Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 526, 2023 г.

И. А. Алексеев, М. В. Платонова

ВЕРОЯТНОСТНАЯ АППРОКСИМАЦИЯ УРАВНЕНИЯ ШРЁДИНГЕРА КОМПЛЕКСНОЗНАЧНЫМИ СЛУЧАЙНЫМИ ПРОЦЕССАМИ

§1. Введение

Известно, что решение задачи Коши для уравнения теплопроводности ($\sigma \in \mathbf{R}$)

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\sigma^2}{2}\,\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad u(0,x) = \varphi(x) \tag{1}$$

можно представить в виде

$$u(t,x) = \mathbf{E}\;\varphi(x - \sigma w(t)), \tag{2}$$

где $w(t)$ – стандартный винеровский процесс и $\varphi \in L_2(\mathbf{R})$. Если же рассматривать аналогичное уравнение, но уже с комплексным параметром σ, то представление (2) теряет смысл для широкого класса начальных функций φ. Однако, случай $\sigma = e^{\frac{i\pi}{4}}$ представляет собой особый интерес, так как он соответствует задачи Коши для уравнения Шрёдингера.

В работе [3] был предложен подход, позволяющий построить вероятностную аппроксимацию решения задачи Коши для уравнения Шрёдингера ($\sigma = e^{\frac{i\pi}{4}}$)

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{i}{2}\,\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad u(0,x) = \varphi(x). \tag{3}$$

Вместо стандартного винеровского процесса использовался интеграл по пуассоновской случайной мере $\nu(dt,dx)$ с интенсивностью $\frac{dtdx}{x^3}$:

$$\xi_\varepsilon(t) = \int\limits_0^t \int\limits_\varepsilon^{e\varepsilon} x\nu(ds,dx),$$

Ключевые слова: устойчивые распределения, уравнение Шрёдингера, вероятностная аппроксимация.

Работа выполнена при поддержке РНФ (грант No. 22-21-00016). Работа И. А. Алексеева выполнена при частичной финансовой поддержке “Фонда поддержки молодых ученых “Конкурс Мебиуса”.

где e – основание натурального логарифма. Вместо функции φ под знаком математического ожидания использовалась некоторая регуляризация, которая определялась с помощью проекторов Рисса:

$$\begin{aligned} P_+\varphi(x) &= \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{0} e^{-ipx}\,\widehat{\varphi}(p)\,dp, \\ P_-\varphi(x) &= \frac{1}{2\pi}\int\limits_{0}^{\infty} e^{-ipx}\,\widehat{\varphi}(p)\,dp, \quad \varphi \in L_2(\mathbf{R}) \cap L_1(\mathbf{R}), \end{aligned} \tag{4}$$

и некоторой вспомогательной функции $h_\varepsilon(x)$, определенной через ее преобразование Фурье

$$\widehat{h}_\varepsilon(p) = \exp\Bigl(-t\int\limits_{\varepsilon}^{e\varepsilon} i|p|\sigma x\,\frac{dx}{x^3}\Bigr)\cdot\exp\Bigl(-t\int\limits_{\varepsilon}^{e\varepsilon}\frac{(i|p|\sigma x)^3}{3!}\,\frac{dx}{x^3}\Bigr).$$

Более точно, было показано, что при $\varepsilon \to 0$ и $\varphi \in L_2(\mathbf{R})$ функция

$$u_\varepsilon(t,x) = \mathbf{E}\,\bigl[(\varphi_- * h_\varepsilon)\bigl(x - \sigma\xi_\varepsilon(t)\bigr) + (\varphi_+ * h_\varepsilon)\bigl(x + \sigma\xi_\varepsilon(t)\bigr)\bigr]$$

приближает по норме в $L_2(\mathbf{R})$ решение задачи Коши (3). Для начальных функций φ из пространства Соболева $W_2^4(\mathbf{R})$ была получена скорость сходимости.

Позже данный подход был обобщен на случай оператора старшего порядка, стоящего в правой части (см. [7]), а также на случай ненулевого потенциала V (см. [4, 8]).

