Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 526, 2023 г.

Я. И. Белопольская, А. А. Чубатов

ОПТИМИЗАЦИЯ ИНВЕСТИЦИОННОГО ПОРТФЕЛЯ В МОДЕЛИ ХЕСТОНА

§1. Введение

Задача оптимизации портфельных инвестиций представляет собой одну из важных проблем финансовой математики, наряду с задачами нахождения безарбитражных цен различных опционов. В классической модели Блэка–Шоулса эти задачи хорошо изучены [1]. Значительно менее они исследованы в более сложных моделях, в частности, в моделях со стохастической волатильностью. В этой работе мы опишем постановку и решение задачи построения оптимального портфеля в модели Хестона в терминах решения системы прямого и обратного стохастических дифференциальных уравнений (СДУ и ОСДУ).

Проблемы, возникающие при построении безарбитражной цены опциона и нахождении оптимального инвестиционного портфеля в модели Хестона [2], связаны с тем, что рассматриваемый рынок – неполный и на нем нельзя однозначно определить безарбитражную цену на новый финансовый продукт, если неизвестна рыночная цена риска. Если же рыночная цена риска известна, то можно обсуждать вопросы оптимизации портфельных инвестиций. При этом, так же как и в случае модели Блэка–Шоулса [3], удается вывести уравнение Гамильтона–Якоби–Беллмана (ГЯБ) и показать, что стоимость оптимального портфеля удовлетворяет задаче Коши для некоторого полностью нелинейного параболического уравнения.

Ключевые слова: оптимальное управление, стохастическая волатильность, модель Хестона, обратные стохастические уравнения, нейронные сети.

Работа поддержана грантом РНФ 22-21-00016. Работа поддержана Министерством науки и высшего образования Российской Федерации, соглашение No. 075-10-2021-093; Проект FMF-RND-2122.

Одним из подходов к решению задачи Коши для этого уравнения является сведение этой задачи к задаче нахождения решения системы прямого и обратного стохастических уравнений (ПОСДУ). Недавно было показано [4, 5, 6], что решение ПОСДУ можно, в свою очередь, свести к новой оптимизационной задаче. Отметим, что ни один из упомянутых подходов не позволяет построить явное решение исходной задачи, однако в рамках последнего подхода для построения приближенного решения можно использовать нейронные сети.

Этот новый подход к решению задачи Коши для полностью нелинейных уравнений представляется очень интересным, поскольку он позволяет численно решать многомерные задачи, позволяя преодолевать так называемое «проклятие размерности» [7].

В этой работе нам понадобится комбинация двух вероятностных подходов к построению задачи Коши для полностью нелинейных параболических уравнений. В рамках одного из них, предложенного в работах [8, 9, 10, 11], исходное полностью нелинейное уравнение интерпретируется как компонента некоторой системы семилинейных параболических уравнений и затем решение задачи Коши для этой системы сводится к решению соответствующей стохастической задачи, описывающей базовый диффузионный процесс $\xi(t)$ и мультипликативный функционал $\eta(t)$ от этого процесса. В терминах процессов $\xi(t)$ и $\eta(t)$ строится вероятностное представление решения задачи Коши для полностью нелинейного параболического уравнения.

В рамках второго подхода, основанного на теории обратных стохастических уравнений (ОСДУ) [12, 13], задачу Коши для исходного полностью нелинейного параболического уравнения достаточно свести к системе квазилинейных уравнений, далее рассмотреть соответствующее ПОСДУ и построить интересующее нас решение задачи Коши для полностью нелинейного параболического уравнения как решение этого ПОСДУ [14].

Мы предлагаем модифицированный вариант сведения решения задачи Коши для полностью нелинейных параболических уравнений к системе квазилинейных уравнений, как в работе [11], с последующим выводом соответствующей стохастической задачи. Стохастическая задача представляет собой ПОСДУ, решение которого можно свести к новой задаче оптимизации, приближенное численное решение которой можно построить с использованием нейронных сетей.

Далее статья организована следующим образом.

Во втором параграфе мы выводим уравнение ГЯБ для стоимости оптимального портфеля в модели Хестона и показываем, что оптимальный капитал портфеля удовлетворяет некоторому полностью нелинейному параболическому уравнению.

В третьем параграфе мы обсуждаем связь между ПОСДУ и полностью нелинейными параболическими уравнениями.

В четвертом параграфе мы применяем полученные результаты к построению алгоритма численного решения уравнения ГЯБ в модели Хестона.

§2. Оптимизация инвестиционного портфеля в модели Хестона

Пусть $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ – вероятностное пространство с фильтрацией $\mathcal{F}=(\mathcal{F}_t)_{t\geqslant 0}$, порожденной коррелированными винеровскими процессами $w^1(t)$, $w^2(t)$, коэффициент корреляции которых равен $\rho \in (-1, 1)$, т.е. $\mathbf{E}[w_t^1 w_t^2] = \rho t$.

Рассмотрим рынок с двумя базовыми активами, стоимость которых $S_0(\tau)$ и $S_1(\tau)$ соответственно. Пусть динамика стоимости безрискового базового актива $S_0(\tau)$ задается соотношением

$$dS_0(\tau) = rS_0(\tau)\,d\tau, \quad S_0(t) = 1, \quad 0 \leqslant t \leqslant \tau \leqslant T, \tag{2.1}$$

а динамика стоимости рискового базового актива $S_1(\tau)$ определяется моделью Хестона:

$$\begin{cases} dS_1(\tau) = S_1(\tau)\left(\mu\,d\tau + \sqrt{\nu(\tau)}\,dw^1(\tau)\right), \quad S_1(t) = s, \\ d\nu(\tau) = \kappa(\theta - \nu(\tau))\,d\tau + \sigma\sqrt{\nu(\tau)}\,dw^2(\tau), \quad \nu(t) = \nu, \end{cases} \tag{2.2}$$

для констант $r \geqslant 0$, $\kappa, \theta, \sigma > 0$. Будем предполагать, что задача корректна, то есть выполнено условие Феллера $2\kappa\theta \geqslant \sigma^2$.

Рассмотрим портфель, капитал $X(\tau)$ которого задан соотношением

$$X(\tau) = h_0(\tau)\,S_0(\tau) + h_1(\tau)\,S_1(\tau), \tag{2.3}$$

где $h_1(t)$ – число рисковых активов и $h_0(\tau)\,S_0(\tau)$ – капитал, вложенный в безрисковый актив (банковский счет). Портфель $(h_0(\tau), h(\tau))$ называют абсолютным портфелем. Соответствующий ему относительный портфель задается соотношениями

$$\pi_0(\tau) = \frac{h_0(\tau)\,S_0(\tau)}{X(\tau)}, \quad \pi(\tau) = \frac{h(\tau)\,S_1(\tau)}{X(\tau)}.$$

При этом $\pi_0(\tau) + \pi(\tau) = 1$.

Портфель называется самофинансируемым, если справедливо соотношение $dX(\tau) = h_0(\tau)\, dS_0(\tau) + h(\tau)\, dS_1(\tau)$. Капитал самофинансируемого портфеля в модели Хестона задается соотношением

$$\begin{aligned} dX(\tau) &= X(\tau) \left(\pi_0(\tau) r\, d\tau + \pi(\tau) \left(\mu\, d\tau + \sqrt{\nu(\tau)}\, dw^1(\tau)\right)\right) \\ &= X(\tau) \left(r + \pi(\tau)(\mu - r)\, d\tau + \sqrt{\nu(\tau)}\, dw^1(\tau)\right), \quad X(t) = x. \end{aligned} \tag{2.4}$$

Для того, чтобы найти цену $F(t, s, \nu)$ нового платежного обязательства, можно рассмотреть портфель, содержащий безрисковый актив, цена которого $S_0(\tau)$, рисковый актив, цена которого $S_1(\tau)$, и два опциона: интересующий нас опцион с ценой $F(t, s, \nu)$ и опцион с известной ценой $F_1(t, s, \nu)$. Создание такого портфеля мотивировано неполнотой рынка в модели Хестона.

