Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 525, 2023 г.

Ю. В. Якубович

МОМЕНТЫ СЛУЧАЙНЫХ РАЗБИЕНИЙ ЦЕЛЫХ ЧИСЕЛ

§1. Введение

Напомним, что разбиением целого числа $n \geqslant 0$ называется его представление в виде суммы некоторого количества ℓ положительных целых слагаемых $n = \lambda_1 + \cdots + \lambda_\ell$, которые называют *частями* разбиения. При этом такие представления, отличающиеся лишь порядком частей, считаются одинаковыми, поэтому можно выбрать некоторый канонический порядок. Обычно выбирают упорядочение по убыванию, так что $\lambda_1 \geqslant \ldots \geqslant \lambda_\ell$. При таком выборе удобно отождествлять разбиение с бесконечной последовательностью $(\lambda_1, \lambda_2, \ldots)$, полагая $\lambda_j = 0$ при $j > \ell$.

Для разбиения $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots)$, $\lambda_1 \geqslant \lambda_2 \geqslant \ldots \geqslant 0$ определим *счётчики частей* заданного размера $k \in \mathbb{N} = \{1, 2, \ldots\}$ как $R_k(\lambda) = \#\{j : \lambda_j = k\}$ и *длину разбиения* (общее количество частей) $L(\lambda) = \sum_{k=1}^{\infty} R_k(\lambda) = \max\{j : \lambda_j > 0\}$. Здесь и далее $\#A$ – размер конечного множества A. Для вещественного p рассмотрим величину

$$N_p(\lambda) = \sum_{j=1}^{L(\lambda)} \lambda_j^p = \sum_{k=1}^{\infty} k^p R_k(\lambda). \tag{1}$$

Мы называем $N_p(\lambda)$ *p-м моментом* разбиения λ, поскольку это есть p-й момент меры (с носителем $\mathbb{N}$), которая придаёт вес $R_k(\lambda)$ числу $k \in \mathbb{N}$. Обозначим P^n равномерную вероятностную меру на конечном множестве $\mathcal{P}(n)$ всех разбиений числа $n \in \mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$. Выбирая λ случайно с распределением P^n, получим, что каждый функционал N_p становится случайной величиной. Нетрудно видеть, что P^n-почти наверное (п.н.) $N_1(\lambda) = n$ и $N_0(\lambda) = L(\lambda)$.

Предельное распределение $L(\lambda)$ (при $n \to \infty$) хорошо известно из новаторской работы Эрдёша и Ленера [5]. Одним из их результатов

Ключевые слова: случайное разбиение целого числа, равномерная мера на разбиениях, моменты разбиения, предельная теорема, тета-распределение Якоби.

Работа поддержана грантом РНФ No. 21-11-00141.

является следующая предельная теорема:

$$\lim_{n\to\infty} P^n\big\{\lambda : \tfrac{\pi}{\sqrt{6n}}L(\lambda) - \tfrac{1}{2}\log n - \log\tfrac{\pi}{\sqrt{6}} \leqslant x\big\} = \mathrm{e}^{-\mathrm{e}^{-x}}, \quad x \in \mathbb{R}. \tag{2}$$

Этот предел является кумулятивной функцией распределения для распределения Гумбеля, которое обсуждается далее в разд. 4.

В этой статье мы исследуем предельное поведение при $n \to \infty$ случайных величин N_p при всех вещественных p. Наш основной результат сформулирован ниже в теореме 1. Для её формулировки фиксируем некоторые обозначения. Пусть случайная величина $\mathcal{N}$ имеет стандартное нормальное распределение. Введём также случайную величину

$$\mathcal{M}_p := \sum_{k=1}^{\infty} k^{p-1}(E_k - 1), \quad p < 1/2, \tag{3}$$

где E_k – независимые одинаково распределённые (н.о.р.) случайные величины со стандартным экспоненциальным распределением. В ряде (3) k-е слагаемое имеют нулевое математическое ожидание и дисперсию k^{2p-2}, и при $p < 1/2$ ряд из дисперсий сходится, так что по теореме Колмогорова ряд сходится п.н., и $\mathcal{M}_p$ корректно определена. Свойства случайной величины $\mathcal{M}_p$ исследуются в разд. 4. Мы используем обозначения $\gamma = \lim_{n\to\infty}(1+1/2+\cdots+1/n-\log n)$ для постоянной Эйлера–Маскерони, $\zeta(p)$ для дзета-функции Римана, то есть для аналитического продолжения в $\mathbb{C}$ функции, представленной при $\operatorname{Re} p > 1$ абсолютно сходящимся рядом $\zeta(p) = \sum_{k=1}^{\infty} k^{-p}$, и $\xrightarrow{d}$ для сходимости по распределению.

Теорема 1. (i) *Если $1/2 \leqslant p < \infty$ и $p \neq 1$, то, когда распределение N_p задаётся мерой P^n,*

$$\frac{N_p - a_n}{b_n} \xrightarrow{d} \mathcal{N}, \quad n \to \infty, \tag{4}$$

где

$$a_n = \begin{cases} \Gamma(p+1)\zeta(p+1)\zeta(2)^{-(p+1)/2} n^{(p+1)/2}, & p > 1/2, \\ \pi^{-1}\sqrt{3/2}\sqrt{n}\log n, & p = 1/2; \end{cases}$$

$$b_n = \begin{cases} \Big(\Gamma(2p+1)\zeta(2p) - \frac{\Gamma(p+2)^2\zeta(p+1)^2}{2\zeta(2)}\Big)^{1/2} \big(\frac{6n}{\pi^2}\big)^{p/2+1/4}, & p > 1/2, \\ \pi^{-1}\sqrt{3n\log n}, & p = 1/2. \end{cases}$$

(ii) *Если $-\infty < p < 1/2$, то, когда распределение N_p задаётся мерой P^n,*

$$b_n^{-1} N_p - a_n \xrightarrow{d} \mathcal{M}_p, \quad n \to \infty, \tag{5}$$

где

$$a_n = \begin{cases} \Gamma(p+1)\zeta(p+1)6^{p/2}\pi^{-p}n^{p/2} + \zeta(1-p), & p > 0, \\ \frac{1}{2}\log n + \gamma + \log\bigl(\sqrt{6}/\pi\bigr), & p = 0, \\ \zeta(1-p), & p < 0; \end{cases} \quad b_n = \frac{\sqrt{6n}}{\pi}. \tag{6}$$

Замечание. При $p = 1$, если распределение N_p задаётся мерой P^n, то выполняется $N_1 \equiv n$, тогда как $a_n = n$ и $b_n = 0$, что естественно ожидать.

Насколько нам известно, моменты случайных разбиений целых чисел ранее систематически не исследовались. Однако сами моменты разбиений использовались в нескольких работах. В работе [14] исследовалась предельная форма случайных разбиений, в которых число слагаемых зависит от размера разбиения n и растёт пропорционально $\sqrt{n}$, то есть несколько медленнее предписанной результатом Эрдёша и Ленера (2) скорости $\frac{\sqrt{2n}}{\pi\sqrt{3}}\log n$, имеющей место для равномерно случайных разбиений числа n. Другими словами, согласованным образом растут моменты N_0 и N_1. В работе [10] этот результат обобщается на согласованный рост нескольких моментов N_j, где $j \in J \subset \mathbb{N}_0$, и для разбиений с такими ограничениями находятся асимптотика их количества и предельные формы.

Вопрос о поведении моментов N_p случайных разбиений, при вещественных $p \geqslant 1$, тесно связан с вопросом о поведении ℓ^p-норм случайных разбиений, которые естественно определить как $N_p^{1/p}$. При $p = 1$, очевидно, для случайного разбиения λ, выбранного с равномерными распределением P^n из множества $\mathcal{P}(n)$ всех разбиений числа n, норма $\|\lambda\|_1$ будет равна n. При фиксированном $p > 1$ норма уже будет случайной и асимптотически нормальной после подходящей нормировки, что несложно вывести из теоремы 1(i). Однако если допустить, что рассматриваемый показатель $p = p(n)$ зависит от n и возрастает к бесконечности, то ситуация становится более интересной. Когда этот рост достаточно быстрый, то норма должна сходится к $\|\lambda\|_\infty \equiv \lambda_1$, максимальному слагаемому разбиения. Максимальное слагаемое, как хорошо известно (и мгновенно доказывается применением операции сопряжения разбиений, см. [16]), имеет такое же распределение, как число слагаемых $L(\lambda)$, то есть после нормировки сходится к распределению Гумбеля (см. (2)). Для более медленного роста показателя $p(n)$ должны появляться какие-то другие распределения; для совсем медленного роста естественно ожидать, что предельное распределение будет нормальным, как и для фиксированного p. Мы предполагаем, что граница проходит при росте $p(n) := c\log n$: нормы $N_{p(n)}^{1/p(n)}$ после центрирования и нормировки будут иметь предельное распределение Q_c, которое при $c \to \infty$ имеет слабым пределом распределение Гумбеля, а при $c \downarrow 0$ – нормальное распределение. Подтверждение или опровержение этого предположения представляется достаточно интересным, но в рамках настоящего исследования оказалось невозможным. Здесь можно увидеть аналогию с изучением норм $\|X\|_{p(n)}$ случайных векторов X со значениями в $\mathbb{R}^n$ и н.о.р. координатами при $n \to \infty$ и согласованно возрастающем показателе $p(n)$, проведённым в работах [13, 2, 3, 9].