Задача Коши (3) определена для $\varphi \in L_2(\mathbf{R})$, однако подход из работы [3] дает скорость сходимости только для функций из класса $W_2^4(\mathbf{R})$. В настоящей работе вместо вещественнозначного процесса, повернутого на некоторый угол в комплексной плоскости, будет рассмотрен комплекснозначный процесс Леви. Такой подход позволит получить скорость сходимости для функций из класса $W_2^{2+\delta}(\mathbf{R})$ при некотором $\delta > 0$.

Дальнейшее изложение организовано следующим образом: параграф 2 посвящен напоминанию об α-устойчивых случайных величинах с комплексным индексом устойчивости α. В параграфе 3 вводится комплекснозначный процесс Леви и доказывается основной результат.

§2. Устойчивые случайные величины с комплексным индексом устойчивости

В работе [1] были введены комплекснозначные устойчивые процессы Леви, отвечающие комплексным значениям α, удовлетворяющим условию $|\alpha-1|<1$. Кроме параметра α также используются параметры (ϱ,γ), определяемые по α следующим образом

$$a = \operatorname{Re}\alpha^{-1}; \quad b = \operatorname{Im}\alpha^{-1}; \quad \varrho = 1/a; \quad \gamma = b/a.$$

Параметр ϱ называется *параметром устойчивости*, параметр γ – *параметром комплексности*. Заметим, что для вещественных α параметр $\varrho=\alpha$, $\gamma=0$.

Построенные в [1] устойчивые процессы Леви обладают обычным условием устойчивости, но с заменой положительной полуоси на логарифмическую спираль Γ_0, задаваемую как

$$\Gamma_0 = \{x^{1+i\gamma}\colon\ x>0\} \subset \mathbf{C}.$$

Именно, если $\xi(t)$ – комплекснозначный процесс Леви, такой что для любых $t>0$ и $d>0$ существуют $z(d)\in\Gamma_0$ и $q\in\mathbf{C}$, такие что

$$\xi(d\cdot t) \overset{d}{=} z(d)\xi(t) + q,$$

то или существует $\varrho\in(0,2)$, такое что $\xi(t)$ – α-устойчивый процесс Леви с комплексным индексом $\alpha=\varrho(1+i\gamma)^{-1}$; или существует $\sigma\geqslant 0$, такое что $\xi(t)$ – комплекснозначный гауссовский процесс Леви с матрицей ковариации $Q=\sigma^2 I$, где I – единичная матрица.

Комплекснозначный устойчивый процесс Леви может быть задан стохастическим интегралом:

$$\xi(t) = \iiint\limits_{\substack{|x|<1,\\ \theta\in[0,2\pi),\\ 0\leqslant s\leqslant t}} x^{1+i\gamma}e^{i\theta}\widetilde{\nu}(\,dx,\,d\theta,d\,s) + \iiint\limits_{\substack{|x|\geqslant 1,\\ \theta\in[0,2\pi),\\ 0\leqslant s\leqslant t}} x^{1+i\gamma}e^{i\theta}\nu(d\,x,d\,\theta,d\,s),$$

где $\nu(dx,d\theta,ds)$ – пуассоновская случайная мера на $(0,\infty)\times[0,2\pi)\times(0,\infty)$ с интенсивностью $\frac{\varrho dx}{x^{1+\varrho}}\lambda(d\theta)ds$, $\lambda(d\theta)$ – конечная мера на $[0,2\pi)$, а $\widetilde{\nu}(dx,d\theta,ds)$ – соответствующая центрированная мера (см. [9]).

Построенные случайные процессы определены только для $\varrho \in (0,2)$ и задают вероятностные решения для оператора типа Римана–Лиувилля (см. [2]). В настоящей работе будет рассмотрено семейство комплекснозначных процессов Леви, которые подобны α-устойчивым процессам с $\varrho = 2$. У данного семейства не будет существовать вероятностного предела, однако будет существовать предел для распределений в терминах обобщенных функций. С помощью этих процессов будет построена вероятностная аппроксимация решения задачи Коши для уравнения Шрёдингера (3), а также получена скорость сходимости построенной аппроксимации к точному решению задачи Коши для начальных функций $\varphi \in W_2^{2+\delta}(\mathbf{R})$ при любом $\delta \in (0,1]$.