Напомним, что справедливая цена $F(t, s, \nu)$ опциона с платежным обязательством $\Phi(s, \nu)$ определяется по риск-нейтральной мере Q, абсолютно непрерывной относительно исторической меры P. Существует несколько методов определения меры Q. Для произвольного платежного обязательства $\Phi(s, \nu)$ с хорошими свойствами его справедливую цену $F(t, s, \nu)$ в модели Хестона можно найти с помощью описанного выше самофинансируемого портфеля. При этом справедливую цену, а следовательно и мартингальную меру Q в модели Хестона, можно найти однозначно, если известна рыночная цена риска λ.

Динамика рынка в модели Хестона, рассматриваемая на пространстве $(\Omega, \mathcal{F}, Q)$, задается системой СДУ

$$\begin{cases} dS(\tau) = rS(\tau)\, d\tau + \sqrt{\nu(\tau)} S(\tau) d\tilde{w}^1(\tau), & S(t) = s, \\ d\nu(\tau) = \tilde{\kappa}(\tilde{\theta} - \nu(\tau))\, d\tau + \sigma \sqrt{\nu(\tau)} d\tilde{w}^2(\tau), & \nu(t) = \nu, \end{cases} \tag{2.5}$$

где $\tilde{w}^1(\tau), \tilde{w}^2(\tau) \in R$ – коррелированные винеровские процессы относительно мартингальной меры Q, $\mathbf{E}[\tilde{w}^1(t)\tilde{w}^2(t)] = \rho t$.

Коэффициенты $\tilde{\kappa}$ и $\tilde{\theta}$ в (2.5) задаются соотношениями

$$\tilde{\kappa} = \kappa + \lambda(t, \nu), \quad \tilde{\theta} = \frac{\kappa\theta}{\kappa + \lambda(t, \nu)}, \tag{2.6}$$

где $\lambda(t, \nu)$ – рыночная цена риска.

Плотность мартингальной меры Q относительно меры P имеет вид

$$\frac{dQ}{dP}\Big|_{\mathcal{F}_t} = \exp\left\{ -\frac{1}{2} \int_0^t |a(\tau)|^2\, d\tau - \int_0^t a(\tau) \cdot dW(\tau) \right\}. \tag{2.7}$$

Здесь

$$a(\tau) = \left(\frac{\mu - r}{\sqrt{\nu(\tau)}}, \frac{\lambda\sqrt{\nu(\tau)}}{\sigma} \right) = (a^1(\tau), a^2(\tau)),$$

а $W(\tau) = \big(w^1(\tau), w^2(\tau)\big)$.

В силу теоремы Гирсанова, процессы $\tilde{w}^j(t), j = 1, 2$, определяемые соотношениями $\tilde{w}^j(t) = w^j(t) + \int\limits_0^t a^j(\tau)\, d\tau$, являются Q-винеровскими процессами, если снос $a^j(\tau)$ удовлетворяет условию Новикова.

Положим $\lambda(t, \nu) = \lambda\nu$, где λ – положительная константа, и будем считать, что замена $(\kappa, \theta) \to (\tilde{\kappa}, \tilde{\theta})$ произведена, при этом для удобства сохраним прежние обозначения (κ, θ).

Безарбитражная цена опциона $F(t, s, \nu)$ удовлетворяет задаче Коши

$$\begin{gathered} F_t + rsF_s + \kappa(\theta - \nu)F_\nu + \frac{1}{2}s^2\nu F_{ss} + \frac{1}{2}\sigma^2\nu F_{\nu\nu} + s\nu\sigma\rho F_{s\nu} - rF = 0, \\ F(T, s, \nu) = \Phi(s, \nu), \end{gathered} \tag{2.8}$$

и уравнение (2.8) называют уравнением Хестона. Здесь и ниже мы используем $F_t = \frac{\partial F}{\partial t}$, $F_s = \frac{\partial F}{\partial s}$, $F_\nu = \frac{\partial F}{\partial \nu}$ для обозначения частных производных.

Перейдем к задаче построения оптимального портфеля в модели Хестона. Рассмотрим инвестиционный самофинансируемый портфель, капитал $X(t)$, которого задан соотношением (2.3).

Выбрав в качестве управляющего параметра $\pi(t)$, будем искать его оптимальное значение $\pi^*(t)$, максимизирующее целевую функцию вида

$$J(t, x, \nu; \pi) = \mathbf{E}\left[\Phi(X(T)) \,|\, X(t) = x, \nu(t) = \nu\right],$$

и обозначим $V(t, x, \nu)$ оптимальную стоимость портфеля

$$V(t, x, \nu) = \sup_\pi J(t, x, \nu; \pi) = J(t, x, \nu; \pi^*). \tag{2.9}$$

Напомним, что если $F(t, x, \nu)$ дважды дифференцируема по x и по ν, то в силу формулы Ито

$$\begin{aligned} dF(t, X(t), \nu(t)) = {} & \big(F_t(t, X(t), \nu(t)) + [\mathcal{A}^\pi F](t, X(t), \nu(t))\big)\, dt \\ & + F_x(t, X(t), \nu(t))X(t)\sqrt{\nu(t)}\, dw^1(t) \\ & + F_\nu(t, X(t), \nu(t))\sigma\sqrt{\nu(t)}\, dw^2(t), \end{aligned} \tag{2.10}$$

где

$$\mathcal{A}^{\pi}F(t,x,\nu) = xrF_x + (\mu - r)\pi xF_x + \kappa(\theta - \nu)F_\nu \\ + \frac{1}{2}\pi^2x^2\nu F_{xx} + \frac{1}{2}\sigma^2\nu F_{\nu\nu} + \rho\pi\nu xF_{x\nu}. \tag{2.11}$$

Отсюда нетрудно вывести, что функция $V(t,x,\nu)$ вида (2.9), если она дважды дифференцируема по x и по ν, удовлетворяет задаче Коши для уравнения Гамильтона–Якоби–Беллмана

$$V_t(t,x,\nu) + \max_{\pi}[\mathcal{A}^{\pi}V(t,x,\nu)] = 0, \quad V(T,x,\nu) = \Phi(x,\nu). \tag{2.12}$$

Оптимальное значение π^*, при котором достигается максимум в (2.9), задается соотношением

$$\pi^* = -\frac{(\mu - r)V_x + \rho\nu V_{x\nu}}{x\nu V_{xx}}. \tag{2.13}$$

Подставляя $\mathcal{A}^{\pi^*}$ в (2.12), мы получим задачу Коши, которой удовлетворяет максимальный капитал $V(t,x,\nu)$ портфеля

$$V_t + xrV_x - (\mu - r)V_x\frac{(\mu - r)V_x + \rho\nu V_{x\nu}}{\nu V_{xx}} + \kappa(\theta - \nu)V_\nu \\ + \frac{1}{2}\frac{\big((\mu - r)V_x + \rho\nu V_{x\nu}\big)^2}{\nu V_{xx}} + \frac{1}{2}\sigma^2\nu V_{\nu\nu} \\ - \rho V_{x\nu}\frac{(\mu - r)V_x + \rho\nu V_{x\nu}}{V_{xx}} = 0, \quad V(T,x,\nu) = V_0(x,\nu). \tag{2.14}$$

Полученное уравнение представляет собой полностью нелинейное параболическое уравнение. В этой работе мы модифицируем подход, предложенный в работе [14], и сводим решение задачи Коши (2.12) к системе, состоящей из прямого и обратного стохастических дифференциальных уравнений (ПОСДУ).

§3. ПОСДУ и полностью нелинейные параболические уравнения

Наша цель – свести решение задачи Коши (2.14) к решению некоторого ПОСДУ, модифицируя подход, предложенный в работе [14]. и состоящий в следующем. Рассмотрим задачу Коши

$$g_t + \Psi(x, g, \nabla g, \nabla^2 g) = 0, \quad g(T,x) = g_0(x) \in R, \quad x \in R^d. \tag{3.1}$$

Предположим, что функция $\Psi(x, g, v, \gamma)$, $x, v \in R^d$, $g \in R$, $\gamma \in R^d \otimes R^d$, дифференцируема по всем аргументам, и преобразуем рассматриваемое уравнение, записав его в виде

$$g_t + \frac{1}{2} \operatorname{Tr} A(x)\nabla^2 g A^+(x) + \Phi(x, g, \nabla g, \nabla^2 g) = 0, \tag{3.2}$$

где ∇g, $\nabla^2 g$ – градиент и гессиан функции g, A^+ – транспонированная матрица и

$$\Phi(x, g, v, \gamma) = \Psi(x, g, v, \gamma) - \frac{1}{2} \operatorname{Tr} A(x)\gamma A^+(x).$$

Предположим, что $A(x)$ – липшицева ограниченная функция и $\xi(t) \in R^d$ – случайный процесс, удовлетворяющий уравнению

$$\xi(T) = x + \int_0^T A(\xi(\tau))\, dw(\tau), \tag{3.3}$$

где $w(\tau) \in R^d$ – стандартный винеровский процесс. Существование и единственность такого процесса гарантируется классическими результатами теории СДУ.

