 0$. В итоге, искомое решение задачи таково:

$$M(v) = \frac{\operatorname{sh}(g - v)}{\operatorname{sh} g} - \frac{\operatorname{sh}(g - f)M_0(v)}{\operatorname{sh} g M_0(f)}. \tag{3.7}$$

Решим задачу (2.7) при $f(v) \equiv 0$. При $v \in [0, f]$ рассмотрим уравнение

$$vU''(v) + U'(v) - vU(v) = -\frac{M(v)}{2}.$$

Можно проверить, что при $f \leqslant g$ частное решение $\alpha(v)$, $v \in [0, f]$, уравнения

$$vU''(v) + U'(v) - vU(v) = -\frac{\operatorname{sh}(g - v)}{2\operatorname{sh} g} + \frac{\operatorname{sh}(g - f)M_0(v)}{2\operatorname{sh} g M_0(f)}$$

имеет вид

$$\alpha(v) = \frac{\operatorname{ch}(g - v)}{2\operatorname{sh} g} + \frac{\operatorname{sh}(g - f)(\eta M_0(v) - M_0'(v))}{2\operatorname{sh} g(\eta^2 - 1)M_0(f)}.$$

Ограниченным в нуле решением однородного уравнения (см. [1], приложение 4, формулу 11 при $\nu = 0$) является модифицированная функция Бесселя $I_0(v)$. В итоге, искомое решение задачи таково:

$$U(v) = \alpha(v) - \alpha(f)\frac{I_0(v)}{I_0(f)}. \tag{3.8}$$

Решим задачу (2.3) при $g(v) \equiv 0$. При $v \in [0, g]$ рассмотрим уравнение

$$vQ''(v) + Q'(v) - vQ(v) = -\frac{H(v)}{2}\mathbb{1}_{[0,f]}(v)$$

с граничным условием $Q(g) = 0$. Ограниченное в нуле непрерывно дифференцируемое решение этого уравнения ищем в виде

$$Q(v) = \begin{cases} \beta(v) + AI_0(v), & 0 \leqslant v \leqslant f, \\ B\Big(\frac{K_0(g)}{I_0(g)}I_0(v) - K_0(v)\Big), & f \leqslant v \leqslant g, \end{cases} \tag{3.9}$$

где $\beta(v)$, $v \in [0, f]$, – частное решение уравнения

$$vQ''(v)+Q'(v)-vQ(v) = -\frac{\eta \operatorname{sh}(f-v)}{4(\eta^2-1)\operatorname{sh} f} + \frac{\operatorname{ch}(f-v)}{4(\eta^2-1)\operatorname{sh} f} - \frac{H_0(v)}{4(\eta^2-1)\operatorname{sh} f H_0(f)}.$$

Нетрудно проверить, что решение имеет вид

$$\beta(v) = \frac{1}{4(\eta^2-1)\operatorname{sh} f}\Big(\eta \operatorname{ch}(f-v) - \operatorname{sh}(f-v) - \frac{H_0(v)}{\eta H_0(f)}\Big).$$

Система алгебраических уравнений, вытекающих из (3.9) при условии непрерывности решения и его производной в точке f, имеет решение

$$A = f\beta'(f)\Big(\frac{K_0(g)}{I_0(g)}I_0(f) - K_0(f)\Big) - f\beta(f)\Big(\frac{K_0(g)}{I_0(g)}I_1(f) + K_1(f)\Big),$$
$$B = f(\beta'(f)I_0(f) - \beta(f)I_1(f)).$$

В результате имеем

$$Q(v) = \begin{cases} \beta(v) + f\beta'(f)\Big(\frac{K_0(g)}{I_0(g)}I_0(f) - K_0(f)\Big)I_0(v) & \\ \qquad -f\beta(f)\Big(\frac{K_0(g)}{I_0(g)}I_1(f) + K_1(f)\Big)I_0(v), & 0 \leqslant v \leqslant f, \\ f(\beta'(f)I_0(f) - \beta(f)I_1(f))\Big(\frac{K_0(g)}{I_0(g)}I_0(v) - K_0(v)\Big), & f \leqslant v \leqslant g. \end{cases}$$

Для вычисления интегралов, стоящих в правой части (2.1), принципиальное значение имеет следующий результат (см. § 5 гл. V из [1]).