§3. Основной результат

Рассмотрим семейство комплекснозначных процессов Леви, заданных следующим стохастическим интегралом:

$$\widetilde{\xi}_\gamma(t) = \int\limits_0^t \int\limits_{A(\gamma)}^{B(\gamma)} x^{1+i\gamma}\widetilde{\nu}(\,dx, d\,s) + w(\sqrt{3}\,t), \tag{5}$$

где $\gamma > 0$, $\ln A(\gamma) = -\frac{2\pi}{3\gamma}$, $\ln B(\gamma) = -\frac{\pi}{2\gamma}$. Здесь $\nu(dx, ds)$ – пуассоновская случайная мера на $(0,\infty)\times(0,\infty)$ с интенсивностью $\frac{4\gamma dx}{x^3}ds$; $\widetilde{\nu}(dx, ds)$ – соответствующая центрированная мера, а $w(t)$, $t > 0$, – стандартный винеровский процесс со значениями в $\mathbf{R}$, не зависящий от пуассоновской меры.

Покажем сначала, что для любых $t > 0$ и $\gamma > 0$ существует экспоненциальный момент случайной величины $\operatorname{Im}\widetilde{\xi}_\gamma(t)$, то есть для любого $p \in \mathbf{R}$ величина $\mathbf{E}\ e^{p\operatorname{Im}\widetilde{\xi}_\gamma(t)}$ конечна.

Несложно видеть, что

$$\begin{aligned}\left|\operatorname{Im}\widetilde{\xi}_\gamma(t)\right| &\leqslant C(\gamma)\int\limits_0^t \int\limits_{A(\gamma)}^{B(\gamma)} x\big(\nu(dx, ds) + \mu(dx, ds)\big)\\ &\leqslant C\Big(\nu\big([A(\gamma), B(\gamma)]\times[0,t]\big) + \mu\big([A(\gamma), B(\gamma)]\times[0,t]\big)\Big).\end{aligned}$$

Случайная величина $\nu\big([A(\gamma),B(\gamma)]\times[0,t]\big)$ имеет распределение Пуассона с параметром $\mu\big([A(\gamma),B(\gamma)]\times[0,t]\big)$, равным

$$\mu\big([A(\gamma),B(\gamma)]\times[0,t]\big)=\mu(\gamma,t)=\int\limits_0^t\int\limits_{A(\gamma)}^{B(\gamma)}\frac{4\gamma dx}{x^3}\,ds\leqslant 2\,t\gamma A^{-2}(\gamma)<\infty.$$

Отсюда следует, что для любых $\gamma>0$, $t>0$ и $p>0$ выполнено

$$\begin{aligned}\big|\mathbf{E}\,e^{ip\widetilde{\xi}_\gamma(t)}\big|\leqslant\mathbf{E}\,e^{p|\operatorname{Im}\widetilde{\xi}_\gamma(t)|}\leqslant e^{Cp\mu(\gamma,t)}\mathbf{E}\,\exp\Big\{Cp\nu\big([A(\gamma),B(\gamma)]\times[0,t]\big)\Big\}\\ =\exp\big\{\mu(\gamma,t)\big(e^{Cp}-1+Cp\big)\big\}<\infty.\end{aligned}$$

Рассмотрим нецентрированный стохастический интеграл

$$\xi_\gamma(t)=\int\limits_0^t\int\limits_{A(\gamma)}^{B(\gamma)}x^{1+i\gamma}\nu(\,dx,\,ds).$$

Так как $\ln A(\gamma)=-\frac{2\pi}{3\gamma}$, $\ln B(\gamma)=-\frac{\pi}{2\gamma}$, то

$$-\pi\leqslant-\tfrac{2\pi}{3}\leqslant\gamma\ln x\leqslant-\tfrac{\pi}{2}\leqslant 0.$$

Таким образом, для любого $t>0$ случайная величина $\xi_\gamma(t)$ лежит в третьей четверти и, в частности, в нижней полуплоскости.

Любую функцию $\varphi\in L_2(\mathbf{R})$ можно представить в виде

$$\varphi(x)=P_+\varphi(x)+P_-\varphi(x)=\varphi_+(x)+\varphi_-(x),$$

где P_+, P_- – проекторы Рисса, определяемые в (4).

Отметим, что функция φ_+ аналитически продолжается в верхнюю полуплоскость, а функция φ_- аналитически продолжается в нижнюю полуплоскость.