Предположим, что $g(t, x)$ – классическое решение задачи (3.1), и рассмотрим случайные процессы

$$y(\tau) = g(\tau, \xi(\tau)), \quad z(\tau) = \nabla g(\tau, \xi(\tau)),$$
$$\Gamma(\tau) = \nabla^2 g(\tau, \xi(\tau))$$

и

$$z_1(\tau) = \nabla g(\tau, \xi(\tau)).$$

Воспользовавшись формулой Ито, нетрудно показать, что

$$\begin{aligned} dy(\tau) &= -\Phi(\xi(\tau), y(\tau), z(\tau), \Gamma(\tau))\, d\tau + z(\tau)\, d\xi(\tau), \\ y(T) &= g_0(\xi(T)). \end{aligned} \tag{3.4}$$

Применяя формулу Ито к функции $\nabla g(\tau, x)$, мы получим соотношение

$$\begin{aligned} dz_1(\tau) = \Big([\nabla g]_\tau + \frac{1}{2} \operatorname{Tr} A(\xi(\tau))\nabla^2[\nabla g] A^+(\xi(\tau)) \Big)\, d\tau \\ + \nabla^2 g A(\xi(\tau))\, dw(\tau) = \mathcal{L}\nabla g(\tau, \xi(\tau))\, d\tau + \Gamma(\tau)\, d\xi(\tau), \end{aligned}$$

где

$$\mathcal{L}g(t, x) = g_t(t, x) + \frac{1}{2} \operatorname{Tr} A(x)\nabla^2 g A^+(x).$$

Обозначив $G(t) = \mathcal{L}\nabla g(t, \xi(t))$, получим

$$dz_1(\tau) = G(\tau)\, d\tau + \Gamma(\tau)\, d\xi(\tau). \tag{3.5}$$

Таким образом, классическое решение $g(t,x)$ задачи (3.1) допускает представление $g(t,x) = y(t)$, где $y(t)$ удовлетворяет (3.4), (3.5).

Приведенные выше рассуждения позволяют установить связь между классическим решением полностью нелинейного уравнения (3.1) и ПОСДУ (3.3)–(3.5). Более детальное исследование системы (3.3)–(3.5) было проведено в работе [15]. В этой работе доказаны теоремы существования и единственности решения системы вида (3.4), (3.5), и установлена связь этого решения с вязкостным решением исходной задачи (3.1).

Применяя эти результаты, приближенное решение ПОСДУ (3.3)–(3.5), построенное с применением нейронных сетей, можно интерпретировать как численное решение задачи (3.1) [5, 6].

Модифицируя рассматриваемый подход, мы используем дополнительно информацию о том, что если функция $g(t,x)$ – классическое решение задачи Коши

$$g_t + \Phi(x, g, \nabla g, \nabla^2 g) = 0, \quad g(T,x) = g_0(x), \tag{3.6}$$

то ее градиент $\nabla g(t,x) = v(t,x)$, если он дважды дифференцируем по x, удовлетворяет задаче Коши

$$v_t + \nabla_x\Phi + \nabla_g\Phi v + \nabla_v\Phi\nabla v + \nabla_\gamma\Phi\nabla\gamma = 0, \quad v(T,x) = \nabla g_0(x). \tag{3.7}$$

Здесь и далее приняты обозначения вида

$$\nabla\Phi(x, g(x), v(x), \gamma(x)) = \nabla_x\Phi + \nabla_g\Phi v + \nabla_v\Phi\gamma + \nabla_\gamma\Phi\nabla^2 v,$$

где

$$[\nabla_v\Phi(v)\gamma]_j = \sum_{i=1}^{d} \frac{\partial\Phi(v)}{\partial v_i}\gamma_{ij}, \ [\nabla_\gamma\Phi(\gamma)\nabla^2 v]_j = \sum_{i,k=1}^{d} \frac{\partial\Phi(\gamma)}{\partial\gamma_{ik}}\nabla^2_{ik}v_j.$$

Всюду ниже мы предполагаем, что $B = \nabla_\gamma\Phi > 0$ – положительно определенная матрица, $B = AA^+$ и $A(x,g,v,\gamma) \in R^d \otimes R^d$, $x \in R^d$, $g \in R$, $v \in R^d$, $\gamma \in R^d \otimes R^d$, – ограниченная по x и дважды дифференцируемая по всем аргументам функция.

Перепишем уравнения (3.6), (3.7) в виде

$$g_t + \nabla_\gamma\Phi\nabla^2 g + \Psi(x, g, v, \gamma) = 0, \quad g(T,x) = g_0(x), \tag{3.8}$$

$$v_t + \nabla_\gamma\Phi\nabla^2 v + q(x, g, v, \nabla g, \nabla v) = 0, \quad v(T, x, \nu = \nabla g_0(x, \nu), \tag{3.9}$$

где

$$\Psi(x,g,v,\gamma) = \Phi(x,g,v,\gamma) - \nabla_\gamma \Phi \nabla v,$$
$$q(x,g,v,\nabla g,\nabla v) = \nabla_x \Phi + \nabla_g \Phi v + \nabla_v \Phi \nabla v.$$

Введем в рассмотрение процесс $\xi(t)$, удовлетворяющий СДУ

$$d\xi(\tau) = A(\xi(\tau), y(\tau)), z(\tau), \Gamma(\tau))\, dw(\tau), \quad \xi(t) = x, \tag{3.10}$$

и процессы $y(t) = g(t,\xi(t))$, $z(t) = \nabla g(t,\xi(t))$, а также $\Gamma(t) = \nabla^2 g(t,\xi(t))$. Повторяя приведенные выше рассуждения с использованием формулы Ито и (3.9), (3.10), проверим, что эти процессы подчиняются ОСДУ

$$\begin{aligned} &dy(\tau) = -\Phi(\xi(\tau), y(\tau), z(\tau), \Gamma(\tau))\, d\tau + z(\tau)\, d\xi(\tau), \\ &y(T) = g_0(\xi(T)), \end{aligned} \tag{3.11}$$

$$\begin{aligned} &dz_1(\tau) = -q(\xi(\tau), y(\tau), z(\tau), z_1(\tau), \Gamma(\tau))\, d\tau + \Gamma(\tau)\, d\xi(\tau), \\ &z_1(T) = \nabla g_0(\xi(T)). \end{aligned} \tag{3.12}$$

Система (3.10)–(3.12) содержит неизвестные процессы $\xi(\tau)$, $y(\tau)$, $z(\tau)$, $z_1(\tau)$, $\Gamma(\tau)$. Недостающие уравнения следуют из теоремы Ито о представлении квадратично-интегрируемого мартингала.

