Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 525, 2023 г.

Б. П. Харламов

НЕДОСТИЖИМОСТЬ БЕСКОНЕЧНО УДАЛЁННОЙ ГРАНИЦЫ ЗНАЧЕНИЙ ДИФФУЗИОННОГО ПОЛУМАРКОВСКОГО ПРОЦЕССА С ОСТАНОВКОЙ

§1. Непрерывные полумарковские процессы

Пусть $\mathcal{C}$ – стандартное метрическое пространство непрерывных функций ξ, определённых на интервале $[0,\infty) \equiv \mathbb{R}_+$ со значениями в $(-\infty,\infty) \equiv \mathbb{R}$ (выборочные траектории процесса); $\mathcal{F}$ – сигма-алгебра подмножеств множества $\mathcal{C}$ и P – вероятностная мера на $\mathcal{F}$.

Рассматривается процесс $\mathfrak{X}$, который полностью характеризуется тройкой $(\mathcal{C},\mathcal{F},P)$, где в некоторых случаях удобно рассматривать не одну вероятностную меру, а согласованный набор вероятностных мер.

Рассмотрим некоторые атрибуты измеримого пространства $(\mathcal{C},\mathcal{F})$.

Пусть $X_t\,(t \geqslant 0)$ – функция от $\xi \in \mathcal{C}$ (аргумента) с параметром t, определяемая равенством $X_t(\xi) = \xi(t)$.

θ_t – оператор сдвига на $\mathcal{C}$, где $\theta_t(\xi) \in \mathcal{C}$ и для любого $s \geqslant 0$ справедливо равенство $X_s(\theta_t\xi) = \xi(s+t)$.

Мы будем также рассматривать "случайные" моменты времени, допускающие бесконечные значения, – измеримые отображения $\tau\colon \mathcal{C} \mapsto [0,\infty]$. На множестве $\{0 \leqslant \tau(\xi) < \infty\}$ определим функционал X_τ и оператор θ_τ со случайным параметром, где

$$X_\tau(\xi) = X_{\tau(\xi)}(\xi), \qquad \theta_\tau(\xi) = \theta_{\tau(\xi)}(\xi).$$

Для "случайных" параметров τ_1, τ_2 мы будем использовать сложение со сдвигом :

$$\tau_1 \dot{+} \tau_2 = \tau_1 + \tau_2(\theta_{\tau_1})\,,$$

определённое и конечное на множестве $\{\tau_1 < \infty\} \cap \{\tau_2(\theta_{\tau_1}) < \infty\}$. Заметим, что операция $\dot{+}$ ассоциативна, но не коммутативна.

Пусть $\tau_3 = \tau_1 \dot{+} \tau_2$. Тогда справедливо

$$X_{\tau_3} = X_{\tau_2}(\theta_{\tau_1}), \qquad \theta_{\tau_3} = \theta_{\tau_2}(\theta_{\tau_1})\,.$$

Ключевые слова: непрерывные полумарковские процессы, переходные производящие функции, дифференциальные уравнения, остановка.

Действительно, для любой $\xi \in \mathcal{C}$

$$X_{\tau_3}(\xi) = X_{(\tau_1 \dot{+} \tau_2)(\xi)}(\xi) = X_{\tau_1(\xi)+\tau_2(\theta_{\tau_1}(\xi))}(\xi)$$
$$= X_{\tau_2(\theta_{\tau_1}(\xi))}(\theta_{\tau_1}(\xi))) = X_{\tau_2}(\theta_{\tau_1}(\xi)).$$

Вторая формула доказывается аналогично.

Рассмотрим случайный процесс $\mathfrak{X}$ со значениями на некотором интервале $\Delta_0 = (a_0, b_0)$, где $-\infty \leqslant a_0 < b_0 \leqslant \infty$.

Хорошо известно определение марковского процесса (см., например, Дынкин [1]). Оно опирается на понятие потока сигма-алгебр (фильтрации) $(\mathcal{F}_t)_0^\infty$, где $\mathcal{F}_t$ – сигма-алгебра подмножеств множества $\mathcal{C}$, порождённая всеми функциями X_s при $s \leqslant t$, а также на понятие марковского момента (времени).