Для $\gamma>0$ определим полугруппу операторов P_γ^t, которая действует на $\varphi\in L_2(\mathbf{R})$ как

$$P_\gamma^t\varphi(x)=\mathbf{E}\left[\varphi_+(x-\widetilde{\xi}_\gamma(t))+\varphi_-(x+\widetilde{\xi}_\gamma(t))\right].\tag{6}$$

Уже было показано, что случайный процесс $\xi_\gamma(t)$ всегда расположен в третьей четверти. Следующая лемма показывает, что операторы P_γ^t корректно определены.

Лемма 3.1. *При фиксированных* $\gamma > 0$ *и* $t > 0$ *функция* $\widetilde{\varphi}_+ = \mathbf{E}\,\varphi_+(\,\cdot + w(\sqrt{3}\,t))$ *ограничена в области* $\{z \in \mathbf{C}\colon\ \operatorname{Im} z \geqslant -t|\operatorname{Im} M(\gamma)|\}$*, где*

$$M(\gamma) = \int\limits_{A(\gamma)}^{B(\gamma)} x^{1+i\gamma}\,\frac{2\gamma\,dx}{x^3}.$$

Аналогично, при фиксированных $\gamma>0$, $t>0$ *функция*

$$\widetilde{\varphi}_- = \mathbf{E}\ \varphi_-(\,\cdot\, + w(\sqrt{3}\,t))$$

ограничена в области $\{z \in \mathbf{C}\colon\ \operatorname{Im} z \leqslant t|\operatorname{Im} M(\gamma)|\}$.

Доказательство. Несложно видеть, что $|M(\gamma)| \leqslant C\gamma e^{C\gamma^{-1}} < \infty$. Тогда для любого $\gamma > 0$ величина $|\operatorname{Im} M(\gamma)|$ конечна и для $\widetilde{\varphi}_+$ имеем

$$\begin{aligned}
\Bigl|\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{0} e^{-ipz}\widehat{\widetilde{\varphi}_+}(p)\,dp\Bigr| &\leqslant \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{0} e^{t|p|\cdot|\operatorname{Im} M(\gamma)|-\frac{\sqrt{3}}{2}p^2 t}\bigl|\widehat{\varphi}(p)\bigr|\,dp \\
&\leqslant C\sqrt{\int\limits_{-\infty}^{0} e^{2t|p|\cdot|\operatorname{Im} M(\gamma)|-\sqrt{3}p^2 t}\,dp}\cdot\|\varphi\|_{L_2(\mathbf{R})} \\
&= C(\gamma,t)\|\varphi\|_{L_2(\mathbf{R})}.
\end{aligned}$$

Аналогичные неравенства получаются для $\widetilde{\varphi}_-$. □

Из леммы 3.1 следует, что операторы, заданные (6), корректно определены. Тогда, пользуясь теоремой Фубини, получаем

$$\begin{aligned}
P_\gamma^t\varphi(x) &= \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{0} e^{-ipx}\mathbf{E}\ e^{ip\widetilde{\xi}_\gamma(t)}\widehat{\varphi}(p)\,dp + \frac{1}{2\pi}\int\limits_{0}^{\infty} e^{-ipx}\mathbf{E}\ e^{-ip\widetilde{\xi}_\gamma(t)}\widehat{\varphi}(p)\,dp \\
&= \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-ipx}\mathbf{E}\ e^{-i|p|\widetilde{\xi}_\gamma(t)}\widehat{\varphi}(p)\,dp.
\end{aligned} \tag{7}$$

Из теоремы Кэмпбелла получаем (см. [6])

$$\mathbf{E}\,e^{-i|p|\widetilde{\xi}_\gamma(t)} = \exp\Bigl\{-\frac{\sqrt{3}tp^2}{2} + 4\gamma t\int\limits_{A(\gamma)}^{B(\gamma)}\bigl(e^{-i|p|x^{1+i\gamma}} - 1 + i|p|x^{1+i\gamma}\bigr)\frac{dx}{x^3}\Bigr\}.$$

Через P^t, $t \geqslant 0$, обозначим полугруппу

$$P^t = \exp\Big\{\frac{it}{2}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\Big\}. \tag{8}$$

По определению полугруппа P^t переводит начальную функцию φ в решение задачи Коши (3).