Рассмотрим мартингалы

$$\begin{aligned} M(\tau) &= \mathbf{E}\,[g_0(\xi(T)) \mid \mathcal{F}_\tau] \\ &\quad + \mathbf{E}\left[\int_\tau^T \Psi(\xi(\tau_1), y(\tau_1), z(\tau_1), z_1(\tau_1), \Gamma(\tau_1))\, d\tau_1 \,\Big|\, \mathcal{F}_\tau \right], \\ M_1(\tau) &= \mathbf{E}\,[\nabla g_0(\xi(T)) \mid \mathcal{F}_\tau] \\ &\quad + \mathbf{E}\left[\int_\tau^T q(\xi(\tau_1), y(\tau_1), z(\tau_1), z_1(\tau_1), \Gamma(\tau_1))\, d\tau_1 \,\Big|\, \mathcal{F}_\tau \right] \end{aligned}$$

и зададим процессы $z(\tau)$ и $\Gamma(\tau)$ соотношениями

$$M(0) = \mathbf{E}[M(0)] + \int_0^T z(\tau)\, d\xi(\tau), \tag{3.13}$$

$$M_1(0) = \mathbf{E}[M_1(0)] + \int_0^T \Gamma(\tau)\, d\xi(\tau), \tag{3.14}$$

Запишем полученную систему (3.10)–(3.14) в векторном виде, положив

$$U_0(x) = \big(g_0(x), \nabla g_0(x)\big),$$
$$F(x, Y, Z, \Gamma) = \big(\Psi(x, y, z, z_1, \Gamma), q(x, y, z, z_1, \Gamma)\big)\,.$$

При этом процессы $Y(\tau) = \big(y(\tau), z_1(\tau)\big)$ и $Z(\tau) = \big(z(\tau), \Gamma(\tau)\big)$ удовлетворяют соотношениям

$$Y(\tau) = \mathbf{E}\left[U_0(\xi(T)) + \int\limits_\tau^T F\big(\xi(\tau_1), Y(\tau_1), Z(\tau_1)\big)\, d\tau_1 \,\middle|\, \mathcal{F}_\tau \right], \tag{3.15}$$

$$\zeta = \mathbf{E}[\zeta] + \int\limits_0^T Z(\tau)\, d\xi(\tau), \tag{3.16}$$

где

$$\zeta = U_0(\xi(T)) + \int\limits_0^T F\big(\xi(\tau_1), Y(\tau_1), Z(\tau_1), \Gamma(\tau_1)\big)\, d\tau_1,$$

а процесс $\xi(\tau)$ удовлетворяет (3.10).

Заметим, что система (3.10)–(3.14) уже является замкнутой системой.

Важное наблюдение состоит в том, что решение ПОСДУ может быть сведено к решению некоторой задачи стохастического управления. При этом численное решение ПОСДУ может быть сведено к численному решению соответствующей оптимизационной задачи с применением метода стохастического градиентного спуска и использованием техники нейронных сетей [4, 5].

Рассмотрим оптимизационную задачу, ассоциированную с ПОСДУ (3.10)–(3.12):

найти

$$\inf_\beta \mathbf{E}\Bigg[\left\| U_0\left(\xi^{Y(\cdot,\beta), Z(\cdot,\beta)}(T)\right) - Y^{Y(\cdot,\beta), Z(\cdot,\beta)}(T) \right\|^2$$
$$+ \int\limits_t^T \left\| U\left(\tau, \xi^{Y(\cdot,\beta), Z(\cdot,\beta)}(\tau)\right) - Y^{Y(\cdot,\beta), Z(\cdot,\beta)}(\tau) \right\|^2 d\tau \Bigg], \tag{3.17}$$

где

$$\xi^{Y(\cdot)),Z(\cdot)}(T) = x + \int\limits_t^T A\big(\xi^{Y(\cdot),\beta),Z(\cdot,\beta)}(\tau), Y(\tau,\beta), Z(\tau,\beta)\big)\, dw(\tau), \quad (3.18)$$

$$Y^{Y(\cdot),Z(\cdot)}(\theta,\beta) = Y_0 - \int\limits_\theta^T F\left(\xi^{Y(\cdot,\beta),Z(\cdot,\beta)}(\tau), Y^{Y(\cdot,\beta),Z(\cdot,\beta)}(\tau), Z(\tau)\right) d\tau + \int\limits_\theta^T Z(\tau)\, d\xi(\tau) \quad (3.19)$$

и $U(\xi) = (g(\xi), \nabla g(\xi))$.

Сформулируем условия существования и единственности решения системы (3.18), (3.19).

Мы будем говорить, что выполнено условие **C1**, если

(1) коэффициенты $A(x,Y,Z)$, $F(x,Y,Z)$ (где $Y = (y, z_1)$, $Z = (z, \Gamma)$) имеют рост не выше линейного и монотонны,

(2) а функции $g_0(x)$, $\nabla g_0(x)$ ограничены и монотонны.

При этом справедливо следующее утверждение.

Теорема 3.1. *Пусть выполнено условие* **C1** *и процессы* $\xi^{Y(\cdot)),Z(\cdot)}(\tau)$ – $\mathcal{F}_\tau$*-адаптированные квадратично интегрируемые процессы. Тогда задача стохастического управления* (3.17)–(3.19) *имеет решение*

$$\inf_{Y(\cdot),Z(\cdot)} \mathbf{E}\Bigg[U_0(\xi^{Y(\cdot),Z(\cdot)}(T)) - Y^{Y(\cdot),Z(\cdot)}(T) + \int\limits_0^T \Big\|Y^{Y(\cdot),Z(\cdot)}(\tau) - Y(\tau)\Big\|^2 d\tau\Bigg] = 0, \quad (3.20)$$

и этот минимум достигается, если процессы $\xi^{Y(\cdot),Z(\cdot)}(\tau)$, $Y^{Y(\cdot),Z(\cdot)}(\tau)$, $Z(\tau)$ *удовлетворяют* (3.18), (3.19).

Доказательство. Справедливость этого утверждения вытекает из следующих соображений [16].

Условие **C1** является достаточным для существования и единственности решения ПОСДУ (3.18)–(3.19). Если рассматривать $Y(t)$, $Z(t)$,

$t \in [s, T]$, как элементы управления в задаче (3.17), то мы получим соотношение (3.20).

Единственность полученного решения вытекает из единственности решения ПОСДУ. □

Для того чтобы построить численное решение задачи (3.10)–(3.12), разобьем интервал $[0, T]$ на K частей, $t_0 = 0 < t_1 < \dots < t_K = T$ и обозначим

$$\Delta_k t = t_{k+1} - t_k, \quad \Delta_k \xi = \xi(t_{k+1}) - \xi(t_k), \quad \Delta_k W = W(t_{k+1}) - W(t_k),$$

где $W(t) = (w(t), w(t))^+$.

Применив метод Эйлера к уравнениям (3.18), (3.19), получим соотношения

$$\bar\xi(t) = x, \quad \bar Y^0 = \big(u^0(t,x), \nabla u^0(t,x)\big),$$

$$\bar\xi(t_{k+1}) = \bar\xi(t_k) + A\big(\bar\xi(t_k), \bar Y(t_k), \bar Z(t_k), \bar\Gamma(t_k)\big)\Delta_k W, \tag{3.21}$$

$$\bar Y(t_{k+1}) = \bar Y(t_k) - F\big(\bar\xi(t_k), \bar Y(t_k), \bar Z(t_k)\big)\Delta_k t + \bar Z(t_k)\Delta\bar\xi(t_k), \tag{3.22}$$

где $\Delta\bar\xi(t_k) = A\big(\bar\xi(t_k), \bar Y(t_k), \bar Z(t_k), \bar\Gamma(t_k)\big)\Delta_k w$.

Выбрав $\bar Y(t)$ в качестве управляющего параметра, мы запишем его в виде

$$\bar Y^\beta(t_k) = \Lambda_k(\bar\xi(t_k), \beta_k) = \big(\lambda_{1,k}(\bar\xi(t_k), \beta_k), \lambda_{2,k}(\bar\xi(t_k), \beta_k)\big),$$

где $\lambda_{1,k} \in \mathcal{N}_0$, $\tilde\lambda_{2,k} \in \mathcal{N}_1$ и $\mathcal{N}_0, \mathcal{N}_1$ – это параметрические функциональные пространства.

Соответствующую дискретную задачу оптимизации запишем в виде

$$\inf_{\psi\in\mathcal{N}_0, \phi_k\in\mathcal{N}_k} \mathbf{E}\Bigg[\big\|\bar Y^\beta(t_K) - U_0(\bar\xi(t_K))\big\|^2 + \sum_{k=0}^{K-1}\big\|\bar Y(t_{k+1}) - \bar Y(t_k)$$

$$-F\big(\bar\xi(t_k), \bar Y^\beta(t_k), \bar Z^\beta(t_k)\big)\Delta_k t + \bar Z^\beta(t_k)\Delta_k\xi\big\|^2\Bigg]. \tag{3.23}$$

Решение этой задачи будем строить с использованием нейронных сетей, полагая $Y^\beta(t_k) = \mathcal{N}(t_k, \xi(t_k), \beta)$ и вычисляя $Z^\beta(t_k) = DY^\beta(t_k, \beta)$ с помощью метода автоматического дифференцирования Y. Здесь D – оператор автоматического дифференцирования по $\xi(t_k)$ в TensorFlow [18]. Значения $\bar Y(t_0)$, $\bar Z(t_0)$ выбираются произвольно.