Работа организована следующим образом. В разд. 2 мы напоминаем предложенную Фристедтом [6] и Вершиком [17, 18] конструкцию большого канонического ансамбля разбиений и находим асимптотическое поведение моментов случайных разбиений в нём (теорема 2). В разд. 3 доказывается теорема 1, отдельно для $p > 1/2$ и для $p \leqslant 1/2$. Наконец, в разд. 4 изучаются некоторые свойства предельной случайной величины $\mathcal{M}_p$ при всех $p < 1/2$. При неположительных целых p удаётся найти альтернативные выражения для её преобразования Лапласа.

§2. Большой канонический ансамбль разбиений

Мы используем следующую конструкцию, впервые введённую в контексте разбиений целых чисел Фристедтом [6]. Для заданного параметра $\beta > 0$, припишем вес $\mathrm{e}^{-\beta N_1(\lambda)}$ разбиению $\lambda \in \mathcal{P} := \bigcup_{n=0}^{\infty} \mathcal{P}(n)$ и нормируем эти веса величиной

$$F(\beta) = \sum_{\lambda \in \mathcal{P}} \mathrm{e}^{-\beta N_1(\lambda)} = \sum_{n=0}^{\infty} \mathrm{e}^{-\beta n} \# \mathcal{P}(n) = \prod_{k=1}^{\infty} \bigl(1 - \mathrm{e}^{-\beta k}\bigr)^{-1}$$

(см., напр., [16] для доказательства последнего равенства), чтобы определить вероятностную меру P_β на $\mathcal{P}$. Хорошо известно и легко проверить, что

- при любых $\beta > 0$, $n \in \mathbb{N}_0$ и $B \subset \mathcal{P}$,

$$P^n(B) = P_\beta(B \cap \mathcal{P}(n)) / P_\beta(\mathcal{P}(n)),$$

то есть P^n является условной вероятностной мерой P_β при условии $N_1(\lambda) = n$;

- когда λ имеет распределение P_β, счётчики R_k являются независимыми случайными величинами и R_k имеет геометрическое распределение с параметром $1 - \mathrm{e}^{-\beta k}$, то есть $P_\beta(R_k = r) = (1 - \mathrm{e}^{-\beta k})\mathrm{e}^{-\beta k r}$, $r = 0, 1, 2, \dots$.

Тем самым, вспомогательные меры P_β являются выпуклыми комбинациями мер P^n и относительно них счётчики R_k становятся независимыми. Они показали свою эффективность при изучении исходных мер P^n, см., напр., [6, 17, 11]. Следуя [17, 18], мы называем множество $\mathcal{P}$ всех разбиений неотрицательных целых чисел с мерами P_β *большим каноническим ансамблем* разбиений и обозначаем $\mathbb{E}_\beta$, $\mathbb{D}_\beta$ и Cov_β функционалы математического ожидания, дисперсии и ковариации относительно меры P_β.

Предложение 1. *При $\beta \downarrow 0$ выполняются асимптотические соотношения*

$$\mathbb{E}_\beta[N_p] = \begin{cases} \Gamma(p+1)\zeta(p+1)\beta^{-p-1} + \zeta(1-p)\beta^{-1} + O(1), & p > 0, \\ (\log(\beta^{-1}) + \gamma)\beta^{-1} + O(1), & p = 0, \\ \zeta(1-p)\beta^{-1} + O(\beta^{-1-p}), & p \in (-1, 0), \\ \zeta(2)\beta^{-1} + O(\log(\beta^{-1})), & p = -1, \\ \zeta(1-p)\beta^{-1} + O(1), & p < -1; \end{cases} \tag{7}$$

$$\mathbb{D}_\beta[N_p] = \begin{cases} \Gamma(2p+1)\zeta(2p)\beta^{-2p-1} + O(\beta^{-2}), & p > 1/2, \\ (\log(\beta^{-1}) + 1 + \gamma)\beta^{-2} + O(1), & p = 1/2, \\ \zeta(2-2p)\beta^{-2} + O(\beta^{-1-2p}), & p \in (-1/2, 1/2), \\ \zeta(3)\beta^{-2} + O(\log(\beta^{-1})), & p = -1/2, \\ \zeta(2-2p)\beta^{-2} + O(1), & p < -1/2; \end{cases} \tag{8}$$

$$\mathrm{Cov}_\beta[N_p, N_1] = \begin{cases} \Gamma(2+p)\zeta(1+p)\beta^{-2-p} + O(\beta^{-2}), & p > 0, \\ (\log(\beta^{-1}) + 1 + \gamma)\beta^{-2} + O(1), & p = 0, \\ \zeta(1-p)\beta^{-2} + O(\beta^{-2-p}), & p \in (-2, 0), \\ \zeta(1-p)\beta^{-2} + O(\log(\beta^{-1})), & p = -2, \\ \zeta(1-p)\beta^{-2} + O(1), & p < -2. \end{cases} \tag{9}$$

Доказательство. Обозначим для краткости

$$\mu_k(\beta) := \mathbb{E}_\beta[R_k] = \frac{\mathrm{e}^{-\beta k}}{1-\mathrm{e}^{-\beta k}}\,. \tag{10}$$

Имеем

$$\mathbb{E}_\beta[N_p] = \sum_{k=1}^{\infty} k^p \mu_k(\beta),$$

что представляет собой гармоническую сумму (см. [7]) с базовой функцией $g(x) = \mathrm{e}^{-x}/(1-\mathrm{e}^{-x})$, которая имеет преобразование Меллина $g^*(s) = \zeta(s)\Gamma(s)$, $\operatorname{Re} s \geqslant 1$, и рядом Дирихле для амплитудно-частотных пар $\zeta(s-p)$, $\operatorname{Re} s > p+1$. Поэтому из теоремы 5 [7] немедленно получаем (7).

Аналогично, вводя обозначение

$$\sigma_k^2(\beta) := \mathbb{D}_\beta[R_k] = \frac{\mathrm{e}^{-\beta k}}{(1-\mathrm{e}^{-\beta k})^2}, \tag{11}$$

получаем гармоническую сумму

$$\mathbb{D}_\beta[N_p] = \sum_{k=1}^{\infty} k^{2p} \sigma_k^2(\beta).$$

Преобразование Меллина базовой функции $g(x) = \mathrm{e}^{-x}/(1-\mathrm{e}^{-x})^2$ – это $g^*(s) = \Gamma(s)\zeta(s-1)$, $\operatorname{Re} s > 2$, а ряд Дирихле амплитудно-частотных пар есть $\zeta(s-2p)$, $\operatorname{Re} s > 1+2p$. Применяя опять теорему 5 [7], получаем (8). Наконец,

$$\operatorname{Cov}_\beta[N_p, N_1] = \sum_{k=1}^{\infty} k^{p+1} \sigma_k^2(\beta)\,,$$

и базовая функция такая же, как и выше, а ряд Дирихле в этом случае равен $\zeta(s-1-p)$, $\operatorname{Re} s > 2+p$, откуда получаем (9). □

Нам понадобится следующая оценка характеристической функции геометрической случайной величины.