Пусть $x = \xi(0) \in \Delta \subset \Delta_0$. Обозначим через σ_Δ оператор первого выхода траектории процесса из множества Δ, т.е. отображение $\sigma_\Delta : \mathcal{C} \mapsto [\mathbb{R}_+] \equiv [0, \infty]$, где

$$\sigma_\Delta(\xi) = \inf\{t \geqslant 0 : \xi(t) \notin \Delta\}$$

и, по определению, $\sigma_\Delta(\xi) = \infty$, если множество в фигурных скобках пусто. Мы определим также несобственный момент первого выхода из интервала Δ для траектории ξ, начальная точка которой не принадлежит этому интервалу, как $\sigma_\Delta\xi = 0$, а также $X(\sigma_\Delta)(\xi) = \xi(0)$.

Известно, что σ_Δ является марковским моментом относительно фильтрации (см. Гихман и Скороход [2, с. 194]).

Во всём дальнейшем изложении мы опираемся на следующую аксиому:

A1 (1)

Пусть $\Delta = (a, b)$, $\Delta_0 = (a_0, b_0)$, $-\infty < a_0 \leqslant a < x < b \leqslant b_0 < \infty$.

Тогда $P_x(\sigma_\Delta \leqslant \sigma_{\Delta_0}) = 1$, *а также*

$$P_x(\sigma_{\Delta_0} < \infty) = P_x(\sigma_{\Delta_0} < \infty, \sigma_{\Delta_0} = \sigma_\Delta \dot{+} \sigma_{\Delta_0},\ X(\sigma_{\Delta_0}) = X(\sigma_{\Delta_0})(\theta_{\sigma_\Delta})).$$

Достаточно выполнить два графических построения ξ при $X(\sigma_\Delta)\xi = a$ и $X(\sigma_\Delta)\xi = b$, чтобы проверить содержательность аксиомы **A1**.

1.1. Полумарковский процесс. Марковское свойство относительно марковского момента τ обычно определяется в терминах математических ожиданий относительно семейства вероятностных мер (P_x), где параметр x означает начальную точку траектории процесса. Момент

τ называется моментом **регенерации (марковской регенерации)**, если выполняется равенство

$$\mathbf{E}_x(f_1\,(f_2(\theta_\tau));\ \tau<\infty)=\mathbf{E}_x(f_1\,\mathbf{E}_{X(\tau)}(f_2);\ \tau<\infty),$$

где f_1 – $\mathcal{F}_\tau$-измеримая, а f_2 – произвольная $\mathcal{F}$-измеримая функция.

Семейство мер называется **согласованным**, если у него определен хоть один нетривиальный момент марковской регенерации.

Случайный процесс, заданный согласованным семейством вероятностных мер (P_x), называется **полумарковским (ПМ)**, если для любого открытого множества $\Delta\subset\Delta_0$ марковский момент σ_Δ является моментом марковской регенерации этого семейства.

Пример. Пусть $w(t)$ $(t\geqslant 0)$ – одномерный винеровский процесс. Для данного отрезка $[a,b]$ при $a<w(0)<b$ рассмотрим усечённый процесс

$$\overline{w}(t)=\begin{cases}b, & w(t)\geqslant b,\\ w(t), & a<w(t)<b,\\ a, & w(t)\leqslant a,\end{cases}\tag{2}$$

при всех $t\geqslant 0$. Ясно, что этот процесс уже не является марковским. Однако он сохраняет полумарковость: марковское свойство выполняется относительно момента первого выхода из любого открытого интервала внутри отрезка, а также из любых односторонних окрестностей граничных точек. Полумарковское семейство мер (P_x) $(x\in[a,b])$ усечённого процесса легко определяется по исходному марковскому семейству мер (P_x^o) винеровского процесса. Например, для полузамкнутого отрезка $[a,c)$ $(a<c\leqslant b)$ и любого $t>0$

$$P_a(\sigma_{[a,c)}<t,\,X(\sigma_{[a,c)})=c)=P_a^o(\sigma_{(-\infty,c)}<t,\,X(\sigma_{(-\infty,c)})=c).$$