На языке нейронных сетей $\xi(t_k)$, $k = 1, \dots, K$, рассматриваются как данные, на которых происходит обучение.

Оптимальный параметр $\beta^* = (\beta_1^*, \ldots, \beta_K^*)$ нейронных сетей вычисляется с применением метода стохастического градиентного спуска к задаче минимизации, соответствующей функции потерь

$$L(\beta) = \mathbf{E}\left[\left\|\bar{Y}^\beta(T) - U_0(\bar{\xi}(T))\right\|^2\right]$$

или

$$L^1(\beta) = \mathbf{E}\Bigg[\left\|\bar{Y}^\beta(T) - U_0(\bar{\xi}(T))\right\|^2$$
$$+\sum_{k=0}^{K-1}\left\|\bar{Y}(t_{k+1}) - \bar{Y}(t_k) + F(\bar{\xi}(t_k), \bar{Y}^\beta(t_k), \bar{Z}^\beta(t_k))\Delta t - \bar{Z}^\beta(t_k)\Delta_k\xi\right\|^2\Bigg].$$

При этом функцию потерь можно вычислить с помощью метода Монте Карло, заменив последнее соотношение соотношением

$$L^1(\beta) \approx \sum_{m=1}^{M}\|Y_m^\beta(t_K) - U_0(\xi_m(t_K))\|^2 + \sum_{m=1}^{M}\sum_{k=0}^{K-1}\Big\|Y_m(t_{k+1}) - Y_m(t_k)$$
$$+F(\bar{\xi}_m(t_k), \bar{Y}_m^\beta(t_k), \bar{Z}_m^\beta(t_k))\Delta t - \bar{Z}_m^\beta(t_k)\Delta\xi_m\Big\|^2, \quad (3.24)$$

где M – число реализаций винеровского процесса.

Поскольку

$$Y(\tau) = U(\tau, \xi(\tau)) = \big(g(\tau, \xi(\tau)), \nabla g(\tau, \xi(\tau))\big),$$
$$Z(\tau) = \big(\nabla g(\tau, \xi(\tau)), \nabla^2 g(\tau, \xi(\tau))\big),$$

то мы аппроксимируем $Y(\tau)$, $Z(\tau)$ с помощью нейронных сетей

$$Y^\beta(\tau, x) = \big(g^\beta(\tau, x), \nabla g^\beta(\tau, x)\big), \quad Z^\beta(\tau, x) = \big(\nabla g^\beta(\tau, x), \nabla^2 g^\beta(\tau, x)\big),$$

используя тот факт, что $Y^\beta(\tau, x)$ задается композицией простых функций и градиент $\nabla Y^\beta(\tau, x)$ по x можно вычислить, используя процедуру автоматического дифференцирования.

Приведем несколько результатов из теории нейронных сетей [19, 20], которые использованы в рамках этой конструкции.

Грубо говоря, нейронная сеть – это способ описания непрерывной функции с помощью функции, заданной как композиция аффинных линейных функций и специальных нелинейных функций. Строгое формальное описание этой конструкции может быть сформулировано следующим образом.

Пусть $\mathbf{N}$ – множество натуральных чисел, $\mathbf{N}_0=\{2,3,\dots\}$, $C(R^l,R^{l_1})$

– пространство непрерывных функций, заданных на R^l и принимающих значения в R^{l_1}, где $l,l_1\in\mathbf{N}$. Для всех $L\in\mathbf{N}_0$, $l_0,l_1,\dots,l_L\in\mathbf{N}$, функций $\psi_i\in C(R^{l_i},R^{l_i})$, $i=1,\dots,L-1$, и всех аффинных линейных функций $M_1\in C(R^{l_0},R^{l_1}),\dots,M_L\in C(R^{l_{L-1}},R^{l_L})$ рассмотрим отображение

$$R^{l_0}\ni x\mapsto (M_L\circ\psi_{L-1}\circ M_{L-1}\circ\dots\circ\psi_1\circ M_1)(x)\in R^{l_L},$$

представляющее собой полностью связанную нейронную сеть, архитектура которой определяется набором $(l_0,l_1,\dots,l_L)$ и активационными функциями $(\psi_1,\dots,\psi_{L-1})$.

Пусть $\gamma,l,q\in\mathbf{N}$, $\alpha\in\mathbf{N}_0$, $\beta=(\beta_1,\dots,\beta_\gamma)\in R^\gamma$ и справедлива оценка $\gamma>\alpha+q(l+1)$. Для $x\in R^d$ выберем аффинное преобразование $M^{\beta;\alpha}_{q,l}:R^l\to R^q$, заданное соотношением

$$M^{\beta,\alpha}_{q,l}(x)=\begin{pmatrix}\beta_{\alpha+1} & \beta_{\alpha+2} & \dots & \beta_{\alpha+l} & \beta_{\alpha+ql+1}\\ \beta_{\alpha+l+1} & \beta_{\alpha+l+2} & \dots & \beta_{\alpha+2l} & \beta_{\alpha+ql+2}\\ \beta_{\alpha+2l+1} & \beta_{\alpha+2l+2} & \dots & \beta_{\alpha+3l} & \beta_{\alpha+ql+3}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots\\ \beta_{\alpha+(q-1)l+1} & \beta_{\alpha+(q-1)l+2} & \dots & \beta_{\alpha+ql} & \beta_{\alpha+ql+q}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\\ \vdots\\ x_l\\ 1\end{pmatrix}.$$

Заметим, что в этом соотношении отображение $M^{\beta,\alpha}_{q,l}:R^l\to R^q$ соответствует набору компонент $\big(\beta_{\alpha+1},\dots,\beta_{\alpha+ql+q}\big)$, где $\alpha=d+1$.

Условие $\gamma>\alpha+q(l+1)$ гарантирует, что отображение $M^{\beta,\alpha}_{q,l}$ задано корректно.

Выберем активационные функции вида $\psi_1,\dots,\psi_{K-1}$ и для каждого $p\in\{1,2,\dots,K+1\}$ пусть $\gamma_p=\sum_{k=1}^{p-1}l_k(l_{k-1}+1)$. Определим нейронную сеть $\mathcal{N}^{l_0,\dots,l_L}_{\psi_1,\dots,\psi_{K-1}}:R^{\gamma_{K+1}}\to C(R^{l_0},R^{l_K})$ соотношением

$$\mathcal{N}^{l_0,\dots,l_L}_{\psi_1,\dots,\psi_{K-1}}(\beta)=M^{\beta,\gamma_L}_{l_{K-1},l_K}\circ\psi_{K-1}\circ M^{\beta,\gamma_{K-1}}_{l_{K-2},l_{K-1}}\circ\dots\circ\psi_1\circ M^{\beta,\gamma_1}_{l_0,l_1}.$$

Ниже в качестве активационых функций $\psi_l:R^l\to R^l$ мы выберем функции вида

$$\psi_l(x)=\big(\max(x_1,0),\max(x_2,0),\dots,\max(x_l,0)\big).$$

Рассмотрим две нейронные сети вида

$$\mathcal{S}_k^{\beta,\alpha_1} = M_{d,d}^{\beta,((2K+k)d+1))(d+1)} \circ \psi_d \circ \\ \circ M_{d,d}^{\beta,((K+k)d+1)(d+1)} \circ \psi_d \circ M_{d,d}^{\beta,(kd+1)(d+1)},$$

и

$$\mathcal{S}_k^{\beta,\alpha_2} = M_{d^2,d}^{\beta,(5Kd+kd^2+1)(d+1)} \circ \psi_d \circ \\ \circ M_{d,d}^{\beta,((4K+k)d+1)(d+1)} \circ \psi_d \circ M_{d,d}^{\beta,((3K+k)d+1)(d+1)}.$$

Функции $\mathcal{S}_k^{\beta,\alpha_1}$ определяют нейросети с 4 слоями (входной слой с d нейронами, два скрытых слоя с d нейронами каждый и выходной слой с d нейронами) и активационной функцией ψ_d. Функции $\mathcal{S}_k^{\beta,\alpha_2}$ также определяют нейросети с 4 слоями (входной слой с d нейронами, два скрытых слоя с d нейронами каждый и выходной слой с d^2 нейронами) и активационной функцией ψ_d.