Лемма 1. *Пусть X – геометрическая случайная величина со средним $\mu > 0$, то есть $\mathbb{P}[X = j] = \mu^j/(1+\mu)^{j+1}$ при $j = 0, 1, 2, \ldots$. Тогда её характеристическая функция $\varphi(y) = \mathbb{E}\mathrm{e}^{\mathrm{i}yX}$ удовлетворяет* *неравенствам*

$$0 \leqslant \operatorname{Re}\log\varphi(y) + \frac{\sigma^2 y^2}{2} \leqslant \left(\frac{\sigma^2}{4!} + \frac{\sigma^4}{4}\right) y^4, \tag{12}$$

$$\bigl|\operatorname{Im}\log\varphi(y) - \mu y\bigr| \leqslant \tfrac{1}{6}(2\mu^3 + 3\mu^2 + \mu)|y|^3 \tag{13}$$

при всех $y \in \mathbb{R}$, *где* $\sigma^2 = \mu(\mu+1)$ *равняется дисперсии* X.

Замечание. Выражение $2\mu^3 + 3\mu^2 + \mu = \mathbb{E}(X-\mu)^3$ в (13) представляет собой третий центральный момент X.

Доказательство. Простое вычисление показывает, что

$$\varphi(y) = \frac{1}{1 - \mu(\mathrm{e}^{\mathrm{i}y} - 1)}\,.$$

Поэтому

$$\begin{aligned} -\operatorname{Re}\log\varphi(y) &= \operatorname{Re}\log\bigl(1 - \mu(\mathrm{e}^{\mathrm{i}y} - 1)\bigr) \\ &= \tfrac{1}{2}\log\bigl|1 - \mu(\mathrm{e}^{\mathrm{i}y} - 1)\bigr|^2 = \tfrac{1}{2}\log\bigl(1 + 2\sigma^2(1 - \cos y)\bigr)\,. \end{aligned} \tag{14}$$

Применяя элементарные неравенства $x - x^2/2 \leqslant \log(1+x) \leqslant x$ при $x = \sigma^2(1-\cos y) \geqslant 0$ и $y^2/2 - y^4/4! \leqslant 1 - \cos y \leqslant y^2/2$, получаем

$$\begin{aligned} \frac{\sigma^2 y^2}{2} - \frac{\sigma^2 y^4}{4!} - \frac{\sigma^4 y^4}{4} &\leqslant \sigma^2(1-\cos y) - \sigma^4(1-\cos y)^2 \\ &\leqslant \frac{1}{2}\log\bigl(1 + 2\sigma^2(1-\cos y)\bigr) \leqslant \sigma^2(1-\cos y) \leqslant \frac{\sigma^2 y^2}{2}, \end{aligned}$$

что эквивалентно (12).

Поскольку $\operatorname{Re}\bigl(1 - \mu(\mathrm{e}^{\mathrm{i}y} - 1)\bigr) \geqslant 1 > 0$, то

$$\operatorname{Im}\log\varphi(y) = -\arg\bigl(1 - \mu(\mathrm{e}^{\mathrm{i}y} - 1)\bigr) = \arctan\frac{\mu\sin y}{1 + \mu(1-\cos y)}\,.$$

Предположим сперва, что $y \in [0,\pi]$ и, значит, $\sin y \geqslant 0$. Из неравенств $x - x^3/3 \leqslant \arctan x \leqslant x$ (при $x \geqslant 0$), $1/(1+z) \geqslant 1 - z$ (при $z \geqslant 0$),

$1-\cos y \leqslant y^2/2$ и $y - y^3/6 \leqslant \sin y \leqslant y$ получаем, что

$$\begin{aligned}\mu y - \frac{\mu y^3}{6} - \frac{\mu^2 y^3}{2} - \frac{\mu^3 y^3}{3} &\leqslant \mu y - \frac{\mu y^3}{6} - \mu^2 y(1-\cos y) - \frac{\mu^3 y^3}{3} \\ &\leqslant \mu\left(y - \frac{y^3}{6}\right)(1-\mu(1-\cos y)) - \frac{\mu^3 \sin^3 y}{3} \\ &\leqslant \frac{\mu \sin y}{1+\mu(1-\cos y)} - \frac{\mu^3\sin^3 y}{3(1+\mu(1-\cos y))^3} \\ &\leqslant \arctan\frac{\mu\sin y}{1+\mu(1-\cos y)} \leqslant \frac{\mu \sin y}{1+\mu(1-\cos y)} \leqslant \mu y,\end{aligned}$$

так что (13) выполнено при $y \in [0,\pi]$. При $y \geqslant \pi$ неравенство (13) является довольно грубым и следует, например, из оценки

$$\begin{aligned}\left|\arctan\frac{\mu\sin y}{1+\mu(1-\cos y)} - \mu y\right| &\leqslant \arctan\mu + \mu y \\ &\leqslant \mu(1+y) < \frac{\mu y \pi^2}{6} \leqslant \frac{(2\mu^3+3\mu^2+\mu)}{6} y^3.\end{aligned}$$

Наконец, при $y < 0$ неравенство (13) также выполняется, поскольку $\operatorname{Im}\log\varphi(y) + \mu y$ – это нечётная функция y. □

Нам понадобится следующая оценка.

Лемма 2. *При любом $q > 0$ и произвольных $r, p \in \mathbb{R}$ найдётся константа C, такая что для всех $\beta > 0$ имеет место неравенство*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\beta^r k^p \mathrm{e}^{-q\beta k}}{(1-\mathrm{e}^{-\beta k})^r} \leqslant \begin{cases} C, & r > p+1, \\ C|\log\beta|, & r = p+1, \\ C\beta^{r-p-1}, & r < p+1. \end{cases}$$

Доказательство. Мы можем оценить

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\beta^r k^p \mathrm{e}^{-q\beta k}}{(1-\mathrm{e}^{-\beta k})^r} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(\beta k)^r k^{p-r} \mathrm{e}^{-q\beta k}}{(1-\mathrm{e}^{-\beta k})^r} \leqslant \sup_{u\geqslant 0} \frac{u^r \mathrm{e}^{-qu/2}}{(1-\mathrm{e}^{-u})^r} \sum_{k=1}^{\infty} k^{p-r}\mathrm{e}^{-q\beta k/2}.$$

Поскольку $u^r \mathrm{e}^{-qu/2}(1-\mathrm{e}^{-u})^{-r}$ – это положительная и непрерывная функция переменной u с конечными пределами в 0 и ∞, супремум конечен. Если $r > p+1$, то ряд по k сходится даже при $\beta = 0$, а если $r \leqslant p+1$, то желаемая оценка получается аппроксимацией ряда интегралом. □

Теперь мы можем сформулировать и доказать результат о предельном поведении случайных величин N_p в большом каноническом ансамбле разбиений, когда параметр β стремится к нулю.

Теорема 2. *Если рассматриваемая на $\mathcal{P}$ мера есть P_β, то*

(i) *при $p \geqslant 1/2$,*

$$\frac{N_p - a(\beta)}{b(\beta)} \xrightarrow{d} \mathcal{N}, \quad \beta \downarrow 0,$$

где

$$a(\beta) = \Gamma(p+1)\zeta(p+1)\beta^{-p-1},$$

$$b(\beta) = \begin{cases} \sqrt{\Gamma(2p+1)\zeta(2p)}\beta^{-p-1/2}, & p > 1/2, \\ \beta^{-1}\sqrt{\log(\beta^{-1})}, & p = 1/2; \end{cases}$$

(ii) *при $p < 1/2$,*

$$\beta N_p - a(\beta) \xrightarrow{d} \mathcal{M}_p, \quad \beta \downarrow 0,$$

где

$$a(\beta) = \begin{cases} \Gamma(p+1)\zeta(p+1)\beta^{-p} + \zeta(1-p), & p \in (0, 1/2), \\ \log(\beta^{-1}) + \gamma, & p = 0, \\ \zeta(1-p), & p < 0. \end{cases}$$

Доказательство. (i) Это является следствием центральной предельной теоремы (ЦПТ). Чтобы проверить применимость ЦПТ, можно использовать достаточные условия Ляпунова. Несложно проверить, что когда β близко к 0, выполняется оценка

$$\mathbb{E}_\beta\big[\big|R_k - \mathbb{E}_\beta[R_k]\big|^3\big] \leqslant \frac{12\mathrm{e}^{-k\beta}}{(1-\mathrm{e}^{-k\beta})^3}.$$

Согласно лемме 2 с $p = 0$, $q = 1$ и $r = 3$, получаем, что

$$L_3(\beta) := \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{E}_\beta\big[\big|R_k - \mathbb{E}_\beta[R_k]\big|^3\big] = O(\beta^{-3}), \quad \beta \downarrow 0.$$

Используя асимптотику дисперсии N_p, найденную в предложении 1, видим, что $L_3(\beta)/(\mathbb{D}_\beta N_p)^{3/2} \to 0$ когда $\beta \downarrow 0$ при любом $p \geqslant 1/2$. Поэтому условие Ляпунова гарантирует, что ЦПТ имеет место.