Справедливо следующее утверждение.

Теорема 3.2. *Существует постоянная* $C > 0$*, такая что для любой* $\varphi \in W_2^{2+\delta}(\mathbf{R})$*,* $\delta \in (0,1]$*, выполнено*

$$\|P^t\varphi - P^t_\gamma\varphi\|_{L_2} \leqslant Ct\max\{\gamma, 1\}B^\delta(\gamma)\|\varphi\|_{W_2^{2+\delta}},$$

где P^t_γ*,* P^t *– полугруппы операторов, определенные в* (6), (8).

Доказательство. Для доказательства утверждения воспользуемся известной формулой теории возмущений. Именно, пусть A – оператор в некотором гильбертовом пространстве, такой что существует ограниченная ($t \geqslant 0$) операторная полугруппа

$$U_A(t) = e^{tA}.$$

Пусть B – некоторое возмущение оператора A, такое что полугруппа

$$U_{A+B}(t) = e^{t(A+B)}$$

также ограничена. Тогда справедливо следующее равенство (см. [5, гл. IX, §2, п.1, с. 614])

$$e^{t(A+B)} - e^{tA} = \int\limits_0^t e^{\tau(A+B)}Be^{(t-\tau)A}\,d\tau.$$

Положим $A = A_\gamma$, $B = \frac{i}{2}\frac{\partial^2}{\partial x^2} - A_\gamma$, где оператор A_γ – генератор полугруппы P^t_k. Из (7) следует, что A_γ – псевдодифференциальный оператор с символом $\widehat{a}_\gamma(p)$, равным

$$\widehat{a}_\gamma(p) = -\frac{\sqrt{3}}{2}p^2 + 4\gamma\int\limits_{A(\gamma)}^{B(\gamma)}\big(e^{-i|p|x^{1+i\gamma}} - 1 + i|p|x^{1+i\gamma}\big)\tfrac{dx}{x^3}.$$

Преобразуем интеграл:

$$
\begin{aligned}
&\int\limits_{A(\gamma)}^{B(\gamma)} \big(e^{-i|p|x^{1+i\gamma}} - 1 + i|p|x^{1+i\gamma}\big)\frac{dx}{x^3}\\
&= \int\limits_{A(\gamma)}^{B(\gamma)} \big(e^{-i|p|x^{1+i\gamma}} - 1 + i|p|x^{1+i\gamma} - \tfrac{1}{2}(-i|p|x^{1+i\gamma})^2\big)\frac{dx}{x^3} + \frac{i^2p^2}{2}\int\limits_{A(\gamma)}^{B(\gamma)} e^{2i\gamma \ln x}\frac{dx}{x}\\
&= I_1(\gamma,p) - \frac{p^2}{2}\frac{e^{2i\gamma u}}{2i\gamma}\Big|_{u=\ln A(\gamma)}^{\ln B(\gamma)} = I_1(\gamma,p) + i\frac{p^2}{4\gamma}\big(e^{-\pi i} - e^{-4\pi i/3}\big)\\
&= I_1(\gamma,p) - i\frac{p^2}{8\gamma} + \frac{\sqrt{3}p^2}{8\gamma}.
\end{aligned}
$$

Тогда получаем

$$
\widehat{a}_\gamma(p) = -\frac{\sqrt{3}}{2}p^2 + 4\gamma\Big(I_1(\gamma,p) - i\frac{p^2}{8\gamma} + \frac{\sqrt{3}p^2}{8\gamma}\Big) = 4\gamma I_1(\gamma,p) - i\frac{p^2}{2}.
$$

Ясно, что B также является псевдодифференциальным оператором с символом

$$
\widehat{b}_\gamma(p) = 4\gamma I_1(\gamma,p) = 4\gamma \int\limits_{A(\gamma)}^{B(\gamma)} \big(e^{-i|p|x^{1+i\gamma}} - 1 + i|p|x^{1+i\gamma} - \tfrac{1}{2}(-i|p|x^{1+i\gamma})^2\big)\frac{dx}{x^3}.
$$