Заметим, что условие $\rho \geqslant (5Kd + Kd^2 + 1)(d + 1)$ гарантирует, что отображение $M_{q,l}^{\beta,\alpha} : R^l \to R^q$ определено корректно и зададим процессы $Y^\beta(t)$, $Z^\beta(t)$ соотношениями $Y^\beta(t) = U^\beta(x)$, $Z^\beta(t) = \nabla U^\beta(x)$ и для каждого $k \in \{0, 1, \ldots, K-1\}$, $j = 1, 2$,

$$y^{j,\beta}(t_{k+1}) = y^{j,\beta}(t_k) - F^j\big(\xi^\beta(t_k), y^\beta(t_k), z^\beta(t_k)\big)\Delta_k t + z^{j,\beta}(t_k)\Delta_k\xi. \quad (3.25)$$

Для подходящих $\beta \in R^\rho$ и всех $k \in \{0, 1, \ldots, K\}$ рассмотрим отображение $Y_k^\beta : \Omega \to R^{d+1}$ как аппроксимацию $Y(t_k)$.

При этом $y^{1,\beta}(t, x) = g^\beta(t, x)$ можно интерпретировать как аппроксимацию $g(t, x) = y^1(t)$, а $y^{2,\beta}(t, x)$ как аппроксимацию $\nabla g(t, x) = y^2(t)$. Аппроксимацию $\nabla^2 g(t_K, x)$ можно построить с помощью метода автоматического дифференцирования по x, зная $y^{2,\beta}(t, x)$.

Для того чтобы найти оптимальные значения параметра β, мы воспользуемся методом стохастического градиентного спуска (СГС) для нахождения минимизатора функции потерь

$$\hat{L}_K(\beta) = \mathbf{E}\Big[\|Y(t_K, \beta) - U_0(\xi(t_K, \beta))\|^2 \\ + \sum_{k=0}^{K-1} \big\|\bar{Y}(t_{k+1}) - Y(t_k, \beta) - F\big(\bar{\xi}(t_k, \beta), Y(t_k, \beta), Z(t_k, \beta)\big)\Delta_k t \\ + Z(t_k)\Delta_k\xi\big\|^2\Big]. \quad (3.26)$$

Таким образом, предлагаемый алгоритм может быть сформулирован следующим образом.

Пусть $\bar{Y}(t_K) = \kappa$. Для $k = K-1, \dots, 0$ воспользуемся парой нейронных сетей $y^{1,\beta}(t_k) \in \mathcal{N}(\beta)$, $y^{2,\beta}(t_k) \in \mathcal{N}_1(\beta)$ для аппроксимации $Y(t_k)$ и вычислим, используя СГС минимизатор математического ожидания квадратичной функции потерь

$$\bar{L}(t_k;\beta) = \mathbf{E}\left[\left\|\bar{Y}(t_{k+1}) - G(\bar{\xi}(t_k), Y^{\beta}(t_k), \bar{Z}^{\beta}(t,k), \Delta_k t, \Delta\xi_k)\right\|^2\right],$$

где $G(x,Y,Z,\Delta_k t,\Delta_k\xi) = Y - F(x,Y,Z)\Delta_k t + Z\Delta_k\xi$.

Вычислим $\beta_k^* \in \arg\min_{\beta\in R^\rho} \bar{L}(t_k;\beta)$, $\bar{Y}(t_k) = Y^{\beta_k^*}(t_k)$ и положим $\bar{Z}(t_k) = Z^{\beta_k^*}(t_k)$. В результате мы построим аппроксимацию решений $\big(g(t_k,\cdot), \nabla g(t_k,\cdot)\big)$, $k = K, K-1, \dots, 1$, задачи Коши (3.6), (3.7).

§4. ПОСДУ и уравнение ГЯБ в модели Хестона

Применим методику, описанную в параграфе 3, к решению уравнения (2.14). В этом случае $d = 2$, $m = (x,\nu) \in R^2$, и система для $(V, \nabla V)$ будет состоять из трех уравнений. Пусть $V(t,x,\nu)$ – классическое решение задачи (2.14).

Обозначим $u = V_x$, $v = V_\nu$ и

$$f(t,m) = \big(f_1(t,m), f_2(t,m), f_3(t,m)\big),$$

где $f_1 = V$, $f_2 = u$, $f_3 = v$.

Теорема 4.1. *Пусть $V(t,m)$ – классическое решение задачи* (2.14). *Тогда функция $f(t,m) = \big(V(t,m), \nabla V(t,m)\big)$ удовлетворяет задаче Коши*

$$\begin{aligned} f^q_t + \frac{1}{2} Tr B(m,f,\nabla f)\nabla^2 f^q + C^q(m,f,\nabla f) = 0,\\ f^q(T,m) = f^q_0(m), \quad q = 1,2,3, \end{aligned} \tag{4.1}$$

где $B = AA^+$,

$$A = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}\alpha(x,\nu)}{u_x\sqrt{\nu}} & 0 \\ 0 & \sigma\sqrt{\nu} \end{pmatrix}, \tag{4.2}$$

а коэффициенты C^q имеют вид

$$C^1 = xru - \frac{(\mu-r)^2u^2}{\nu u_x} + \frac{(\mu-r)u\rho u_\nu}{u_x} + \kappa(\theta-\nu)v + \frac{1}{2}\frac{\big((\mu-r)u+\rho\nu u_\nu\big)^2}{\nu u_x} + \frac{1}{2}\sigma^2\nu v_\nu - \rho u_\nu\frac{(\mu-r)u+\rho\nu u_\nu}{u_x}, \tag{4.3}$$

$$C^2 = ru + xru_x - \frac{(\mu-r)^2u}{\nu} + \frac{(\mu-r)\alpha}{\nu} + \kappa(\theta-\nu)u_\nu + \frac{(\mu-r)\alpha}{\nu} - \rho(\mu-r)u_\nu, \tag{4.4}$$

$$C^3 = rxv_x - \frac{(\mu-r)^2uv_x}{\nu u_x} + \frac{(\mu-r)\rho uv_x}{\nu u_x} + \frac{\alpha(\mu-r)u}{\nu^2u_x} - \frac{(\mu-r)\alpha v_x}{\nu u_x} + \kappa(\theta-\nu)v_\nu - \kappa v - \frac{1}{2}\frac{\alpha^2}{\nu^2u_x} + \frac{\alpha((\mu-r)v_x+\rho v_x)}{\nu u_x} + \frac{1}{2}\sigma^2v_\nu - \rho v_x\frac{(\mu-r+\rho)v_x}{u_x}. \tag{4.5}$$

Доказательство. Выведем уравнения для градиента

$$\nabla V = \big(V_x(t,x,\nu), V_\nu(t,x,\nu)\big)^+$$

функции $V(t,x,\nu)$, удовлетворяющей (2.14). Несложные, но громоздкие вычисления приводят к следующим уравнениям для функций $u=V_x$ и $v=V_\nu$. Обозначим $\alpha(x,\nu)=(\mu-r)u+\rho\nu u_\nu$ и покажем, что функции u и v при определенных условиях удовлетворяют задаче Коши для системы

$$\begin{aligned} u_t + ru + xru_x - (\mu-r)u\left(\frac{(\mu-r)u_x+\rho\nu u_{x\nu}}{\nu u_x} - \frac{\alpha(x)u_{xx}}{\nu u_x^2}\right) \\ +(\mu-r)u_x\frac{\alpha}{\nu u_x} + \kappa(\theta-\nu)u_\nu + \frac{\alpha(x)(\mu-r)u_x+\rho\nu u_{x\nu})}{\nu u_x} \\ -\frac{1}{2}\frac{\alpha(x)^2u_{xx}}{\nu u_x^2} + \frac{1}{2}\sigma^2\nu u_{\nu\nu} - \rho u_{x\nu}\frac{\alpha(x)}{u_x} \\ -\rho u_\nu\left(\frac{(\mu-r)u_x+\rho\nu u_{x\nu}}{u_x} - \frac{\alpha u_{xx}}{u_x^2}\right) = 0, \\ u(T,x) = \nabla_x f_0(x,\nu), \end{aligned} \tag{4.6}$$