Лемма 3.1. *Пусть $X(v)$, $Y(v)$, $v > 0$, – решения уравнений*

$$vX'' - (\sigma + \theta v)X = F(v),$$
$$vY'' + Y' - (\delta + \theta v)Y = G(v).$$

Тогда

$$(\theta - (\delta - \sigma)^2)\int XY\,dv = (\sigma + \theta v)XY + (\delta - \sigma)v(X'Y - XY') - vX'Y'$$

$$+(\delta-\sigma)\Big(\int XG\,dv-\int YF\,dv\Big)+\int X'G\,dv+\int Y'F\,dv.$$

Эта формула может быть легко проверена дифференцированием. Применяя лемму при $\sigma=\delta=0$, $\theta=1$, получим

$$\int_0^g R(v)\,Q(v)\,dv=-gR'(g)\,Q'(g)-\int_0^g R'(v)\frac{H(v)}{2}\mathbb{1}_{[0,f]}(v)\,dv,$$

$$\int_0^f L(v)\,U(v)\,dv=-fL'(f)\,U'(f)-\int_0^f L'(v)\frac{M(v)}{2}\,dv,$$

а при $\sigma=\delta=\eta$, $\theta=1$, получим

$$\int_0^f M(v)\,H(v)\,dv=-fM'(f)\,H'(f)-\eta M(0)\,H(0)$$

$$-\int_0^f M'(v)\frac{L(v)}{2}\,dv-\eta\int_0^f H'(v)\,R(v)\,dv.$$

Собирая эти интегралы с применением интегрирования по частям, имеем

$$4\eta\int_0^g R(v)Q(v)dv+2\int_0^f M(v)\,H(v)\,dv+2\int_0^f L(v)U(v)\,dv=-4\eta gR'(g)\,Q'(g)$$

$$+4\eta R(0)\frac{H(0)}{2}+4\eta\int_0^f R(v)\frac{H'(v)}{2}dv-2fM'(f)\,H'(f)-2\eta M(0)\,H(0)$$

$$+M(0)L(0)+\int_0^f L'(v)\,M(v)\,dv-2\eta\int_0^f R(v)\,H'(v)dv-2fL'(f)\,U'(f)$$

$$-\int_0^f L'(v)\,M(v)\,dv=1-4\eta gR'(g)\,Q'(g)-2fM'(f)\,H'(f)-2fL'(f)\,U'(f).$$

Дифференцируя формулы (3.2), (3.3), (3.5), (3.7), (3.8) и (3.9), получим

$$R'(g)=-\frac{1}{\operatorname{sh} g},\quad L'(f)=-\frac{1}{\operatorname{sh} f},\quad H'(f)=\frac{1}{2(\eta^2-1)\operatorname{sh} f}\Big(\frac{H_0'(f)}{H_0(f)}-\eta\Big),$$

$$M'(f) = -\frac{1}{\operatorname{sh} g}\Big(\operatorname{ch}(g-f) + \operatorname{sh}(g-f)\frac{M_0'(f)}{M_0(f)}\Big),$$

$$U'(f) = \frac{1}{2\operatorname{sh} g}\Big\{-\operatorname{sh}(g-f) + \big(1+\frac{\eta}{f}\big)\frac{\operatorname{sh}(g-f)}{(1-\eta^2)} - \frac{\eta\operatorname{sh}(g-f)}{(1-\eta^2)}\frac{M_0'(f)}{M_0(f)}$$

$$-\Big(\operatorname{ch}(g-f) - \frac{\eta\operatorname{sh}(g-f)}{(1-\eta^2)} + \frac{\operatorname{sh}(g-f)}{(1-\eta^2)}\frac{M_0'(f)}{M_0(f)}\Big)\frac{I_1(f)}{I_0(f)}\Big\},$$

$$Q'(g) = \frac{f}{4g(\eta^2-1)\operatorname{sh} f}\Big(1 - \frac{H_0'(f)}{\eta H_0(f)}\Big)\frac{I_0(f)}{I_0(g)} - \frac{fI_1(f)}{4g\eta\operatorname{sh} f I_0(g)},$$

где функции $H_0(v)$ и $M_0(v)$ определены формулами (3.4) и (3.6).