Теперь рассмотрим в качестве исходного процесса диффузионный процесс, у которого скачком меняется коэффициент сноса при переходе через границы отрезка (a,b), например, слева от a – положительный снос, справа от b – отрицательный, на интервале (a,b) сохраняется нулевой снос. Применим к процессу процедуру усечения. Для нового усечённого процесса закон движения внутри интервала будет, как и у первого, но меняется поведение на границах: изменилась полумарковская переходная функция процесса.

Этот пример подсказывает следующую задачу: определить полумарковскую переходную функцию на границе так, чтобы процесс сохранял заданный диффузионный вид внутри интервала, т.е. до момента первого выхода на границу и в любое время схода с границы внутрь заданной области значений. Задачи такого рода важны для приложений, где принимается во внимание состояние взаимодействия диффундирующей частицы с границей, приводящее к некоторому динамическому равновесию системы.

Пусть $\Delta = (a, b)$, $x \in \Delta$ и $\lambda \geqslant 0$. При описании ПМ процесса особую роль играют следующие так называемые ПМ переходные производящие функции:

$$g_\Delta(\lambda, x) = \mathbf{E}_x(\exp(-\lambda, \sigma_\Delta);\ \sigma_\Delta < \infty, X(\sigma_\Delta) = a), \tag{3}$$

$$h_\Delta(\lambda, x) = \mathbf{E}_x(\exp(-\lambda, \sigma_\Delta);\ \sigma_\Delta < \infty, X(\sigma_\Delta) = b). \tag{4}$$

Теорема 1. *Пусть* $-\infty \leqslant a_0 < a < x < b < b_0 \leqslant \infty$, $\Delta = (a, b)$, $\Delta_0 = (a_0, b_0)$. *Для ПМ процесса справедливы формулы*

$$g_{\Delta_0}(\lambda, x) = g_\Delta(\lambda, x) g_{\Delta_0}(\lambda, a) + h_\Delta(\lambda, x) g_{\Delta_0}(\lambda, b), \tag{5}$$

$$h_{\Delta_0}(\lambda, x) = g_\Delta(\lambda, x) h_{\Delta_0}(\lambda, a) + h_\Delta(\lambda, x) h_{\Delta_0}(\lambda, b). \tag{6}$$

Доказательство. Из аксиомы **A1** и определения ПМ процесса следует

$$\begin{gathered}
g_{\Delta_0}(\lambda, x) = \mathbf{E}_x(\exp(-\lambda\sigma_{\Delta_0});\ \sigma_{\Delta_0} < \infty, X(\sigma_{\Delta_0}) = a_0) \\
= \mathbf{E}_x(\exp(-\lambda\sigma_\Delta)\exp(-\lambda\sigma_{\Delta_0}\theta_{\sigma_\Delta});\ \sigma_{\Delta_0}\theta_{\sigma_\Delta} < \infty,\ \sigma_\Delta < \infty, \\
X(\sigma_{\Delta_0})\theta_{\sigma_\Delta} = a_0,\ X(\sigma_\Delta) = a) + \mathbf{E}_x(\exp(-\lambda\sigma_\Delta)\theta_{\sigma_\Delta});\ \sigma_{\Delta_0}\theta_{\sigma_\Delta} < \infty, \\
\sigma_\Delta < \infty,\ X(\sigma_{\Delta_0})\theta_{\sigma_\Delta} = a_0,\ X(\sigma_\Delta) = b) \\
= \mathbf{E}_x(\exp(-\lambda\sigma_\Delta)\mathbf{E}_{X(\sigma_\Delta)}(\exp(-\lambda\sigma_{\Delta_0}); \\
\sigma_{\Delta_0} < \infty,\ X(\sigma_{\Delta_0}) = a_0);\ \sigma_\Delta < \infty,\ X(\sigma_\Delta) = a) \\
+\mathbf{E}_x(\exp(-\lambda\sigma_{\Delta_0})\mathbf{E}_{X(\sigma_\Delta)}(\exp(-\lambda\sigma_{\Delta_0}); \\
\sigma_{\Delta_0} < \infty,\ X(\sigma_{\Delta_0}) = a_0);\ \sigma_\Delta < \infty,\ X(\sigma_\Delta) = b) \\
= \mathbf{E}_a(\exp(-\lambda\sigma_{\Delta_0});\ \sigma_{\Delta_0} < \infty,\ X(\sigma_{\Delta_0}) = a_0)\, g_\Delta(\lambda, x) \\
+\mathbf{E}_b(\exp(-\lambda\sigma_{\Delta_0});\ \sigma_{\Delta_0} < \infty,\ X(\sigma_{\Delta_0}) = a_0)\, h_\Delta(\lambda, x) \\
= g_\Delta(\lambda, x) g_{\Delta_0}(\lambda, a) + h_\Delta(\lambda, x) g_{\Delta_0}(\lambda, b).
\end{gathered}$$