$$
\begin{aligned}
v_t + rxv_x - (\mu - r)u\left(\frac{(\mu-r)v_x + \rho v_x + \rho\nu v_{x\nu}}{\nu u_x} - \frac{\alpha(u_x + \nu v_{xx})}{\nu^2 u_x^2}\right) \\
- (\mu - r)v_x\frac{\alpha}{\nu u_x} + k(\theta - \nu)v_\nu - kv - \frac{1}{2}\frac{\alpha^2(u_x + \nu v_{xx})}{\nu^2 u_x^2} \\
+ \frac{\alpha((\mu-r)v_x + \rho v_x + \rho\nu v_{x\nu})}{\nu u_x} + \frac{1}{2}\sigma^2 v_\nu + \frac{1}{2}\sigma^2 \nu v_{\nu\nu} \\
- \rho v_{x\nu}\frac{\alpha}{u_x} - \rho v_x\left(\frac{(\mu-r)v_x + \rho v_x + \rho\nu v_{x\nu}}{u_x} - \frac{\alpha v_{xx}}{u_x^2}\right) = 0, \quad (4.7)
\end{aligned}
$$

$$
v(T, x) = \nabla_\nu f_0(x, \nu).
$$

Анализируя полученные уравнения, мы видим, что задачу Коши для системы (2.14), (4.6), (4.7) можно записать в векторном виде как задачу Коши относительно функции $f(t, m)$

$$
\begin{aligned}
f_t + \frac{1}{2}\operatorname{Tr} B(m, f, \nabla f)\nabla^2 f + C(X, f, \nabla f) = 0, \\
f(T, m) = \big(V_0(x,\nu), \nabla_x V_0(x,\nu), \nabla_\nu V_0(x,\nu)\big) = f_0(x, \nu),
\end{aligned} \quad (4.8)
$$

где $B = AA^+$ и коэффициенты $A(X, \nabla f)$ и $C^q(X, \nabla f)$, $q = 1, 2, 3$, заданы соотношениями (4.2) и (4.3)–(4.5), соответственно. $\square$

Используя результаты параграфа 3, мы сведем решение задачи Коши (4.8) к решению соответствующего ПОСДУ.

Пусть $V(t, x, \nu)$ – классическое решение задачи (2.14). Введем обозначения

$$
\xi(\tau) = \big(X(\tau), \nu(\tau)\big), \quad Y(\tau) = \big(y(\tau), z_1(\tau)\big), \quad Z(\tau) = \big(z(\tau), \Gamma(\tau)\big),
$$

где $y(\tau) = V(\tau, \xi(\tau))$, $z_1(\tau) = \nabla V(\tau, \xi(\tau))$, $z(\tau) = \nabla V(\tau, \xi(\tau))$, $\Gamma(\tau) = \nabla^2 V(\tau, \xi(\tau))$.

Теорема 4.2. *Пусть $V(t, x, \nu)$ – классическое решение задачи* (2.14). *Тогда оно допускает вероятностное представление $y(t) = V(t, x, \nu)$ в терминах решения ПОСДУ*

$$
\begin{aligned}
d\xi(\tau) &= A(\xi(\tau), Y(\tau))dW(\tau), \\
\xi(t) &= (x, \nu),
\end{aligned} \quad (4.9)
$$

$$
\begin{aligned}
dY(\tau) &= -C(\xi(\tau), Y(\tau), Z(\tau))\, d\tau + Z(\tau)\, d\xi(\tau), \\
Y(T) &= \big(V_0(\xi(T), \nabla V_0(\xi(T)\big) = f_0(\xi(T)),
\end{aligned} \quad (4.10)
$$

где $W(t) \in R^2$ – *винеровский процесс,* $Y(\tau) = \big(y(\tau), y_1(\tau)\big)$,
$Z(\tau) = \big(\nabla V(\tau, \xi(\tau)), \nabla^2 V(\tau, \xi(\tau))\big)$.

Доказательство. Пусть $f(t, X)$ – классическое решение системы (4.8) и $\xi(\tau)$ – случайный процесс, удовлетворяющий СДУ (4.9).

Применяя формулу Ито, вычислим стохастические дифференциалы процессов $y(\tau) = f(\tau, \xi(\tau))$ и $y_1(\tau) = \nabla f(\tau, \xi(\tau))$

$$dy(\tau) = \big(f_\tau + \frac{1}{2}\operatorname{Tr} A\nabla^2 f(\tau, \xi(\tau))A^+\big)\, d\tau + \nabla f(\tau, \xi(\tau))A\, dW(\tau). \quad (4.11)$$

$$dy_1(\tau) = \big(\nabla f_\tau + \frac{1}{2}\operatorname{Tr} A\nabla^2[\nabla f](\tau, \xi(\tau))A^+\big)\, d\tau + \nabla^2 f(\tau, \xi(\tau))A\, dW(\tau). \quad (4.12)$$

Из соотношений (4.11), (4.12) с учетом (4.1) немедленно следует соотношение (4.10).

Напомним, что система (4.9), (4.10) не замкнута и для ее замыкания следует воспользоваться теоремой Ито о представлении квадратично интегрируемого непрерывного мартингала.

Для этого рассмотрим $\mathcal{F}_\tau$-мартингал

$$\zeta(\tau) = \mathbf{E}\left[f_0(\xi(T)) + \int_0^T C(\xi(\tau), Y(\tau), Z(\tau))\, d\tau \;\middle|\; \mathcal{F}_\tau\right]$$

и предположим, что $\mathbf{E}\,\|\zeta(\tau)\|^2 < \infty$. Воспользовавшись соотношением

$$\zeta(T) = \mathbf{E}\,[\zeta(T)] + \int_0^T Z(\tau)\, dW(\tau), \quad (4.13)$$

вытекающим из теоремы Ито о представлении квадратично интегрируемого $\mathcal{F}_\tau$-мартингала, мы получим замкнутую систему соотношений (4.9), (4.10), (4.13). □

Обозначим β^* оптимальное значение параметра β. Из теоремы 3.1 вытекает следующее утверждение.

Теорема 4.3. *Задача стохастического управления: найти*

$$\inf_\beta \mathcal{L}(\beta) = \inf_\beta \mathbf{E}\Big[\|f_0(\xi(T)) - Y^\beta(T)\|^2 + \int_t^T \|f(\tau,\xi(\tau)) - Y^\beta(\tau)\|^2\, d\tau\Big], \quad (4.14)$$

где

$$\xi(T) = x + \int_t^T A(\xi(\tau), Y(\tau))dW(\tau), \quad (4.15)$$

$$Y^\beta(\theta) = Y_0 - \int_\theta^T H(\xi(\tau), Y^\beta(\tau), Z^\beta(\tau))\, d\tau + \int_\theta^T Z^\beta(\tau)\, d\xi(\tau) \quad (4.16)$$

имеет решение β^**. При этом* $\mathcal{L}(\beta^*) = 0$*, если процессы* $\xi(\tau)$*,* $Y^{\beta^*}(\tau)$*,* $Z^{\beta^*}(\tau)$ *удовлетворяют* (4.15), (4.16).

Для построения приближенного решения задачи (4.1) рассмотрим разбиение $t_0 = 0 < t_1 < \dots < t_K = T$ интервала $[0, T]$, полагая для простоты

$$t_{k+1} - t_k = \Delta t = \frac{T}{K}, \quad \Delta w = W(t_{k+1}) - W(t_k), \quad \Delta_k\xi = \xi(t_{k+1}) - \xi(t_k).$$

Рассмотрим дискретизацию процесса $\xi(\tau)$, удовлетворяющего (4.9),

$$\bar\xi(t_{k+1}) = \xi(t_k) + A\big(\bar\xi(t_k), f(\bar\xi(t_k)), \nabla f(t_k, \bar\xi(t_k))\big)\Delta_k W, \quad (4.17)$$

$k = 0, \dots, N-1$, и процессов $Y^j(\tau), Z^j(\tau)$, $j = 1, 2$, удовлетворяю щих (4.10), с помощью соотношений

$$\bar Y^j(t_k) = \bar Y^j(t_{k+1}) - H^j(\bar\xi(t_k), Y(t_k), Z(t_k))\Delta_k t + Z^j(t_k)\Delta_k\xi. \quad (4.18)$$

В рамках предлагаемого алгоритма мы воспользуемся техникой нейронных сетей для аппроксимации $Y(t_k)$ на каждом шаге с параметром β_k и вычислим аппроксимацию $Z(t_k)$ с помощью процедуры автоматического дифференцирования. При заданном $\xi(t) = x$ и случайном выборе $(Y(t), Z(t))$ мы воспользуемся уравнениями (4.7)–(4.9) для вычисления $\bar\xi(t_{k+1})$, $\bar Y(t_{k+1})$, $\bar Z(t_k)$ вплоть до момента $t_K = T$.