Так как для любого $z \in \mathbf{C}$ выполнено $|e^z - 1 - z| \leqslant \frac{|z|^2}{2}$ и $|e^z - 1 - z - z^2/2| \leqslant \frac{|z|^3}{6}$, то справедливы две оценки

$$
|\widehat{b}_\gamma(p)| \leqslant 8\gamma \int\limits_{A(\gamma)}^{B(\gamma)} \frac{p^2}{2}\frac{dx}{x} = 4\gamma p^2\big(\ln B(\gamma) - \ln A(\gamma)\big) = 4\gamma p^2\frac{\pi}{6\gamma} \leqslant \pi p^2, \quad (9)
$$

$$
|\widehat{b}_\gamma(p)| \leqslant 4\gamma \int\limits_{A(\gamma)}^{B(\gamma)} \frac{p^3}{6}dx \leqslant \frac{2\gamma B(\gamma)}{3}p^3 \leqslant \gamma B(\gamma)p^3. \quad (10)
$$

Далее, из (9) и (10) следует, что

$$\begin{aligned}
\|\widehat{B\varphi}\|_{L_2}^2 &= \int\limits_{\mathbf{R}} \bigl|\widehat{B\varphi}(p)\bigr|^2\,dp = \int\limits_{\mathbf{R}} \bigl|\widehat{b}_\gamma(p)\bigr|^2\bigl|\widehat{\varphi}(p)\bigr|^2\,dp \\
&\leqslant \int\limits_{|p|<1/B(\gamma)} \bigl|\widehat{b}_\gamma(p)\bigr|^2\bigl|\widehat{\varphi}(p)\bigr|^2\,dp + \int\limits_{|p|>1/B(\gamma)} \bigl|\widehat{b}_\gamma(p)\bigr|^2\bigl|\widehat{\varphi}(p)\bigr|^2\,dp \\
&\leqslant \gamma^2 B^2(\gamma) \int\limits_{|p|<1/B(\gamma)} p^6\bigl|\widehat{\varphi}(p)\bigr|^2\,dp + \pi^2 \int\limits_{|p|>1/B(\gamma)} p^4\bigl|\widehat{\varphi}(p)\bigr|^2\,dp \\
&\leqslant \Bigl[\gamma^2 B^{2+2\delta-2}(\gamma) + \pi^2 B^{2\delta}(\gamma)\Bigr] \int\limits_{\mathbf{R}} \bigl(1+p^{4+2\delta}\bigr)\bigl|\widehat{\varphi}(p)\bigr|^2\,dp \\
&\leqslant C\max\{\gamma^2,1\}B^{2\delta}(\gamma)\|\varphi\|_{W_2^{2+\delta}}.
\end{aligned}$$

Тогда для любого $\delta \in (0,1]$ имеем

$$\|B\|_{W_2^{2+\delta}\to L_2} \leqslant C\max\{\gamma,1\}B^{\delta}(\gamma). \qquad (11)$$

Во введенных обозначениях

$$A+B = \frac{i}{2}\frac{\partial^2}{\partial x^2}.$$

Заметим, что для любого положительного l справедливо неравенство для операторных норм

$$\Bigl\|e^{t(A+B)}\Bigr\|_{W_2^l\to W_2^l} \leqslant 1. \qquad (12)$$

Для доказательства остается оценить норму $\|e^{tA_\gamma}\|_{L_2\to L_2}$.

Лемма 3.3. *Для любых $p \geqslant 0$ и $x \in [A(\gamma), B(\gamma)]$ выполнено*

$$\operatorname{Re}\Bigl(e^{-i|p|x^{1+i\gamma}} - 1 + i|p|x^{1+i\gamma} + \frac{p^2}{2}x^{2+2i\gamma}\Bigr) \leqslant 0.$$

Доказательство. Обозначим через $z = u+iv = -i|p|x^{1+i\gamma}$. Тогда при $p \in \mathbf{R}$ и $x \in [A(\gamma), B(\gamma)]$ имеем $u \leqslant 0$ и $0 \leqslant v \leqslant -\frac{u}{\sqrt{3}}$.