Первая формула доказана. Вторая выводится аналогично.

Применим теорему 1 к случаю, когда $a_0 = a$. В уравнениях (5) и (6) потребуют уточнения множители $g_{\Delta_0}(\lambda, a)$ и $h_{\Delta_0}(\lambda, a)$, где a не принадлежит интервалу Δ_0. Расширение понятия момента первого выхода требует расширения понятий переходных производящих функций. Мы полагаем в соответствии с предыдущими соглашениями выполненным условие

$$\mathbf{A2} \tag{7}$$

Если $\Delta = (a, b)$, *то при любом* $\lambda \geqslant 0$ *справедливо*

$$g_\Delta(\lambda, a) = 1, \quad h_\Delta(\lambda, a) = 0.$$

$$g_\Delta(\lambda, b) = 0, \quad h_\Delta(\lambda, a) = 1.$$

Отсюда из уравнения (6) следует уравнение

$$h_{\Delta_1}(\lambda, x) = h_\Delta(\lambda, x) h_{\Delta_1}(\lambda, b), \tag{8}$$

где $x \in \Delta \subset \Delta_1 = (a, b_1)$ и $b_1 > b$. □

§2. Одномерные диффузионные ПМ процессы

Непрерывный ПМ процесс с начальной точкой x называется **диффузионным** полумарковским процессом (ДПМ) в окрестности точки x, если существуют функции $A(x)$ и $B(\lambda, x)$, такие что

$$g_{(x-r,x+r)}(\lambda, x) = \frac{1}{2}(1 - A(x)\, r - B(\lambda, x)\, r^2) + o(r^2), \tag{9}$$

$$h_{(x-r,x+r)}(\lambda, x) = \frac{1}{2}(1 + A(x)\, r - B(\lambda, x)\, r^2) + o(r^2), \tag{10}$$

при $r \to 0$. Предполагается, что $A(x)$ положительна и дифференцируема в окрестности точки x, $B(\lambda, x)$ положительна, непрерывна и при $\lambda = 0$ не возрастает по второму аргументу, а по первому аргументу не убывает и имеет вполне монотонную частную производную.

Легко доказать, что если функции g_Δ, h_Δ дважды дифференцируемы по второму аргументу, то они удовлетворяют дифференциальному уравнению второго порядка

$$\frac{1}{2} f'' + A(x)\, f' - B(\lambda,\, x) f = 0. \tag{11}$$

Действительно, из (5) следует

$$
\begin{aligned}
g_\Delta(x) &= g_{(x-r,x+r)}(x)g_\Delta(x-r) + h_{(x-r,x+r)}(x)g_\Delta(x+r) \\
&= \left[\frac{1}{2}(1 - Ar - Br^2) + o(r^2)\right] g_\Delta(x-r) \\
&\qquad + \left[\frac{1}{2}(1 + Ar - Br^2) + o(r^2)\right] g_\Delta(x+r).
\end{aligned}
$$