(ii) Рассмотрим главную ветвь логарифма характеристической функции случайной величины $\beta(N_p - \mathbb{E}_\beta N_p)$:

$$\log \mathbb{E}_\beta\bigl[\mathrm{e}^{\mathrm{i}t\beta(N_p-\mathbb{E}_\beta N_p)}\bigr] = \sum_{k=1}^{\infty}\bigl(\log\varphi_k(t\beta k^p) - \mathrm{i}t\beta k^p\mu_k(\beta)\bigr), \tag{15}$$

где

$$\varphi_k(y) = \mathbb{E}_\beta\bigl[\mathrm{e}^{\mathrm{i}yR_k}\bigr] = \frac{1}{1-\mu_k(\beta)(\mathrm{e}^{\mathrm{i}y}-1)} \tag{16}$$

– это характеристическая функция геометрической случайной величины R_k со средним $\mu_k(\beta)$. Найденные в лемме 1 неравенства позволяют оценить по отдельности каждое слагаемое в (15):

$$0 \leqslant -\operatorname{Re}\bigl(\log\varphi_k(t\beta k^p) - \mathrm{i}t\beta k^p\mu_k(\beta)\bigr) \leqslant \frac{t^2\beta^2k^{2p}\mathrm{e}^{-\beta k}}{(1-\mathrm{e}^{-\beta k})^2}, \tag{17}$$

$$\begin{aligned}\bigl|\operatorname{Im}\bigl(\log\varphi_k(t\beta k^p) - \mathrm{i}t\beta k^p\mu_k(\beta)\bigr)\bigr|&\\ \leqslant |t|^3\beta^3k^{3p}\,&\frac{2\mu_k(\beta)^3+3\mu_k(\beta)^2+\mu_k(\beta)}{6}\\ &= \frac{|t|^3\beta^3k^{3p}(\mathrm{e}^{-\beta k}+\mathrm{e}^{-2\beta k})}{(1-\mathrm{e}^{-\beta k})^3}\,.\end{aligned} \tag{18}$$

Применяя к правым частям оценок (17) и (18) лемму 2, видим, что как вещественная, так и мнимая части (15) сходятся при всех $\beta > 0$, если $p < 1/2$. Поскольку при $\beta \downarrow 0$ и фиксированном k выполняется

$$\begin{aligned}\log\Bigl(1-\mu_k(\beta)\bigl(\mathrm{e}^{\mathrm{i}t\beta k^p}-1\bigr)\Bigr) + \mathrm{i}t\beta k^p\mu_k(\beta) &\to \log(1-\mathrm{i}tk^{p-1}) + \mathrm{i}tk^{p-1}\\ &= -\log\mathbb{E}\bigl[\mathrm{e}^{\mathrm{i}tk^{1-p}(E_k-1)}\bigr],\end{aligned}$$

утверждение теоремы следует из теоремы Лебега о мажорируемой сходимости и предложения 1, в котором найдена достаточно точная асимптотика для $\beta\,\mathbb{E}_\beta N_p$ при $\beta \downarrow 0$. □

§3. Доказательство теоремы 1

3.1. Вспомогательные результаты. Начнём со следующего общего результата.

Лемма 3. *Пусть (X, Y) – случайный вектор со значениями в $\mathbb{R}\times\mathbb{Z}$ и характеристической функцией $\psi(s,t) = \mathbb{E}[\mathrm{e}^{\mathrm{i}(sX+tY)}]$. Тогда при всех $n \in \mathbb{Z}$, таких что $\mathbb{P}[Y = n] > 0$, характеристическую функцию X*

относительно условного распределения компоненты X при условии $Y = n$ можно найти по формуле

$$\mathbb{E}\big[\mathrm{e}^{\mathrm{i}sX}\big|Y = n\big] = \frac{\int_{-\pi}^{\pi} \psi(s,t)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}nt}\mathrm{d}t}{\int_{-\pi}^{\pi} \psi(0,t)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}nt}\mathrm{d}t}\,.$$

Доказательство несложно; его можно найти, например, в [8, теорема 1]. □

Введём обозначения для двух характеристических функций. Будем писать

$$\psi^n(s) = \mathbb{E}^n\mathrm{e}^{\mathrm{i}sN_p}, \quad \psi_\beta(s,t) = \mathbb{E}_\beta\mathrm{e}^{\mathrm{i}(sN_p+tN_1)},$$

где $\mathbb{E}^n$ обозначает математическое ожидание относительно меры P^n. Для краткости будем писать

$$\mu_k = \mu_k(\beta), \quad \sigma_k^2 = \sigma_k^2(\beta), \quad \xi(p) = \Gamma(p+1)\zeta(p), \quad b_p = \beta^{-p-1/2}, \tag{19}$$

где $\mu_k(\beta)$ и $\sigma_k^2(\beta)$ определены равенствами (10) и (11).

Из определения (1) и P_β-независимости счётчиков R_k следует, что

$$\psi_\beta(s,t) = \prod_{k=1}^{\infty} \varphi_k(k^p s + kt), \tag{20}$$

где характеристическая функция φ_k определена равенством (16). Лемма 3 и связь между мерами P^n и P_β, описанная в разд. 2, дают явное выражение для характеристической функции $\psi^n(s)$ при любом $n \in \mathbb{N}_0$:

$$\psi^n(s) = \frac{\int_{-\pi}^{\pi} \psi_\beta(s,t)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}nt}\mathrm{d}t}{\int_{-\pi}^{\pi} \psi_\beta(0,t)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}nt}\mathrm{d}t}\,, \tag{21}$$

где правая часть оказывается не зависящей от $\beta > 0$. Чтобы упростить оценку интегралов в (21), можно подобрать значение β для заданного n, чтобы максимизировать знаменатель, который равен вероятности $P_\beta[N_1 = n]$. Подходящий выбор β, который асимптотически (при $n \to \infty$) максимизирует знаменатель, известен начиная с работы [6], а именно

$$\beta = \beta(n) = \sqrt{\zeta(2)/n} = \frac{\pi}{\sqrt{6n}}\,. \tag{22}$$

При таком выборе получаем также $\mathbb{E}_{\beta(n)}[N_1] \sim n$ при $n \to \infty$, как следует из (7), и, более того, из предложения 1 находим $\mathbb{E}_{\beta(n)}[N_1] - n = o\big(\sqrt{\mathbb{D}_{\beta(n)} N_1}\big)$. Последняя оценка была также найдена в [6].

3.2. Случай $p > 1/2$. Наше доказательство опирается на следующий технический результат.

Лемма 4. *Если $\beta = \beta(n)$ задано формулой* (22)*, то при всех $p > 1/2$ и при любом фиксированном $s \in \mathbb{R}$*

$$\mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{i}s\mathbb{E}_\beta[N_p]}{b_p}} \int\limits_{-\pi}^{\pi} \psi_\beta\big(\tfrac{s}{b_p}, t\big)\, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}nt} \mathrm{d}t = \frac{1 + O\big(n^{-\rho}\big)}{b_1} \sqrt{\frac{2\pi}{\xi(2)}} \exp\left(-\left(\xi(2p) - \frac{\xi(p+1)^2}{\xi(2)}\right)\frac{s^2}{2}\right) \tag{23}$$

при $n \to \infty$, где $\rho = \min\{p - \frac{1}{2}, \frac{1}{8}\}$, а b_p и ξ определены равенством (19).