В новых обозначениях требуется доказать, что для всех $u \leqslant 0$ и $0 \leqslant v \leqslant -\frac{u}{\sqrt{3}}$ выполнено:

$$e^u\cos(v) - 1 - u - \frac{u^2-v^2}{2} \leqslant 0.$$

Рассмотрим $0 \leqslant \varkappa \leqslant \frac{\sqrt{3}}{3}$ и покажем, что для всех $u \leqslant 0$ выполнено

$$f(u) = e^u \cos(\varkappa u) - 1 - u - \frac{u^2}{2}(1-\varkappa^2) \leqslant 0.$$

Вычислим две первые производные функции f:

$$\begin{aligned} f'(u) &= e^u\big(\cos(\varkappa u) - \varkappa \sin(\varkappa u)\big) - 1 - (1-\varkappa^2)u, \\ f''(u) &= e^u\big((1-\varkappa^2)\cos(\varkappa u) - 2\varkappa\sin(\varkappa u)\big) - (1-\varkappa^2). \end{aligned}$$

Покажем, что $f''(u) \leqslant 0$ для всех $u \leqslant 0$. Так как $|\cos(\varkappa u)| \leqslant 1$ и $\sin(\varkappa u) > \varkappa u$ для всех $u \leqslant 0$, то

$$f''(u) \leqslant e^u(1 - \varkappa^2 - 2\varkappa^2 u) - (1-\varkappa^2).$$

Так как $0 \leqslant \varkappa \leqslant \frac{\sqrt{3}}{3}$, то $l(\varkappa) = \frac{2\varkappa^2}{1-\varkappa^2} \in [0,1]$. Покажем, что для любых $l \in [0,1]$ и $u \leqslant 0$ выполнено

$$1 - lu \leqslant e^{-u}. \tag{13}$$

Несложно видеть, что для $u = 0$ неравенство (13) выполнено. Так как $(1-lu)' = -l \geqslant (e^{-u})' = -e^{-u}$ для всех $u \leqslant 0$, то (13) выполнено для всех $u \leqslant 0$. Отсюда следует, что для любого $u \leqslant 0$ имееем $f''(u) \leqslant 0$. Так как $f'(0) = 0$, то $f'(u) \geqslant 0$ для всех $u \leqslant 0$ и, аналогично, получаем, что $f(u) \leqslant 0$ для всех $u \leqslant 0$ и для любого $\varkappa \in [0, 1/\sqrt{3}]$. Это завершает доказательство леммы. $\square$

Из леммы 3.3 следует оценка нормы $\|e^{tA_\gamma}\|_{L_2\to L_2}$:

$$\|e^{tA_\gamma}\|_{L_2\to L_2} \leqslant \sup_{p\in\mathbf{R}} \exp\Big\{\mathrm{Re}\,\Big(e^{-i|p|x^{1+i\gamma}} - 1 + i|p|x^{1+i\gamma} + \frac{p^2}{2}x^{2+2i\gamma}\Big)\Big\} \leqslant 1. \tag{14}$$

Утверждение теоремы следует из (11), (12), (14). $\square$

Следствие 3.4. *Для любой $\varphi \in L_2(\mathbf{R})$ выполнено*

$$\|P^t\varphi - P^t_\gamma\varphi\|_{L_2} \underset{\gamma\to 0}{\longrightarrow} 0.$$

Отметим, что теорема 3.2 значительно улучшает условия на начальную функцию φ по сравнению с результатами [3].

Рассмотрим более общую задачу Коши:

$$\frac{\partial}{\partial t}u(t,x) = \frac{\sigma^2}{2}\frac{\partial^2}{\partial x^2}u(t,x), \quad u(0,x) = \varphi(x), \tag{15}$$

где параметр $\sigma \in \mathbf{C}$ такой, что $\sigma = e^{i\varkappa}$ и $0 \leqslant \varkappa \leqslant \frac{\pi}{4}$. Случай $\varkappa = 0$ соответствует задаче Коши (1), а случай $\varkappa = \frac{\pi}{4}$ соответствует задаче Коши (3).

Аналогично предыдущему случаю, решение задачи Коши (15) может быть записано как $u(t,x) = P^t_\sigma \varphi(x)$, где полугруппа операторов P^t_σ, $t > 0$, задается следующим образом:

$$P^t_\sigma = \exp\Big\{ t \frac{\sigma^2}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \Big\}. \tag{16}$$

Рассмотрим случайный процесс $\eta_{\gamma,\sigma}(t)$, $t > 0$, определяемый равенством по распределению

$$\eta_{\gamma,\sigma}(t) \overset{d}{=} \sqrt{\sin(2\varkappa)}\, \widetilde{\xi}_\gamma(t) + \sqrt{\cos(2\varkappa)}\, w_1(t),$$

где $\widetilde{\xi}_\gamma(t)$, $t > 0$, определяется в (5), а $w_1(t)$, $t > 0$, – стандартный винеровский процесс со значениями в $\mathbf{R}$, не зависящий от $\widetilde{\xi}_\gamma(t)$.