Отсюда

$$
\begin{aligned}
0 = \frac{1}{2}\ &[g_\Delta(x-r) + g_\Delta(x+r) - 2g_\Delta(x)] \\
&+ \frac{1}{2}\,A\,r\,[-g_\Delta(x-r) + g_\Delta(x+r)] \\
&\qquad - \frac{1}{2}\,B\,r^2\,[g_\Delta(x-r) + g_\Delta(x+r)] + o(r^2).
\end{aligned}
$$

Разделив все члены этого равенства на r^2 и устремив r к нулю, получаем для функции $g_\Delta(x)$ уравнение (11). То же уравнение получаем для функции $h_\Delta(x)$, удовлетворяющей уравнению (6) и имеющей соответствующее разложение (8) по степеням r.

2.1. Достижимые бесконечные границы интервалов значений ДПМ. Рассмотрим так называемые моменты бесконечной остановки ζ, определяемые для траектории ξ равенством

$$\zeta(\xi) = \min\{t_0 : (\forall t > t_0)\, \xi(t) = \xi(t_0)\}. \tag{12}$$

Очевидно, что ζ не является марковским моментом. В то же время ζ является **терминальным** моментом (см. [3, с.78]), а именно – для всех $t \leqslant \zeta$ удовлетворяет равенству

$$\zeta = t \dot{+} \zeta \tag{13}$$

Действительно, пусть $\zeta(\xi) = t_0$ и $0 < t_1 \leqslant t_0$. Тогда постоянство функции $\theta_{t_0}\xi$ начнётся относительно начала постоянства функции ξ ровно на величину t_0 раньше.

Недостижимость границ может зависеть от увеличения сноса при приближении процесса к границе, что определяется коэффициентом $A(x)$ (см. [4]), а также – от увеличения вероятности наступления бесконечной остановки навсегда в точке $X(\zeta)$, что существенным образом зависит от коэффициента $B(\lambda, x)$ уравнения (11) (см. [5]).

По аналогии с конечным интервалом, рассмотренным в работе [4], определим достижимость и недостижимость процессом $\mathcal{X}$ бесконечного (правого) конца интервала $\Delta_0 = (a, \infty)$.

Из разложения (8) следует, что для любого целого n выполняется равенство

$$h_{(a,b+n)}(0,b) = \prod_{k=0}^{n} h_{(a,b+k+1)}(0,b+k).$$

Для упрощения записи будем опускать нуль в аргументе этих множителей, где это не вызывает недоразумения.

Так как все множители в правой части равенства не больше 1 и число таких множеств возрастает, то устремляя n к бесконечности, получаем неотрицательный предел. Ясно, что этот предел не больше единицы. Это тот случай, когда можно записать равенство

$$h_{(a,\infty)}(b) = \prod_{k=0}^{\infty} h_{(a,b+k+1)}(b+k). \tag{14}$$

Случай, когда $\lim_{n\to\infty} h_{(a,b+n)}(b) > 0$, означает, что процесс достигает бесконечно удалённую правую границу интервала с положительной вероятностью (эта граница **достижима**).

Наша задача – дать условия **недостижимости** процессом правой границы, выраженное в терминах коэффициентов дифференциального уравнения, которому удовлетворяют переходные производящие функции диффузионных полумарковских процессов. Таким образом, мы должны найти условия, когда предел $\lim_{n\to\infty} h_{(a,b+n)}(b)$ равен нулю (бесконечное произведение расходится). Известно (см. [5, с. 167]), что

$$\prod_{k=0}^{\infty} h_{(a,b+k+1)}(b+k) = 0$$

тогда и только тогда, когда

$$\sum_{k=0}^{\infty} (1 - h_{(a,b+k+1)}(b+k)) = \infty \tag{15}$$

Для конечных интервалов эта задача рассматривалась в работе [6].