Доказательство. Прежде всего заметим, что можно записать

$$\sqrt{\frac{2\pi}{\xi(2)}} \exp\left(-\left(\xi(2p) - \frac{\xi(p+1)^2}{\xi(2)}\right)\frac{s^2}{2}\right) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \exp\big(-\tfrac{1}{2} T_p(s,t)\big)\, \mathrm{d}t,$$

где

$$T_p(s,t) = \xi(2p)s^2 + 2\xi(p+1)st + \xi(2)t^2. \tag{24}$$

С другой стороны, вводя в интеграле в левой части (23) новую переменную tb_1, которую мы снова обозначим t, получим

$$\mathrm{e}^{-\mathrm{i}s\mathbb{E}_\beta[N_p]/b_p} \int\limits_{-\pi}^{\pi} \psi_\beta(s/b_p, t) \mathrm{e}^{-\mathrm{i}nt} \mathrm{d}t = \frac{1}{b_1} \int\limits_{-\pi b_1}^{\pi b_1} \psi_\beta(s/b_p, t/b_1) \mathrm{e}^{-\mathrm{i}(s\mathbb{E}[N_p]/b_p + nt/b_1)} \mathrm{d}t\,.$$

Поэтому при $\beta = \beta(n)$, определённом равенством (22), можно записать оценку

$$\begin{aligned}
&\left| b_1 \mathrm{e}^{-\mathrm{i}s\mathbb{E}_\beta[N_p]/b_p} \int_{-\pi}^{\pi} \psi_\beta(s/b_p, t) \mathrm{e}^{-\mathrm{i}nt} \mathrm{d}t - \sqrt{\tfrac{2\pi}{\xi(2)}} \exp\bigl(-\bigl(\xi(2p) - \tfrac{\xi(p+1)^2}{\xi(2)}\bigr) \tfrac{s^2}{2}\bigr) \right| \\
&\quad \leqslant \int_{-h(n)}^{h(n)} \exp\bigl(-\tfrac{1}{2} T_p(s,t)\bigr) \times \\
&\qquad \times \left| \exp\Bigl(\log \psi_\beta\bigl(\tfrac{s}{b_p}, \tfrac{t}{b_1}\bigr) - \mathrm{i}\bigl(\tfrac{s\mathbb{E}_\beta[N_p]}{b_p} + \tfrac{nt}{b_1}\bigr) + \tfrac{1}{2} T_p(s,t)\Bigr) - 1 \right| \mathrm{d}t \\
&\qquad + 2 \int_{h(n)}^{\pi b_1} |\psi_\beta(s/b_p, t/b_1)| \, \mathrm{d}t + \int_{|t| \geqslant h(n)} \exp\bigl(-\tfrac{1}{2} T_p(s,t)\bigr) \, \mathrm{d}t \\
&\quad =: I_1 + 2I_2 + I_3,
\end{aligned}$$

где мы выберем

$$h(n) = n^{1/24}.$$

Оценим сперва интеграл I_1. Используя предложение 1 и независимость R_k относительно мер P_β, можно выразить квадратичную форму T_p через дисперсии σ_k случайных величин R_k с явно отслеживаемой ошибкой:

$$\begin{aligned}
T_p(s,t) &= \bigl(\mathbb{D}_\beta\bigl[\tfrac{N_p}{b_p}\bigr] + O\bigl(\tfrac{1}{b_p^2 \beta^2}\bigr)\bigr) s^2 \\
&\quad + 2\bigl(\mathrm{Cov}_\beta\bigl(\tfrac{N_p}{b_p}, \tfrac{N_1}{b_1}\bigr) + O\bigl(\tfrac{1}{b_p b_1 \beta^2}\bigr)\bigr) st + \bigl(\mathbb{D}_\beta\bigl[\tfrac{N_1}{b_1}\bigr] + O\bigl(\tfrac{1}{b_1^2 \beta^2}\bigr)\bigr) t^2 \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} \left(k^{2p} \sigma_k^2 \frac{s^2}{b_p^2} + 2k^{p+1} \sigma_k^2 \frac{st}{b_p b_1} + k^2 \sigma_k^2 \frac{t^2}{b_1^2} \right) \\
&\qquad + O\bigl(\beta^{2p-1} s^2 + \beta^p st + \beta t^2\bigr) \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} \sigma_k^2 y_k^2 + O\bigl(\beta^{2p-1} s^2 + \beta^p st + \beta t^2\bigr), \quad \beta \downarrow 0,
\end{aligned}$$

где

$$y_k = \frac{k^p s}{b_p} + \frac{kt}{b_1} = k^p \beta^{p+1/2} s + k \beta^{3/2} t \,. \tag{25}$$

Поэтому при $\beta = \beta(n)$, как в (22), при фиксированном s и $|t| \leqslant h(n)$ получаем, что при $n \to \infty$

$$\begin{aligned} T_p(s,t) &= \sum_{k=1}^{\infty} \sigma_k^2 y_k^2 + O\bigl(n^{1/2-p} + n^{-p/2}h(n) + n^{-1/2}h(n)^2\bigr) \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \sigma_k^2 y_k^2 + O\bigl(n^{-\min\{p-1/2,5/12\}}\bigr). \end{aligned}$$

Аналогично, согласно предложению 1, можно записать

$$\mathbb{E}_{\beta(n)}[N_1] = \sum_{k=1}^{\infty} k\mu_k = n + O(\sqrt{n}), \quad n \to \infty.$$

Используя эти представления и принимая во внимание (20), видим, что при фиксированном s и $|t| \leqslant h(n) = n^{1/24}$

$$\begin{aligned} &\log\psi_\beta\left(\frac{s}{b_p}, \frac{t}{b_1}\right) - \mathrm{i}(s\mathbb{E}_\beta[N_p]/b_p + nt/b_1) + \frac{1}{2}T_p(s,t) \\ &\quad = O(n^{-\min\{p-1/2,5/24\}}) + \sum_{k=1}^{\infty}\Bigl(\log\varphi_k(y_k) - \mathrm{i}y_k\mu_k + \frac{\sigma_k^2}{2}y_k^2\Bigr). \end{aligned} \tag{26}$$

Используя лемму 1, можно оценить отдельно вещественную и мнимую части суммы (26). При $|t| \leqslant h(n)$, фиксированном s, $\beta = \beta(n)$ и $n \to \infty$ получаем

$$\begin{aligned} 0 \leqslant \operatorname{Re}\sum_{k=1}^{\infty} \log\varphi_k\,(y_k) + \frac{\sigma_k^2}{2}y_k^2 &\leqslant \sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{\sigma_k^2}{4!} + \frac{\sigma_k^4}{4}\right)y_k^4 \\ &\leqslant \frac{1}{4}\sum_{j=0}^{4}\binom{4}{j}|s|^j h(n)^{4-j}\beta^{2+j(p-1)}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\beta^4 k^{4+j(p-1)}\mathrm{e}^{-\beta k}}{(1-\mathrm{e}^{-\beta k})^4} \\ &= O\bigl(n^{\max\{1-2p,-1/3\}}\bigr), \end{aligned} \tag{27}$$

где мы оценили $\sigma_k^2/4! + \sigma_k^4/4 = (\mathrm{e}^{-\beta k} + 4\mathrm{e}^{-2\beta k} + \mathrm{e}^{-3\beta k})(1-\mathrm{e}^{-\beta k})^{-4}/4! \leqslant \mathrm{e}^{-\beta k}(1-\mathrm{e}^{-\beta k})^{-4}/4$, разложили четвёртую степень y_k (заданного формулой (25)) и применили лемму 2, чтобы ограничить последнюю сумму по k выражением $O(\beta^{\min\{-1-j(p-1),0\}}|\log\beta|)$. Множитель $|\log\beta|$ добавлен, чтобы учесть исключительные случаи $j = 3$, $p = 2/3$ и $j = 4$, $p = 3/4$. Подставляя $h(n) = n^{-1/24}$ и $\beta = \beta(n) = \pi/\sqrt{6n}$ в сумму по j в (27), видим, что при $1/2 < p < 2/3$ медленнее всего, как $O(n^{1-2p})$, убывает слагаемое при $j = 4$, а при $p \geqslant 2/3$ – слагаемое при $j = 0$, как $O(n^{-1/3})$, что и отражено в правой части (27).

Аналогично, поскольку $2\mu_k^3+3\mu_k^2+\mu_k = (\mathrm{e}^{-\beta k}+\mathrm{e}^{-2\beta k})(1-\mathrm{e}^{-\beta k})^{-3} \leqslant 2\mathrm{e}^{-\beta k}(1-\mathrm{e}^{-\beta k})^{-3}$, получаем

$$\left|\sum_{k=1}^{\infty} \operatorname{Im}\log\varphi_k(y_k) - y_k\mu_k\right| \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2\mu_k^3+3\mu_k^2+\mu_k}{6}|y_k|^3$$
$$\leqslant \frac{1}{3}\sum_{j=0}^{3}\binom{3}{j}|s|^j h(n)^{3-j}\beta^{3/2+j(p-1)}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\beta^3 k^{3+j(p-1)}\mathrm{e}^{-\beta k}}{(1-\mathrm{e}^{-\beta k})^3}$$
$$= O(n^{\max\{3/4-3p/2,-1/8\}})$$

при $n \to \infty$ с фиксированным s и $|t| \leqslant h(n)$. Здесь, согласно лемме 2, последняя сумма по k оценивается как $O(\beta^{\min\{-1-j(p-1),0\}})$, если $j(1-p) \neq 1$, или как $O(|\log\beta|)$ в специальном случае $j = 3$, $p = 2/3$. Минимальная скорость убывания будет $O(n^{3/4-3p/2})$ при $j = 3$, если $1/2 < p < 7/12$, и $O(n^{-1/8})$ при $j = 0$, если $p \geqslant 7/12$.