Для σ, γ определим полугруппу операторов $P^t_{\gamma,\sigma}$, которая действует на $\varphi \in L_2(\mathbf{R})$ как

$$P^t_{\gamma,\sigma}\varphi(x) = \mathbf{E}\left[\varphi_+(x - \eta_{\gamma,\sigma}(t)) + \varphi_-(x + \eta_{\gamma,\sigma}(t))\right]. \tag{17}$$

Теорема 3.5. *Существует постоянная $C > 0$, такая что для любой $\varphi \in W_2^{2+\delta}(\mathbf{R})$, $\delta \in (0,1]$ выполнено*

$$\|P^t_\sigma \varphi - P^t_{\gamma,\sigma}\varphi\|_{L_2} \leqslant Ct \max\{\gamma, 1\} B^\delta(\gamma) \|\varphi\|_{W_2^{2+\delta}},$$

где P^t_σ, $P^t_{\gamma,\sigma}$ – полугруппы операторов, определенные в (16), (17).

Доказательство. Аналогично доказательству теоремы 3.2, получаем, что

$$\widehat{a}_\gamma(p) = 4\gamma I_1(\gamma, \sqrt{\sin(2\varkappa)}\, p) - \frac{\sigma^2}{2} p^2, \quad \widehat{b}_\gamma(p) = 4\gamma I_1(\gamma, \sqrt{\sin(2\varkappa)}\, p).$$

Дальнейшее доказательство полностью аналогично доказательству теоремы 3.2. □

Список литературы

1. И. А. Алексеев, *Устойчивые случайные величины с комплексным индексом устойчивости, II.* — Теория вероятн. и ее примен. **67**, No. 4 (2022), 627–648.
2. И. А. Алексеев, *Вероятностная аппроксимация оператора типа Римана–Лиувилля с индексом устойчивости больше двух.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **510** (2022), 5–27.

3. И. А. Ибрагимов, Н. В. Смородина, М. М. Фаддеев, *Об одной предельной теореме, связанной с вероятностным представлением решения задачи Коши с оператором Шрёдингера.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **454** (2016), 158–175.
4. И. А. Ибрагимов, Н. В. Смородина, М. М. Фаддеев, *Вероятностная аппроксимация оператора эволюции.* — Функц. анализ и его прил. **52**, No. 2 (2018), 25–39.
5. Т. Като, *Теория возмущений линейных операторов*, М., Мир, 1972.
6. Дж. Кингман, *Пуассоновские процессы*, М., МЦНМО, 2007.
7. М. В. Платонова, С. В. Цыкин, *Вероятностная аппроксимация решения задачи Коши для уравнения Шрёдингера высокого порядка.* — Теория вероятн. и ее примен. **65**, No. 4 (2020), 710–724.
8. М. В. Платонова, *Аналог формулы Фейнмана–Каца для оператора высокого порядка.* — Теория вероятн. и ее примен. **67**, No. 1 (2022), 81–99.
9. А. В. Скороход, *Случайные процессы с независимыми приращениями*, М., Наука, 1964.

Alexeev I. A., Platonova M. V. Probabilistic approximation of the Schrödinger equation by complex-valued random processes.

A method for probabilistic approximation of the solution of the Cauchy problem for a one-dimensional unperturbed Schrödinger equation by mathematical expectations of functionals of some complex-valued Lévy process is proposed. In contrast to previous papers, we obtain the convergence rate of the constructed approximation to the exact solution for a wider class of initial functions.

С.-Петербургское отделение
Математического института
им. В. А. Стеклова РАН,
С.-Петербург, Россия
E-mail: vanyalexeev@list.ru

Поступило 14 сентября 2023 г.

С.-Петербургское отделение
Математического института
им. В. А. Стеклова РАН;
С.-Петербургский
государственный университет,
С.-Петербург, Россия
E-mail: mariyaplat@rambler.ru