Сформулируем схему построения численного решения $V^{\beta}(t,x)$, аппроксимирующего решение $V(t,x)$ исходной задачи (2.14).

1. Для заданного $\xi(t) = x$ положим

$$y_0^{1,\beta} = f^{\beta}(t,\xi(t)), \quad y_0^{2,\beta} = Df^{\beta}(t,\xi(t))$$

и

$$z_0^{1,\beta} = Df^{\beta}(t,\xi(t)), \quad z_0^{2,\beta} = D^2 f^{\beta}(t,\xi(t)).$$

2. Для каждого временного интервала $[t_k, t_{k+1}]$ вычислим $\xi^{\beta}(t_{k+1})$ и $\bar{Y}^{j,\beta}(t_{k+1})$, воспользовавшись схемой Эйлера–Маруямы (4.7), (4.8) и зададим $Y^{j,\beta}(t_{k+1})$ и $Z^{j,\beta}(t_{k+1})$ соотношениями

$$Y_{k+1}^{1,\beta} = u^{\beta}(t_{k+1},\xi(t_{k+1})), \quad Y_{k+1}^{2,\beta} = \nabla u^{\beta}(t_{k+1},\xi(t_{k+1})),$$

$$Z_{k+1}^{1,\beta} = Du^{\beta}(t_{k+1},\xi(t_{k+1})), \quad Z_{k+1}^{2,\beta} = D^2 u^{\beta}(t_{k+1},\xi(t_{k+1})).$$

3. В качестве функции потерь выберем аппроксимацию $\tilde{\mathcal{L}}(\beta)$ функции $\mathcal{L}(\beta)$ вида (4.14)

$$\tilde{\mathcal{L}}(\beta) = \frac{1}{M}\sum_{m=1}^{M}\left(\sum_{k=1}^{K}\left\|Y^{j,\beta}(t_k,\omega_m) - \bar{Y}(t_k,\omega_m)\right\|^2 + \left\|Y^{1,\beta}(t_K,\omega_m) - U_0(\xi^{\beta}(t_K,\omega_m))\right\|^2\right) + \frac{1}{M}\sum_{m=1}^{M}\left\|Y^{2,\beta}(t_K,\omega_m) - \nabla U_0(\xi^{\beta}(t_K,\omega_m))\right\|^2.$$

4. Затем проведем обучение нейронных сетей $\mathcal{S}_k^{j,\beta}$ для нахождения величины β^*, при которой функция потерь минимальна, с помощью метода стохастического градиентного спуска.

5. Семейство локальных нейронных сетей $\mathcal{S}_k^{j,\beta}, j = 1, 2,$ позволяет получить глобальную нейронную сеть, на выходе которой получим величины $y^{j,\beta^*}(t,x,\nu), j = 1,2,$ аппроксимирующие величины $f(t,x,\nu)$, $\nabla f(t,x,\nu)$.

При этом аппроксимацию $z^{2,\beta^*}(t,x,\nu)$ величины $\nabla^2 f(t,x,\nu)$ можно получить, применяя технику автоматического дифференцирования к функции $y^{2,\beta}(t,x,\nu)$.

Список литературы

1. Т. Бьорк, *Теория арбитража в непрерывном времени*, Москва, Изд. МЦНМО, 2010.
2. S. L. Heston, *A closed-form solution for options with stochastic volatility with applications to bond and currency options.* — Review Financ. Stud. **6** (1993), 327–343.
3. N.Touzi, *Stochastic Control and Application to Finance*, Ecole Polytechnique Paris, 2018.
4. J. Han, A. Jentzen, W. E, *Solving high-dimensional partial differential equations using deep learning.* — Proc. Nat. Acad. Sci. USA **115** 34, (2018), 8505–8510.
5. H. Pham, X. Warin, M. Germain, *Neural networks-based backward scheme for fully nonlinear PDEs.* — SN Partial Diff. Eq. Appl. **2** (2021), 1–21.
6. C. Beck, M Hutzenthaler, A. Jentzen, B. Kuckuck, *An overview on deep learning-based approximation methods for partial differential equations.* — Discrete Contin. Dyn. Syst., Ser. B **28**, No. 6 (2023), 3697–3746.
7. M. Hutzenthaler, A. Jentzen, T. Kruse, *Overcoming the curse of dimensionality in the numerical approximation of parabolic partial differential equations with gradient-dependent nonlinearities.* — Found. Comput. Math. **22** (2022), 905–966.
8. Ya. Belopolskaya, Yu. Dalecky, *Investigation of the Cauchy problem with quasilinear systems with finite and infinite number of arguments by means of Markov random processes.* — Izv. VUZ Math. **38**, No. 12 (1978), 6–17.
9. Ya. Belopolskaya, Yu. Dalecky, *Stochastic Equations and Differential Geometry.* Kluwer, 1990.
10. Ya. Belopolskaya, W. A. Woyczynski, *SDEs, FBSDEs and fully nonlinear parabolic systems.* — Rend. Sem. Mat. Univ. Politec. Torino **71**, No. 2 (2013), 209–217.
11. Ya. Belopolskaya, *Probabilistic interpretations of quasilinear parabolic equations.* — AMS. Contemporary Mathematics **734** (2019), 39–56.
12. E. Pardoux, S. Peng, *Backward stochastic differential equations and quasilinear parabolic partial differential.* — Lect. Notes CIS **176** (1992) 200–217.
13. E. Pardoux. *Backward stochastic differential equations and viscosity solutions of systems of semilinear parabolic and elliptic pdes of second order.* — In: Stoch. Anal. Relat. Topics: The Geilo Workshop, Birkháuser, 1996, pp. 79–127.
14. P. Cheridito, M. Soner, N. Touzi, N. Victoir, *Second order backward stochastic differential equations and fully nonlinear parabolic PDEs* . — Commun. Pure Appl. Math. **60**, No. 7 (2007), 1081–1110.
15. M. Soner, N. Touzi, J. Zhang, *Wellposedness of second order backward SDEs.* — Probab. Theory Relat. Fields **153** (2012), 149–190.
16. S. Ji, S. Peng, Y. Peng, X. Zhang, *A deep learning method for solving stochastic optimal control problems driven by fully-coupled FBSDEs.* `arXiv:2204.05796`, 2022.
17. M. Raissi, *Forward-backward stochastic neural networks: deep learning of high dimensional partial differential equations.* `arXiv:1804.07010`, 2018.
18. A. G. Baydin, B. A. Pearlmutter, A. A. Radul, J. M. Siskind, *Automatic differentiation in machine learning: a survey.* `arXiv:1502.05767`, 2015.
19. G. Cybenko, *Approximation by superpositions of a sigmoidal function.* — Math. Control Signals Syst. **2**, No. 4 (1989) 303–314.

20. I. Goodfellow, Y. Bengio, A. Courville, *Deep Learning.* MIT Press, 2016.

Belopolskaya Ya. I., Chubatov A. A. Investment optimization in the Heston model.

The investment portfolio optimization problem in the Heston model is solved via several reductions. Namely, we reduce the original problem to the Cauchy problem for a new fully nonlinear parabolic equation and construct its probabilistic representation via solution of a forward–backward stochastic differential equation (FBSDE). Next we reduce solution of the FBSDE to a new optimization problem and construct its numerical solution applying the neural network technique.

С.-Петербургское отделение
Математического института
им. В. А. Стеклова РАН
С.-Петербург, Россия
E-mail: `yana@yb1569.spb.edu`

Поступило 23 сентября 2023 г.

Научно-технологический
университет “Сириус”
Олимпийский пр., д. 1, пгт Сириус,
Краснодарский край, 354340, Россия
E-mail: `chaa@inbox.ru`