Подставляя эти оценки в легко проверяемое неравенство $|\mathrm{e}^{\varepsilon+\mathrm{i}\delta}-1| \leqslant |\delta| + (\mathrm{e}-1)|\varepsilon|$ (при $|\varepsilon| \leqslant 1$, $|\delta| \leqslant 1$), получаем

$$\bigl|\exp\bigl(\log\psi_\beta(s/b_p,t/b_1) - \mathrm{i}(s\mathbb{E}[N_p]/b_p + nt/b_1) + \tfrac{1}{2}T_p(s,t)\bigr) - 1\bigr|$$
$$= O\bigl(n^{\max\{1/2-p,-1/8\}}\bigr), \quad n \to \infty,$$

и поэтому

$$|I_1| = O\bigl(n^{\max\{1/2-p,-1/8\}}\bigr)\int_{-h(n)}^{h(n)} \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}T_p(s,t)}\mathrm{d}t = O\bigl(n^{\max\{1/2-p,-1/8\}}\bigr).$$

Перейдём к оценке интеграла I_2. Из равенств (20) и (14) получаем, что

$$\log|\psi_\beta(s/b_p,t/b_1)| = \sum_{k=1}^{\infty}\operatorname{Re}\log\varphi_k(y_k)$$
$$\leqslant \sum_{k=m}^{2m}\operatorname{Re}\log\varphi_k(y_k) = -\frac{1}{2}\sum_{k=m}^{2m}\log(1+2\sigma_k^2(1-\cos(y_k))) \quad (28)$$

где $m = [\beta^{-1}] + 1$ и $[\cdot]$ означает целую часть. Поскольку σ_k^2 убывает как функция от k, при $k \geqslant m$ можно оценить $\sigma_k^2 \leqslant \mathrm{e}(\mathrm{e}-1)^{-2}$ и, значит,

$2\sigma_k^2(1-\cos y) \in [0, 4\mathrm{e}(\mathrm{e}-1)^{-2}]$ при любом y. Поэтому

$$-\log(1+2\sigma_k^2(1-\cos y)) \leqslant -\frac{\sigma_k^2(1-\cos y)(\mathrm{e}-1)^2}{\mathrm{e}} \log\frac{\mathrm{e}+1}{\mathrm{e}-1} \tag{29}$$

так как $-\log(1+x) \leqslant -xa^{-1}\log(1+a)$ при $0 \leqslant x \leqslant a$ в силу выпуклости $-\log(1+x)$.

Предположим сперва, что $h(n) \leqslant t \leqslant 3\pi\beta^{-1/2}/4$. Тогда при $m \leqslant k \leqslant 2m$ и фиксированном s

$$mt\beta^{3/2}+O(m^p\beta^{p+1/2}) \leqslant y_k \leqslant 2mt\beta^{3/2}+O(m^p\beta^{p+1/2}) \leqslant 3\pi/2, \quad n\to\infty,$$

и, значит, $y_k \in [h(n)\beta^{1/2}/2, 5\pi/3]$ при рассматриваемых k, когда t и n достаточно велики. Но $1-\cos y \geqslant \frac{1}{2}\left(\frac{3}{5\pi}\right)^2 y^2$ при $y \in [0, 5\pi/3]$, а $\sigma_k^2 \geqslant \mathrm{e}^3(\mathrm{e}^3-1)^{-2}$ при $k \leqslant 2m < 3\beta^{-1}$, поэтому

$$\sum_{k=m}^{2m}\sigma_k^2(1-\cos y_k) \geqslant m\frac{\mathrm{e}^3}{(\mathrm{e}^3-1)^2}\,\frac{9}{50\pi^2}\,\frac{h(n)^2\beta}{4} \geqslant \frac{\mathrm{e}^3}{(\mathrm{e}^3-1)^2}\,\frac{9}{200\pi^2}n^{1/12}. \tag{30}$$

Теперь предположим, что $3\pi\beta^{-1/2}/4 \leqslant t \leqslant \pi b_1$. Заметим, что при фиксированном s и $m \leqslant k \leqslant 2m$ имеет место оценка

$$y_k - tk/b_1 = k^p s/b_p = O(\beta^{1/2}), \quad n\to\infty.$$

Поэтому по теореме Лагранжа о среднем значении и в силу неравенства $|\sin y| \leqslant 1$ получаем

$$\cos y_k - \cos(tk/b_1) = O(\beta^{1/2}), \quad n\to\infty,$$

равномерно по таким значениям k и t. Отсюда получаем, что при $n\to\infty$

$$\begin{aligned}\sum_{k=m}^{2m}(1-\cos y_k) &= m+1+\sum_{k=m}^{2m}\cos(tk/b_1)+mO(\beta^{1/2})\\ &= m+\frac{\sin\frac{(m+1)t}{2b_1}\cos\frac{3mt}{2b_1}}{\sin\frac{t}{2b_1}}+O(\beta^{-1/2})\\ &\geqslant m-2\beta^{-1}/3+O(\beta^{-1/2}) \geqslant \beta^{-1}/6 = \frac{\sqrt{n}}{\pi\sqrt{6}},\end{aligned} \tag{31}$$

поскольку $3\pi\beta/4 \leqslant t/(2b_1) \leqslant \pi/2$ и $\sin x \geqslant 2x/\pi$ при $x \in [0,\pi/2]$. Комбинируя оценки (28–31), видим, что

$$|I_2| \leqslant \pi b_1 \mathrm{e}^{-cn^{1/12}} = o(n^{-1/8})\,.$$

Наконец, поскольку $\pm\xi(p+1)s+\xi(2)h(n)\geqslant 1$ при достаточно больших n, можно оценить

$$\begin{aligned}0\leqslant I_3\leqslant \int\limits_{h(n)}^{\infty}(\xi(p+1)s+\xi(2)t)\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}T(s,t)}\mathrm{d}t\\ -\int\limits_{-\infty}^{-h(n)}(\xi(p+1)s+\xi(2)t)\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}T(s,t)}\mathrm{d}t\\ =\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}T_p(s,h(n))}+\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}T_p(s,-h(n))}=o(n^{-1/8}),\quad n\to\infty.\end{aligned}$$

Собирая вместе найденные оценки для I_j, $j=1,2,3$, получаем утверждение леммы. □

Доказательство теоремы 1 при $p>1/2$**.** Подставляя найденное в лемме 4 асимптотическое выражение в (21), получаем, что при $n\to\infty$

$$\psi^n(s/b_p)=\mathrm{e}^{\mathrm{i}s\mathbb{E}_{\beta(n)}[N_p]/b_p}(1+O(n^{-\rho}))\exp\left(-\left(\xi(2p)-\tfrac{\xi(p+1)^2}{\xi(2)}\right)\tfrac{s^2}{2}\right),$$

где $\rho=\min\{p-1/2,1/8\}>0$. Поэтому если выбирать λ с распределением P^n, то $\beta(n)^{p+1/2}(N_p-\mathbb{E}_{\beta(n)}[N_p])$ сходится по распределению к нормальной случайной величине с нулевым средним и дисперсией $\left[\xi(2p)-\xi(p+1)^2\xi(2)^{-1}\right]^{-1}$ при $n\to\infty$, где $\beta(n)$ определено равенством (22). Подставляя асимптотику $\mathbb{E}_{\beta(n)}[N_p]$, найденную в предложении 1, и производя линейное масштабирование, получаем утверждение теоремы. □

3.3. Случай $p\leqslant 1/2$**.** Когда $p\leqslant 1/2$, можно использовать результат из работы [15], формулировку которого мы приведём здесь. Рассмотрим функционал $X:\mathcal{P}\to\mathbb{R}$ от разбиений, монотонный в следующем смысле: для двух разбиений $\nu,\lambda\in\mathcal{P}$

$$R_k(\nu)\geqslant R_k(\lambda)\ \text{при всех}\ k\in\mathbb{N}\quad\text{влечёт}\quad X(\nu)\geqslant X(\lambda).\tag{32}$$

Из второй формулы в определении (1) очевидно, что функционал N_p монотонен в таком смысле при любом $p\in\mathbb{R}$.