Для вывода зависимости $h_{(a,b+k+1)}(b+k)$ от коэффициента $B(x)$ дифференциального уравнения (11), заданного на интервале (c, d) при условии $A(x) = 0$, применяется формула (см. [7, с. 167]):

$$h_{(c,d)}(x) = \frac{x-c}{d-c} - \int\limits_c^x \frac{d-x}{d-c} B(t)(t-c)h_{(c,d)}(t)\,dt \\ - \int\limits_x^d \frac{x-c}{d-c} B(t)(d-t)h_{(c,d)}(t)\,dt.$$

Отсюда

$$\begin{aligned} 1 - h_{(c,d)}(x) &= \frac{d-x}{d-c} + \int\limits_c^x \frac{d-x}{d-c} B(t)(t-c)h_{(c,d)}(t)\,dt \\ &\quad + \int\limits_x^d \frac{x-c}{d-c} B(t)(d-t)h_{(c,d)}(t)\,dt \\ &\geqslant \frac{d-x}{d-c} + \int\limits_x^d \frac{x-c}{d-c} B(t)(d-t)h_{(c,d)}(t)\,dt \\ &\geqslant \frac{d-x}{d-c} + h_{(c,d)}(x) \int\limits_x^d \frac{x-c}{d-c} B(t)(d-t)\,dt. \end{aligned} \tag{16}$$

Далее,

$$1 - h_{(c,d)}(x) - h_{(c,d)}(x) \int\limits_x^d \frac{x-c}{d-c} B(t)(d-t)\,dt \geqslant \frac{d-x}{d-c},$$

$$\frac{x-c}{d-c} \geqslant h_{(c,d)}(x) \left[1 + \int\limits_x^d \frac{x-c}{d-c} B(t)(d-t)\,dt \right],$$

$$h_{(c,d)}(x) \leqslant \frac{x-c}{d-c} \left[1 + \int\limits_x^d \frac{x-c}{d-c} B(t)(d-t)\,dt \right]^{-1},$$

$$1 - h_{(c,d)}(x) \geqslant 1 - \frac{x-c}{d-c} \left[1 + \int\limits_x^d \frac{x-c}{d-c} B(t)(d-t)\,dt \right]^{-1}$$

$$\geqslant 1 - \left[1 + \int\limits_x^d \frac{x-c}{d-c}\, B(t)(d-t)\, dt\right]^{-1}$$

$$= \int\limits_x^d \frac{x-c}{d-c}\, B(t)(d-t)\, dt \left[1 + \int\limits_x^d \frac{x-c}{d-c}\, B(t)(d-t)\, dt\right]^{-1}.$$

Учитывая неравенства $a < x_k < x_{k+1} < \infty$ и свойство строгого возрастания функции $f(x) \equiv x/(1+x)$, полагая $c \equiv a$, $d \equiv x_{k+1}$, $x \equiv x_k$, имеем

$$\frac{x-c}{d-c} = \frac{x_k - a}{x_{k+1} - a} \to 1$$

при $k \to \infty$ и, следовательно, существует k_0, такое что при всех $k \geqslant k_0$ это отношение будет больше $1/2$ и поэтому получаем

$$1 - h_{(a,x_{k+1})}(x_k)$$

$$\geqslant \int\limits_{x_k}^{x_{k+1}} \frac{1}{2} B(t)(x_{k+1} - t)\, dt \left[1 + \int\limits_{x_k}^{x_{k+1}} \frac{1}{2} B(t)(x_{k+1} - t)\, dt\right]^{-1}$$

$$\geqslant \inf_{t \in (x_k, x_{k+1})} B(t)\, \frac{1}{2} \int\limits_{x_k}^{x_{k+1}} (x_{k+1} - t)\, dt$$

$$\times \left[1 + \inf_{t \in (x_k, x_{k+1})} B(t)\, \frac{1}{2} \int\limits_{x_k}^{x_{k+1}} (x_{k+1} - t)\, dt\right]^{-1}$$

$$= \inf_{t \in (x_k, x_{k+1})} B(t)\, \frac{1}{4} \left[1 + \inf_{t \in (x_k, x_{k+1})} B(t)\, \frac{1}{4}\right]^{-1}.$$