Подставляя эти выражения в (3.10), получаем, что при $f \leqslant g$

$$2\eta\int_0^\infty e^{-2\eta b}\mathbf{P}\Big(\sup_{y\in(-\infty,b)}\ell(\tau,y)\leqslant f, \sup_{y\in(b,\infty)}\ell(\tau,y)\leqslant g\Big)\,db$$

$$= 1 + \frac{f}{\operatorname{sh} g\operatorname{sh} f}\Big\{\frac{1}{(\eta^2-1)}\Big(\eta - \frac{H_0'(f)}{H_0(f)}\Big)\frac{I_0(f)}{I_0(g)} - \frac{I_1(f)}{I_0(g)}\Big\}$$

$$+\frac{f}{\operatorname{sh} g\operatorname{sh} f(\eta^2-1)}\Big(\frac{H_0'(f)}{H_0(f)} - \eta\Big)\Big(\operatorname{ch}(g-f) + \operatorname{sh}(g-f)\frac{M_0'(f)}{M_0(f)}\Big)$$

$$+\frac{f}{\operatorname{sh} g\operatorname{sh} f}\Big\{-\operatorname{sh}(g-f) + \big(1+\frac{\eta}{f}\big)\frac{\operatorname{sh}(g-f)}{(1-\eta^2)} - \frac{\eta\operatorname{sh}(g-f)}{(1-\eta^2)}\frac{M_0'(f)}{M_0(f)}$$

$$-\Big(\operatorname{ch}(g-f) - \frac{\eta\operatorname{sh}(g-f)}{(1-\eta^2)} + \frac{\operatorname{sh}(g-f)}{(1-\eta^2)}\frac{M_0'(f)}{M_0(f)}\Big)\frac{I_1(f)}{I_0(f)}\Big\}$$

$$= 1 - \frac{f}{\operatorname{sh} g\operatorname{sh} f}\Big(\frac{I_1(f)}{I_0(g)} + \operatorname{sh}(g-f) + \operatorname{ch}(g-f)\frac{I_1(f)}{I_0(f)}\Big)$$

$$+\frac{f}{\operatorname{sh} g\operatorname{sh} f(\eta^2-1)}\Big\{\Big(\frac{H_0'(f)}{H_0(f)} - \eta\Big)\Big(\operatorname{ch}(g-f) + \operatorname{sh}(g-f)\frac{M_0'(f)}{M_0(f)} - \frac{I_0(f)}{I_0(g)}\Big)$$

$$-\operatorname{sh}(g-f)\Big[1 + \frac{\eta}{f} + \eta\frac{I_1(f)}{I_0(f)} - \frac{M_0'(f)}{M_0(f)}\Big(\eta + \frac{I_1(f)}{I_0(f)}\Big)\Big]\Big\},$$

где

$$\frac{H_0'(f)}{H_0(f)} = -1 + (\eta+1)\frac{M(\frac{\eta+3}{2},2,2f)}{M(\frac{\eta+1}{2},1,2f)}, \qquad \frac{M_0'(f)}{M_0(f)} = 1 + \frac{M(\frac{\eta}{2},1,2f)}{fM(\frac{\eta+2}{2},2,2f)}.$$

Теорема 3.1 доказана. □

Список литературы

1. А. Н. Бородин, *Случайные процессы.* Санкт-Петербург, Лань, 2017.
2. F. B. Knight, *Random walks and a sojourn density process of Brownian motion.* — Trans. Amer. Math. Soc. **109** (1963), 56–86.
3. D. B. Ray, *Sojourn times of a diffusion process.* — Ill. J. Math. **7** (1963) 615–630.
4. А. Н. Бородин, П. Салминен, *Справочник по броуновскому движению. Факты и формулы.* Санкт-Петербург, Лань, 2016.
5. М. Абрамовиц, И. Стиган, *Справочник по специальным функциям.* Москва, Наука, 1979.

Borodin A. N. On the distribution of inhomogeneous functionals of Brownian local time.

We consider the question: how to calculate distributions of the simplest inhomogeneous integral functional of Brownian local time with respect to space parameter. For the Laplace transform of distribution of such a functional we obtaine formulas expressed in terms of solutions of the second order differential equations, satisfying some boundary conditions. As an application of these formulas the joint distribution of suprema of Brownian local time at adjacent intervals are derived.

С.-Петербургское отделение
Математического института
им. В. А. Стеклова РАН

E-mail: borodin@pdmi.ras.ru

Поступило 17 сентября 2023 г.