Лемма 5 ([15], теорема 2)**.** *Пусть функционал* $X:\mathcal{P}\to\mathbb{R}$ *удовлетворяет условию монотонности* (32)*. Предположим, что для некоторых регулярно меняющихся в нуле функций* $m(\beta)$, $b(\beta)$, *таких что найдётся функция* $u(\beta)\to\infty$, $u(\beta)=o(\beta^{-1/4})$ *при* $\beta\downarrow 0$, *для которой*

$$m(\beta)-m\big(\beta\big(1+u(\beta)\sqrt{\beta}\big)\big)=o\big(b(\beta)\big),\quad \beta\downarrow 0,\tag{33}$$

имеет место сходимость по распределению

$$\frac{X(\lambda)-m(\beta)}{b(\beta)} \xrightarrow{d} Y, \quad \lambda \text{ распределено по мере } P_\beta, \qquad \beta \downarrow 0, \tag{34}$$

для некоторой случайной величины Y*. Тогда, при* $\beta(n)$ *определённой равенством* (22)*,*

$$\frac{X(\lambda)-m(\beta(n))}{b(\beta(n))} \xrightarrow{d} Y, \quad \lambda \text{ распределено по мере } P^n, \quad n \to \infty. \tag{35}$$

Остаётся проверить, что условие (33) выполняется для функций $m(\beta)$ и $b(\beta)$, для которых предел (34) найдётся согласно теореме 2. При $p = 1/2$ из части (i) теоремы видим, что нужно взять $m(\beta) = \Gamma(3/2)\zeta(3/2)\beta^{-3/2}$ и $b(\beta)=\frac{1}{\beta}\sqrt{\log\frac{1}{\beta}}$, так что (33) выполнено при $u(\beta)=\bigl(\log\frac{1}{\beta}\bigr)^{1/4}$. При $p < 1/2$ из части (ii) теоремы 2 видим, что следует взять $b(\beta)=\frac{1}{\beta}$, $m(\beta) = a(\beta)/\beta$, так что (33) выполняется, скажем, при $u(\beta) = \log\frac{1}{\beta}$.

§4. Случайная величина $\mathcal{M}_p$

Следующее утверждение описывает распределение случайной величины $\mathcal{M}_p$.

Теорема 3. *При любом* $p \in (-\infty, 1/2)$*, ряд* (3) *сходится п.н. и определяет случайную величину* $\mathcal{M}_p$ *со следующими свойствами.*

1) *Носитель распределения* $\mathcal{M}_p$ *– это* $(-\infty,\infty)$ *при* $p \in [0, 1/2)$ *и* $[-\zeta(1-p), \infty)$ *при* $p < 0$*.*
2) *Распределение случайной величины* $\mathcal{M}_p$ *безгранично делимо и допускает представление типа Леви–Хинчина*

$$\log \mathbb{E}\bigl[\mathrm{e}^{-u\mathcal{M}_p}\bigr] = \int_0^\infty (\mathrm{e}^{-ux} - 1 + ux) f_p(x)\,\mathrm{d}x \quad (u > -1), \tag{36}$$

то есть его мера Леви абсолютно непрерывна и имеет плотность

$$f_p(x) = \frac{1}{x}\sum_{k=1}^{\infty} \mathrm{e}^{-xk^{1-p}}, \quad x > 0. \tag{37}$$

3) *Другим способом распределение* $\mathcal{M}_p$ *можно описать, указав его кумулянты*

$$\kappa_1 = 0, \qquad \kappa_j = (j-1)!\,\zeta\bigl((1-p)j\bigr) \quad (j \geqslant 2). \tag{38}$$

Доказательство. Вспомним, что $E_1, E_2, \ldots$ в (3) суть независимые случайные величины со стандартным экспоненциальным распределением. Отсюда немедленно следует утверждение про носитель, нижняя грань для которого получается, если взять все $E_j \equiv 0$. Поскольку экспоненциальное распределение безгранично делимо, такой же будет и сумма (3) независимых случайных величин с такими распределениями. Хотя носитель $E_1 - 1$ включает интервал $[-1, 0]$, всё же представляется удобным использовать для его описания преобразования Лапласа, а не характеристические функции. Мы будем использовать следующее представление типа Леви–Хинчина:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\big[\mathrm{e}^{-u(E_1-1)}\big] &= \frac{\mathrm{e}^u}{1+u} = \exp\big(u - \log(1+u)\big)\\ &= \exp\Big(u + \int_0^\infty (\mathrm{e}^{-ux} - 1)\frac{\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x}{x}\Big)\\ &= \exp\Big(\int_0^\infty (\mathrm{e}^{-ux} - 1 + ux)\frac{\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x}{x}\Big), \quad \operatorname{Re} u > -1. \qquad (39)\end{aligned}$$

Мера Леви гамма-субординатора с плотностью e^{-x}/x, $x > 0$, хорошо известна. Используя нестандартный множитель $1 - \mathrm{e}^{-ux} - ux$ в правой части (39), мы избавляемся от сноса, что позволяет упростить некоторые вычисления. См. замечание 8.4 в книге Сато [12].

Мы можем переписать (39) в виде

$$\begin{aligned}\log \mathbb{E}\big[\mathrm{e}^{-uk^{p-1}(E_k-1)}\big] &= \int_0^\infty (\mathrm{e}^{-uk^{p-1}x} - 1 + uk^{p-1}x)\frac{\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x}{x}\\ &= \int_0^\infty (\mathrm{e}^{-ux} - 1 + ux)\frac{\mathrm{e}^{-xk^{1-p}}\mathrm{d}x}{x}\,,\end{aligned}$$

где новая переменная xk^{p-1} снова обозначена x. Отсюда и из п.н. сходимости ряда (3) немедленно следует, что мера Леви случайной величины $\mathcal{M}_p$ имеет плотность (37). Сумму (37) можно исследовать как гармоническую сумму, используя теорему 5 [7]. Базовая функция здесь $g(x) = \mathrm{e}^{-x}$ с преобразованием Меллина $g^*(s) = \Gamma(s)$, $\operatorname{Re} s > 0$; ряд Дирихле амплитудно частотных пар – это $\zeta((1-p)s)$, $s > 1/(1-p)$ (здесь мы предполагаем, что $p < 1$). Поэтому $f_p(x) = \Gamma\big(\frac{2-p}{1-p}\big)x^{-\frac{2-p}{1-p}} + O(1)$ при

$x \downarrow 0$. Поэтому интеграл в представлении (36) сходится в нуле, если $2 - \frac{2-p}{1-p} > -1$, что эквивалентно $p < 1/2$, как и следует ожидать. На бесконечности $f_p(x)$ убывает быстрее любой степени x. Следовательно, $\mathcal{M}_p$ имеет все степенные моменты ([12, следствие 25.8]).

Кумулянты случайной величины $\mathcal{M}_p$ можно найти, используя разложение в ряд и почленное интегрирование в (36). Таким образом мы получаем

$$\begin{aligned}\log \mathbb{E}\big[\mathrm{e}^{-u\mathcal{M}_p}\big] &= \int_0^\infty \sum_{j=2}^\infty \frac{(-ux)^j}{j!}\,\frac{1}{x}\sum_{k=1}^\infty \mathrm{e}^{-xk^{1-p}}\,\mathrm{d}x \\ &= \sum_{j=2}^\infty \frac{(-u)^j}{j!}\sum_{k=1}^\infty \int_0^\infty x^{j-1}\mathrm{e}^{-xk^{1-p}}\,\mathrm{d}x \\ &= \sum_{j=2}^\infty \frac{(-u)^j}{j}\zeta((1-p)j). \qquad (40)\end{aligned}$$

Эти действия оправданы в силу абсолютной сходимости рассматриваемых рядов при $|u| < 1$. Отсюда следует (38), а также то, что это распределение определяется моментами, а, значит, и кумулянтами. □