Для недостижимости бесконечной правой границы достаточно, чтобы

$$\sum_{k=0}^{\infty} \inf_{t \in (x_k, x_{k+1})} B(t)\, \frac{1}{4} \left[1 + \inf_{t \in (x_k, x_{k+1})} B(t)\, \frac{1}{4}\right]^{-1} = \infty.$$

Если $B(t)$ не возрастает, то

$$1 - h_{(a,x_{k+1})}(x_k)$$

$$\geqslant \int\limits_{x_k}^{x_{k+1}} \frac{1}{2} B(t)(x_{k+1} - t)\, dt \left[1 + \int\limits_{x_k}^{x_{k+1}} \frac{1}{2} B(t)(x_{k+1} - t)\, dt\right]^{-1}$$

$$\geqslant B(x_{k+1})\,\frac{1}{2}\int\limits_{x_k}^{x_{k+1}}(x_{k+1}-t)\,dt\left[1+B(x_{k+1})\,\frac{1}{2}\int\limits_{x_k}^{x_{k+1}}(x_{k+1}-t)\,dt\right]^{-1}$$

$$=\frac{1}{4}\left[1+B(x_{k+1})\,\frac{1}{4}\right]^{-1}\geqslant\left[1+B(x_1)\,\frac{1}{4}\right]^{-1}B(x_{k+1})$$

Итак, для недостижимости бесконечной правой границы достаточно, чтобы

$$\sum_{k=0}^{\infty}B(x_{k+1})=\infty.$$

Очевидно, что для любого n справедливо, что

$$\sum_{k=0}^{n}B(x_{k+1})\geqslant\int\limits_{0}^{x_{n+1}}B(t)\,dt.$$

Таким образом, мы доказали теорему:

Теорема 2. *Для недостижимости правой границы ДПМ процессом, управляемым уравнением* $\frac{1}{2}f''-B(x)f=0$ *со значениями на интервале* (a,∞)*, достаточно, чтобы функция* $B(x)$ *была непрерывна, положительна, не возрастала и удовлетворяла соотношению* $\int\limits_0^\infty B(t)\,dt=\infty$*.*

Условие недостижимости, выраженное в терминах коэффициентов уравнения $\frac{1}{2}f''+A(x)f'-B(x)f=0$, выводится после приведения этого уравнения к нормальному виду $\frac{1}{2}f''-B_1(x)f=0$, где $B_1=B+\frac{1}{4}A^2+\frac{1}{2}A'$ (см. [6, с. 145]).

Список литературы

1. Е. Б. Дынкин, *Марковские процессы*, М., Физматгиз, 1963.
2. И. И. Гихман, А. В. Скороход, *Теория случайных процессов*, том 2, М., Наука, 1973.
3. R. M. Blumenthal, R. K. Getoor, *Markov Processes and Potential Theory*, New York, San Francisco, London, Academic Press, 1968.
4. Б. П. Харламов, *Об одном достаточном условии недостижимости границ интервала значений диффузионного процесса с остановкой.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **495** (2020), 291–304.
5. Г. М. Фихтенгольц, *Курс дифференциального и интегрального исчисления*, М., Физматгиз, 1959.
6. Б. П. Харламов, *Непрерывные полумарковские процессы*, СПБ, Наука, 2001.

7. Э. Камке, *Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям*, М., Наука, 1971.

Harlamov B. P. On unattainability of infinity boundary of domain for a diffusion semi-Markov process with stop.

One-dimensional continuous semi-Markov process of diffusion type is considered on an interval with one infinite boundary. Semi-Markov transition generating functions of the process satisfy ordinary differential equation of the second order. Coefficients of this equation determine distribution of beginning of infinite stop of the process. In terms of these coefficients one sufficient condition proved for the right boundary to be unattainable.

Институт проблем машиноведения РАН
Санкт-Петербург
E-mail: b.p.harlamov@gmail.com

Поступило 28 сентября 2023 г.