В частном случае, когда p является неположительным целым, возможны ещё некоторые явные вычисления. Распределение $\mathcal{M}_0$ известно, как распределение Гумбеля с параметром положения $-\gamma$ и параметром масштаба 1. Его плотность равна $p_0(x) = \mathrm{e}^{-x-\gamma-\mathrm{e}^{-x-\gamma}}$, $x \in \mathbb{R}$. Также хорошо известно и легко находится его преобразование Лапласа:

$$\mathbb{E}\big[\mathrm{e}^{-u\mathcal{M}_0}\big] = \int_{-\infty}^\infty \exp(-ux - x - \gamma - \mathrm{e}^{-x-\gamma})dx = \mathrm{e}^{\gamma u}\Gamma(1+u), \quad \operatorname{Re} u > -1. \qquad (41)$$

Сопоставляя это выражение с представлением (40) при $p = 0$, получаем, что, как минимум при $|u| < 1$,

$$-\gamma u + \log\Gamma(1-u) = \sum_{j=2}^\infty \frac{u^j}{j}\zeta(j)\,. \qquad (42)$$

Подставляя $u = v^{1/\ell}\mathrm{e}^{(2k+1)\pi\mathrm{i}/\ell}$ при некотором $v \in [0,1)$ и целом $\ell \geqslant 2$ в (42), а затем суммируя по $k = 1, \dots, \ell$, видим, что коэффициенты при u^j (или при $v^{j/\ell}$) сокращаются, если только j не является целым кратным ℓ; если же $j = r\ell$ при некотором положительном целом r, то коэффициент при v^r окажется равным $\sum_{k=1}^{\ell} v^r \mathrm{e}^{(2k+1)r\pi\mathrm{i}} = \ell(-v)^r$. Поэтому при $\ell \geqslant 2$ и $v \in [0,1)$ имеет место равенство

$$\sum_{k=1}^{\ell} \log\Gamma\bigl(1 - v^{1/\ell}\mathrm{e}^{(2k+1)\pi\mathrm{i}/\ell}\bigr) = \sum_{r=1}^{\infty} \frac{(-v)^r}{r}\zeta(\ell r)\,.$$

Сравнивая это равенство с (40), получаем альтернативное выражение для производящей функции кумулянтов $\mathcal{M}_p$ при отрицательных целых p: при $p = -1, -2, \ldots$

$$\log\mathbb{E}\bigl[\mathrm{e}^{-u\mathcal{M}_p}\bigr] = u\zeta(1-p) + \sum_{k=1}^{1-p} \log\Gamma\bigl(1 - u^{1/(1-p)}\mathrm{e}^{(2k+1)\pi\mathrm{i}/(1-p)}\bigr).$$

Поскольку $-\zeta(1-p)$ – это нижняя грань носителя распределения случайной величины $\mathcal{M}_p$, можно переписать это выражение в виде альтернативной формулы для преобразования Лапласа п.н. положительной случайной величины $\mathcal{M}_p + \zeta(1-p)$: при $p = -1, -2, \ldots$

$$\mathbb{E}\bigl[\mathrm{e}^{-u(\mathcal{M}_p+\zeta(1-p))}\bigr] = \prod_{k=1}^{1-p} \Gamma\bigl(1 - u^{1/(1-p)}\mathrm{e}^{(2k+1)\pi\mathrm{i}/(1-p)}\bigr). \tag{43}$$

Кажется соблазнительным проинтерпретировать это произведение как представление $\mathcal{M}_p$ в виде суммы $1-p$ независимых случайных величин, но отдельные гамма-функции в (43) не являются преобразованиями Лапласа вероятностного распределения.

В случае $p = -1$ классическая формула $\Gamma(1-z)\Gamma(1+z) = \frac{\pi z}{\sin\pi z}$ позволяет переписать преобразование Лапласа в терминах более простых функций:

$$\mathbb{E}\bigl[\mathrm{e}^{-u(\mathcal{M}_{-1}+\zeta(2))}\bigr] = \Gamma(1-\mathrm{i}\sqrt{u})\Gamma(1+\mathrm{i}\sqrt{u}) = \frac{\pi\sqrt{u}}{\sinh\pi\sqrt{u}}\,.$$

Это выражение является преобразованием Лапласа–Стилтьеса тета-функции Якоби $\vartheta_4(0;\mathrm{e}^{-x}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty}(-1)^n\mathrm{e}^{-n^2x}$, $x > 0$, которая, таким образом, оказывается кумулятивной функцией распределения для $\mathcal{M}_{-1} + \zeta(2)$. Это распределение и несколько родственных ему распределений изучались в работе [4], где собраны результаты о его связи с некоторыми функционалами от классических случайных процессов. (Случайную величину S_1 из [4] в наших обозначениях можно записать как $S_1 = \frac{2}{\pi^2}(\mathcal{M}_{-1}+\zeta(2))$.) См. также [1], где это распределение изучалось в отрыве от предыдущих исследований и найдены некоторые его свойства.

Список литературы

1. C. D. Bastian, G. Rempala, H. Rabitz, *The Jacobi theta distribution*, arXiv e-prints `arXiv:2111.05336` (2021).
2. G. Ben Arous, L. V. Bogachev, S. A. Molchanov, *Limit theorems for sums of random exponentials.* — Probab. Theory Relat. Fields **132** (2005), 579–612.
3. L. Bogachev, *Limit laws for norms of IID samples with Weibull tails.* — J. Theor. Probab. **19** (2006), 849–873.
4. P. Biane, J. Pitman, M. Yor, *Probability laws related to the Jacobi theta and Riemann zeta functions, and Brownian excursions.* — Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.) **38**, No. 4 (2001), 435–465.
5. P. Erdős, J. Lehner, *The distribution of the number of summands in the partitions of a positive integer.* — Duke Math. J. **8** (1941), 335–345.
6. B. Fristedt, *The structure of random partitions of large integers.* — Trans. Amer. Math. Soc. **337**, No. 2 (1993), 703–735.
7. P. Flajolet, X. Gourdon, P. Dumas, *Mellin transforms and asymptotics: harmonic sums.* — Theoret. Comput. Sci. **144**, No. 1–2 (1995), 3–58.
8. L. Holst, *Two conditional limit theorems with applications.* — Ann. Statist. **7**, No. 3 (1979), 551–557.
9. A. Janßen, *Limit laws for power sums and norms of i.i.d. samples.* — Probab. Theory Relat. Fields **146** (2010), 515–533.
10. G. McKinley, M. Michelen, W. Perkins, *Maximum entropy and integer partitions.* — Comb. Theory **3**, No. 1 (2023), paper #7.
11. B. Pittel, *On a likely shape of the random Ferrers diagram.* — Adv. Appl. Math. **18**, No. 4 (1997), 432–488.
12. K.-I. Sato, *Lévy Processes and Infinitely Divisible Distributions.* Cambridge, Cambridge Univ. Press, 1999.
13. M. Schlather, *Limit distributions of norms of vectors of positive i.i.d. random variables.* — Ann. Probab. **29**, No. 2 (2001), 862–881.
14. A. M. Vershik, Y. V. Yakubovich, *The limit shape and fluctuations of random partitions of naturals with fixed number of summands.* — Mosc. Math. J. **1**, No. 3 (2001), 457–468.
15. Y. Yakubovich, *Growing integer partitions with uniform marginals and the equivalence of partition ensembles*, arXiv e-prints `arXiv:2303.14472` (2023).
16. Дж. Эндрюс, *Теория разбиений.* М., Наука, 1982.
17. А. М. Вершик, *Статистическая механика комбинаторных разбиений и их предельные конфигурации.* — Функц. анализ и его прил. **30**, вып. 2 (1996), 19–39.
18. А. М. Вершик, *Предельное распределение энергии квантового идеального газа с точки зрения теории разбиений натуральных чисел.* — Успехи матем. наук **52**, вып. 2(314) (1997), 139–146.

Yakubovich Yu. V. Moments of random integer partitions.

We study the limiting behaviour of the pth moment, that is the sum of pth powers of parts in a partition of a positive integer n which is taken uniformly among all partitions of n, as $n \to \infty$ and $p \in \mathbb{R}$ is fixed. We prove that after an appropriate centring and scaling, for $p \geqslant 1/2$ $(p \neq 1)$ the limit distribution is Gaussian, while for $p < 1/2$ the limit is some infinitely divisible distribution, depending on p, which we describe explicitly. In particular, for $p = 0$ this is the Gumbel distribution, which is well known, and for $p = -1$ the limiting distribution is connected to the Jacobi theta function.

Санкт-Петербургский
государственный университет,
Университетская наб., д. 7–9
199034 Санкт-Петербург, Россия
E-mail: y.yakubovich@spbu.ru

Поступило 25 сентября 2023 г.